УДК 511.344:519.852.2

В.А. ШЛЫК

О СВЯЗИ ВЕРШИН ПОЛИТОПОВ РАЗБИЕНИЙ ЧИСЕЛ С НЕТРИВИАЛЬНЫМИ ФАСЕТАМИ

We establish interrelations between the coefficients of nontrivial facets of integer partition polytopes that contain a given partition. We also show that the operations of merging parts keep the polytope vertices on the same nontrivial facets.

Статья продолжает исследование политопов разбиений чисел, введенных в [1]. Разбиением натурального числа n называется его представление в виде суммы натуральных чисел

$$n = m_1 + m_2 + \ldots + m_k,\ \ m_i \in \mathbb{N},\ \ 1 \le m_i \le n,\ \ i = 1,\ldots,k,\ \ k \in \mathbb{N},$$

без учета их порядка [2]. Слагаемые $m_1, m_2, \ldots, m_k$ принято называть частями разбиения. При полиэдральном подходе каждому разбиению числа n сопоставляется неотрицательная целочисленная точка $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, каждая координата x_i которой равна числу вхождений части i в разбиение. Для обозначения того, что точка $x \in \mathbb{R}^n$ является разбиением числа n, традиционно используется запись $x \vdash n$. Политоп $P_n \subset \mathbb{R}^n$ разбиений числа n определяется как выпуклая оболочка множества

$$T_n = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid x_1 + 2x_2 + \ldots + nx_n = n,\, x_i \in \mathbb{N},\, i = 1,\ldots,n \right\},$$

состоящего из всех точек, соответствующих разбиениям n:

$$P_n = \operatorname{conv} T_n.$$

Через $S(x)$ обозначим множество всех различных частей разбиения $x \vdash n$: $S(x) = \{ i \in [1,n] \,|\, x_i > 0 \}$. Множество неотрицательных целых чисел обозначаем $\mathbb{Z}_+$, а отрезок целых чисел $\{1, 2, \ldots, m\}$, $m \in \mathbb{N}$, – через $[1, m]$.

В предыдущих работах описаны фасеты (грани максимальной размерности) политопов разбиений чисел [3] и получены результаты о строении их вершин [4]. Показано, что фасеты политопа P_n подразделяются на два класса – тривиальные и нетривиальные. Тривиальными фасетами являются координатные гиперплоскости $x_i = 0$, $2 \le i \le n$; гиперплоскость $x_1 = 0$ не является фасетой. Неравенство

$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i \ge p_0 \tag{1}$$

определяет нетривиальную фасету политопа P_n тогда и только тогда, когда $p_0 = p_n$, а вектор коэффициентов $p = (p_1, p_2, \ldots, p_n) \in \mathbb{R}^n$ является допустимым решением системы

$$\begin{gathered} p_i + p_{n-i} = p_n,\, 1 \le i \le [n/2], \\ p_i + p_j \ge p_{i+j},\, 1 \le i \le j < n,\, i + j \le n, \end{gathered} \tag{2}$$

обращает в равенства ее $n-2$ линейно независимых строк и неколлинеарен вектору $(1, 2, \ldots, n)$. Неравенства $p_i + p_j \ge p_{i+j}$ выражают свойство субаддитивности коэффициентов нетривиальных фасет (1).

В работе [5] введены две комбинаторные операции слияния частей разбиений любого числа n. Первая операция $C_{u,v}$ определяется следующим образом. Пусть $x \vdash n$ и $u, v \in S(x)$, $u \ne v$, – две различные части разбиения x. Для определенности будем считать, что $x_u \le x_v$. Результатом применения операции $C_{u,v}$ к разбиению x является точка $y = C_{u,v}(x) \in \mathbb{Z}_+^n$ с координатами $y_u = 0$, $y_v = x_v - x_u$, $y_{u+v} = x_{u+v} + x_u$ и $y_j = x_j$ для $j \in [1, n]$, $j \ne u, v, u+v$. Вторая операция C_u определяется сходным образом. Если $x \vdash n$ и некоторая часть $u \in S(x)$ входит в x более одного раза, т. е. $x_u > 1$, то результат ее применения к x есть точка $y = C_u(x) \in \mathbb{Z}_+^n$ с координатами $y_u = 0$, $y_{x_u u} = x_{x_u u} + 1$ и $y_j = x_j$ для $j \in [1, n]$, $j \ne u, x_u u$.

Суть обеих операций состоит в том, что некоторые части разбиения x объединяются в новые, более крупные части. При выполнении операции $C_{u,v}$ добавляется $\min(x_u, x_v)$ новых частей $u+v$, построенных путем слияния различных частей u и v разбиения x. Во втором случае добавляется одна новая часть $x_u u$, полученная слиянием всех имеющихся x_u экземпляров части u. Доказано, что применение операций $C_{u,v}$ и C_u к вершинам политопа разбиений любого числа n приводит к вершинам этого же политопа [5].

