

Ватутин Э.И.<sup>1</sup>, Титов В.С.<sup>1</sup>, Пыхтин А.И.<sup>1</sup>, Крипачев А.В.<sup>1</sup>, Никитина Н.Н.<sup>2</sup>, Манзюк М.О.<sup>3</sup>, Альбертьян А.М.<sup>4</sup>, Курочкин И.И.<sup>4,5</sup>

<sup>1</sup> Юго-Западный государственный университет  
305040, г. Курск, ул. 50 лет Октября, 94

<sup>2</sup> Институт прикладных математических исследований  
Карельского научного центра РАН  
185910, Республика Карелия, г. Петрозаводск, ул. Пушкинская, 11

<sup>3</sup> Интернет-портал BOINC.ru  
Россия, Москва

<sup>4</sup> ФИЦ «Информатика и управление» РАН  
117312, г. Москва, пр. 60-летия Октября, 9

<sup>5</sup> Институт проблем передачи информации им. А.А. Харкевича РАН  
127051, г. Москва, Большой Каретный пер., д. 19 стр. 1

## Оценка мощностей спектров быстровычислимых числовых характеристик диагональных латинских квадратов порядков $N > 9$

Одним из известных типов комбинаторных объектов являются латинские (ЛК) и диагональные латинские квадраты (ДЛК) [1]. Для них возможно вычисление значений некоторого множества числовых характеристик, наиболее часто встречаемыми среди которых являются число трансверселей, диагональных трансверселей, интеркалятов и ортогональных соквадратов (ОДЛК). Для выбранного типа комбинаторных объектов, выбранной числовой характеристики и размерности задачи  $N$  различные возможные значения числовой характеристики образуют некоторое множество  $S$ , называемое спектром [2]. Для размерностей  $N \leq 8$  вычисление состава спектров возможно без применения вычислительных средств с массивно-параллельной архитектурой, при росте размерности задачи  $N > 9$  указанная задача не может быть решена точно на современном уровне развития средств вычислительной техники с параллельной архитектурой, ввиду чего необходимо применение ряда эвристических методов, результатом работы которых являются аппроксимации спектров и соответствующие им нижние ограничения на их мощности. Коллективом авторов разработана группа методов, алгоритмов и соответствующих им программных реализаций, в настоящее время работающих в рамках проекта добровольных распределенных вычислений Gerasim@Home на платформе BOINC. Они включают в своем составе различные генераторы исходных ДЛК различного типа, алгоритмы построения и обхода окрестностей для заданных ДЛК и алгоритмы вычисления искомым значений числовых характеристик. Мощности, супремумы и инфимумы спектров в зависимости от размерности задачи  $N$  образуют целочисленные числовые ряды, коллекционируемые в рамках Онлайн-энциклопедии целочисленных последовательностей (англ. OEIS).

По результатам расчетов на мощности спектров удалось наложить следующие нижние ограничения, являющиеся на данный момент наиболее сильными из известных (табл. 1).

Таблица 1. Нижние ограничения для мощностей спектров числовых характеристик ДЛК порядков  $N \geq 9$

Числовая характеристика ДЛК	Нижние ограничения на значения членов числового ряда	Номер числового ряда в OEIS
Число трансверселей	$a(9) \geq 359, a(10) \geq 442, a(11) \geq 5\,081, a(12) \geq 23\,112$	A344105
Число диагональных трансверселей	$a(9) \geq 176, a(10) \geq 736, a(11) \geq 1\,242, a(12) \geq 17\,684,$ $a(13) \geq 11\,919$	A345370
Число интеркалятов	$a(9) \geq 62, a(10) \geq 88, a(11) \geq 100, a(12) \geq 210, a(13) \geq 152$	A345760
Число ОДЛК	$a(10) \geq 10, a(11) \geq 38, a(12) \geq 3\,270$	A345761

Кроме того, в ходе работы со спектрами был усилен ряд нижних и верхних ограничений на супремумы и инфимумы соответствующих числовых характеристик (см. табл. 2 и 3).

Таблица 2. Верхние ограничения на минимальные значения (инфимумы) числовых характеристик ДЛК порядков  $N \geq 9$

Числовая характеристика ДЛК	Нижние ограничения на значения членов числового ряда	Номер числового ряда в OEIS
Число трансверселей	$a(10) \leq 144, a(11) \leq 1\,721, a(12) \leq 448, a(13) \leq 45\,010,$ $a(14) \leq 82\,368, a(15) \leq 2\,269\,107, a(16) \leq 7\,465\,984$	A287645
Число диагональных трансверселей	$a(10) \leq 3, a(11) \leq 145, a(12) = 0, a(13) \leq 5\,105,$ $a(14) \leq 8\,727, a(15) \leq 284\,640, a(16) \leq 898\,988,$ $a(17) \leq 12\,058\,840, a(18) \leq 82\,577\,875, a(19) \leq 592\,174\,879$	A287647

Таблица 3. Нижние ограничения на максимальные значения (супремумы) числовых характеристик ДЛК порядков  $N \geq 9$

Числовая характеристика ДЛК	Нижние ограничения на значения членов числового ряда	Номер числового ряда в OEIS
Число трансверселей	$a(11) \geq 37\,851, a(12) \geq 198\,144, a(13) \geq 1\,030\,367,$ $a(14) \geq 3\,477\,504, a(15) \geq 36\,362\,925, a(16) \geq 244\,744\,192,$ $a(17) \geq 1\,606\,008\,513, a(19) \geq 87\,656\,896\,891$	A287644
Число диагональных трансверселей	$a(10) \geq 890, a(12) \geq 30\,192, a(14) \geq 488\,792,$ $a(15) \geq 4\,620\,434, a(17) \geq 204\,995\,269,$ $a(18) \geq 281\,593\,874, a(19) \geq 11\,254\,190\,082$	A287648
Число интеркалятов	$a(10) \geq 93, a(11) \geq 94, a(12) \geq 252, a(13) \geq 156$	A307164
Число ОДЛК	$a(10) \geq 10, a(12) \geq 3\,855\,983\,322$	A287695

Подтверждающие ДЛК для приведенных в табл. 2 и 3 числовых оценок могут быть найдены в свободном доступе в составе соответствующих подтверждающих списков (например, [3–4]). Расчеты, направленные на увеличение мощностей известных в настоящее время спектров, в настоящее время активно выполняются в проекте Gerasim@Home для порядков  $N \geq 13$ . В качестве их результата следует ожидать дальнейшего усиления некоторых из приведенных выше оценок.

*Авторы статьи выражают благодарность всем добровольцам, принимавшим участие в проекте добровольных распределенных вычислений Gerasim@Home, а также пользователю citerra [Russia Team] с интернет-портала BOINC.ru за ряд конструктивных дискуссий, предложений и замечаний.*

### Литература

1. Keedwell A.D., Dénes J. Latin Squares and their Applications. Elsevier, 2015. 438 p. DOI: 10.1016/C2014-0-03412-0.
2. Ватутин Э.И., Никитина Н.Н., Манзюк М.О., Альбертьян А.М., Курочкин И.И. О построении спектров быстроисчисляемых числовых характеристик диагональных латинских квадратов малого порядка // Интеллектуальные и информационные системы (Интеллект – 2021). Тула, 2021. С. 7–17.
3. [http://evatutin.narod.ru/A287647\\_proving\\_list.txt](http://evatutin.narod.ru/A287647_proving_list.txt)
4. [http://evatutin.narod.ru/A287644\\_proving\\_list.txt](http://evatutin.narod.ru/A287644_proving_list.txt)