В данной работе впервые устанавливается связь между разбиениями и теми нетривиальными фасетами (1), которым они принадлежат. Показано, какие – в зависимости от разбиения x – неравенства системы (2) обращаются в равенства для таких фасет. Второй результат говорит о том, что в случае применения операций слияния частей к вершинам политопов разбиений чисел полученные вершины $C_{u,v}(x)$ и $C_u(x)$ остаются на тех же нетривиальных фасетах, что и исходные вершины. Что касается тривиальных фасет, то с ними связь простая: вершина x политопа P_n принадлежит всем фасетам $x_i = 0,\ i \in S(x),\ i \neq 1$.

Теорема 1. *Для любого разбиения $x \vdash n$ коэффициенты всех содержащих x нетривиальных фасет политопа P_n связаны следующими соотношениями*:

1) $p_u + p_v = p_{u+v}$ *для всех различных частей u и v разбиения x,*
2) $x_u p_u = p_{x_u u}$ *для любой части u, входящей в разбиение x более одного раза.*

Доказательство. Докажем соотношение 1). Пусть разбиение x удовлетворяет указанному условию. Без ограничения общности можно считать, что $x_u \le x_v$. Построим точку $y = C_{u,v}(x)$. Легко убедиться в том, что $y \vdash n$. Действительно,

$$\sum_{i=1}^{n} y_i i = \sum_{\substack{j=1,\\ j\neq u,v,u+v}}^{n} y_j j + (x_v - x_u)v + (x_{u+v} + x_u)(u+v) =$$

$$= \sum_{\substack{j=1,\\ j\neq u,v,u+v}}^{n} x_j j + x_v v - x_u v + x_{u+v}(u+v) + x_u(u+v) = \sum_{i=1}^{n} x_i i = n.$$

Пусть нетривиальная фасета (1) политопа P_n содержит разбиение x. Ввиду $y \vdash n$ выполняется неравенство $\sum_{i=1}^{n} p_i y_i \ge p_n$. Используя свойство субаддитивности коэффициентов нетривиальных фасет, получаем противоположное неравенство

$$\sum_{i=1}^{n} p_i y_i = \sum_{\substack{j=1,\\ j\neq u,v,u+v}}^{n} p_j y_j + p_v(x_v - x_u) + p_{u+v}(x_{u+v} + x_u) =$$

$$= \sum_{\substack{j=1,\\ j\neq u,v,u+v}}^{n} p_j x_j + (p_{u+v} - p_v)x_u + p_v x_v + p_{u+v} x_{u+v} \le$$

$$\le \sum_{\substack{j=1,\\ j\neq u,v,u+v}}^{n} p_j x_j + p_v x_v + p_u x_u = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i = p_n.$$

Таким образом, имеет место равенство $\sum_{i=1}^{n} p_i y_i = p_n$. Оно возможно только в случае $p_u + p_v = p_{u+v}$. Соотношение 1) доказано.

Докажем соотношение 2). Пусть $x \vdash n$ удовлетворяет условию $x_u > 1$ для некоторого $u \in S(x)$. Построим точку $y = C_u(x)$. Равенство

$$\sum_{i=1}^{n} y_i i = \sum_{\substack{j=1,\\ j\neq u,x_u u}}^{n} y_j j + (x_{x_u u} + 1)x_u u = \sum_{\substack{j=1,\\ j\neq u,x_u u}}^{n} x_j j + x_{x_u u} x_u u + x_u u = \sum_{i=1}^{n} x_i i = n$$

подтверждает, что $y \vdash n$.

Пусть теперь (1) – нетривиальная фасета политопа P_n, содержащая разбиение x. Ввиду $y \vdash n$ выполняется неравенство $\sum_{i=1}^{n} p_i y_i \geq p_n$. Учитывая свойство субаддитивности коэффициентов фасеты (1), получаем

$$\sum_{i=1}^{n} p_i y_i = \sum_{\substack{j=1,\\ j\neq u, x_u u}}^{n} p_j y_j + p_{x_u u}(x_{x_u u}+1) = \sum_{\substack{j=1,\\ j\neq u, x_u u}}^{n} p_j x_j + p_{x_u u} x_{x_u u} + p_{x_u u} \leq$$

$$\leq \sum_{\substack{j=1,\\ j\neq u, x_u u}}^{n} p_j x_j + p_{x_u u} x_{x_u u} + x_u p_u = \sum_{j=1}^{n} p_i x_i = p_n .$$

Следовательно, $\sum_{i=1}^{n} p_i y_i = p_n$, что возможно только в случае $x_u p_u = p_{x_u u}$. Теорема доказана.

Теорема 2. *Применение операций слияния частей $C_{u,v}$ и C_u к любой вершине x политопа разбиений чисел P_n приводит к таким его вершинам, которые принадлежат всем тем нетривиальным фасетам P_n, которым принадлежит вершина x.*

Доказательство. Теорема содержит два утверждения:

1) если вершина x политопа P_n принадлежит его нетривиальной фасете (1), а разбиение $y \vdash n$ таково, что $y = C_{u,v}(x)$ для некоторых $u, v \in S(x)$, то y является вершиной политопа P_n и принадлежит фасете (1);

2) если вершина x политопа P_n принадлежит его нетривиальной фасете (1), а разбиение $y \vdash n$ таково, что $y = C_u(x)$ для $u \in S(x)$ такого, что $x_u > 1$, то y является вершиной политопа P_n и принадлежит фасете (1).

То, что разбиение y в любом случае является вершиной политопа P_n, если x его вершина, доказано в [5]. В процессе доказательства теоремы 1 показано, что если (1) – нетривиальная фасета политопа P_n, содержащая x, то любое разбиение вида $y = C_{u,v}(x)$ или $y = C_u(x)$ удовлетворяет равенству $\sum_{i=1}^{n} p_i y_i = p_n$. Следовательно, в любом случае вершина y принадлежит фасете (1). Теорема доказана.

Замечание 1. Теорема 2 утверждает, что отношение принадлежности вершин политопа P_n его нетривиальным фасетам является инвариантным (в одну сторону) относительно применения к вершинам операций слияния частей. Однако она вполне допускает, чтобы вершины $C_{u,v}(x)$ или $C_u(x)$ принадлежали и таким нетривиальным фасетам P_n, которым x не принадлежит.

Проиллюстрируем утверждение теоремы 2 на примере политопа разбиений P_7. Он имеет четыре нетривиальные фасеты:

$$x_1 + x_3 + x_5 + x_7 = 1,$$
$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_5 + 2x_6 + 3x_7 = 3,$$
$$2x_1 + 4x_2 + x_3 + 3x_4 + 2x_6 + 4x_7 = 4,$$
$$2x_1 + x_2 + 2x_4 + x_5 + 2x_7 = 2.$$

Мы опускаем обоснование того, что это исчерпывающий перечень нетривиальных фасет P_7. Векторы коэффициентов этих фасет являются решениями системы (2) – каждый из них обращает в равенства три уравнения: $p_1 + p_6 = p_7$, $p_2 + p_5 = p_7$ и $p_3 + p_4 = p_7$, а также по крайней мере по два уравнения: $p_1 + p_2 = p_3$ и $p_1 + p_4 = p_5$ для первой фасеты, $2p_1 = p_2$ и $p_1 + p_4 = p_5$ для второй, $2p_1 = p_2$ и $p_1 + p_3 = p_4$ для третьей и $p_1 + p_3 = p_4$ и $2p_2 = p_4$ для четвертой. Несложно проверить, что пять уравнений, составляющих каждый из приведенных наборов, линейно независимы и, значит, согласно [3], определяют нетривиальные фасеты P_7. Применение операции $C_{u,v}$ при $u = 1$ и $v = 2$ к вершине (1, 3, 0, 0, 0, 0, 0), лежащей на первой фасете, дает вершину (0, 2, 1, 0, 0, 0, 0), принадлежащую первой и четвертой (новой относительно исходной вершины) фасетам. Последующее применение операции $C_{3,2}$ к полученной вершине дает вершину (0, 1, 0, 0, 1, 0, 0), которая принадлежит уже всем четырем фасетам. В результате применения операции C_2 к вершине (1, 3, 0, 0, 0, 0, 0) получаем вершину (1, 0, 0, 0, 0, 1, 0). Она также принадлежит всем четырем нетривиальным фасетам. Если же мы применим операцию C_1 к вершине (3, 0, 0, 1, 0, 0, 0), которая принадлежит второй нетривиальной фасете, то получим вершину (0, 0, 1, 1, 0, 0, 0), которая снова принадлежит всем четырем нетривиальным фасетам.

Замечание 2. В [4] доказано, что если разбиение x – вершина политопа разбиений чисел, то суммы всех наборов частей x различны. Тогда из результатов данной работы следует, что каждая вершина x определяет порядка $O\left(\left|S(x)\right|^2\right)$ соотношений между коэффициентами содержащих ее нетривиальных фасет и столько же вершин, принадлежащих тем нетривиальным фасетам, которым принадлежит x. Поскольку $\left|S(x)\right| \le \log(n+1)$ (см. [4]), то это число имеет порядок $O\left(\log^2 n\right)$.

1. Ш л ы к В . А . // Весці АН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 1996. № 3. С. 89.
2. Э н д р ю с Г . Теория разбиений. М., 1982.
3. S h l y k V . A . // Europ. J. Combinatorics. 2005. Vol. 26. № 8. P. 1139. doi:10.1016/j.ejc.2004.08.004.
4. Ш л ы к В . А . // Вестн. БГУ. Сер. 1. 2009. № 2. С. 109.
5. Ш л ы к В . А . // Докл. НАН Беларуси. 2009. № 6. С. 27.

Поступила в редакцию 18.10.09.

Владимир Александрович Шлык – кандидат физико-математических наук, докторант Института математики НАН Беларуси.