УДК 519.1

Э.И. ВАТУТИН, А.Д. БЕЛЫШЕВ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЧИСЛА САМООРТОГОНАЛЬНЫХ (SODLS) И ДВАЖДЫ САМООРТОГОНАЛЬНЫХ ДИАГОНАЛЬНЫХ ЛАТИНСКИХ КВАДРАТОВ (DSODLS) ПОРЯДКОВ 1–10

В статье приводится описание вычислительных экспериментов, выполненных в рамках проекта добровольных распределенных вычислений Gerasim@Home, направленных на подсчет числа самоортогональных и дважды самоортогональных диагональных латинских квадратов (ДЛК) порядков до 10 включительно. Для каждого из типов самоортогональности приводится соответствующее число главных классов, нормализованных ДЛК и ДЛК общего вида, представленные в виде числовых последовательностей, опубликованных в OEIS под номерами A329685, A287761, A287762 (SODLS) и A333366, A333367 и A333671. Значения для порядков 1–8 были получены путем анализа полных списков канонических форм главных классов ортогональных ДЛК, полученных авторами методом полного перебора. Значения для порядка 9 были получены, отталкиваясь от списка SODLS порядка 9, предоставленного Harry White. Значения для порядка 10 были получены путем анализа списка SOLS порядка 10, доступного online (van Vuuren et al.). Полученные значения подтверждают аналогичные величины, полученные ранее Francis Gaspalou и частично опубликованные Harry White. Кроме того, приведен перечень новых комбинаторных структур порядка 9, полученных отталкиваясь от SODLS соответствующего порядка, включающих в своем составе клики мощностью 3, 4 и 6.

Ключевые слова: *комбинаторика, диагональные латинские квадраты, ортогональные диагональные латинские квадраты, комбинаторные структуры, самоортогональные диагональные латинские квадраты, дважды самоортогональные диагональные латинские квадраты, числовые последовательности, OEIS, Gerasim@Home.*

Введение

Латинские квадраты (ЛК) представляют собой широко известный тип комбинаторных объектов, исследованию которых посвящено достаточное большое число научных работ [1, 2]. Диагональные латинские квадраты (ДЛК) являются частным случаем ЛК, в котором кроме различия значений элементов в строках и столбцах накладывается дополнительное ограничение на различие элементов на диагоналях (или, другими словами, множества элементов, образующих диагонали, должны являться трансверсалями). Парой ортогональных диагональных латинских квадратов (ОДЛК) A и B называются такие квадраты, в которых все упорядоченные пары $\left(a_{ij}, b_{ij}\right)$, $i, j = \overline{1, N}$, где N – порядок квадрата, различны. Классическим подходом к проверке ЛК/ДЛК на наличие ОЛК/ОДЛК является подход Эйлера-Паркера [3], базирующийся на построении множества трансверсалей (диагональных трансверсалей) [4] и отыскании в его составе подмножества из N непересекающихся трансверсалей, что наиболее эффективно с использованием программной реализации алгоритма танцующих связей (англ. DLX) [5, 6]. Темп поиска в таком случае лимитируется именно алгоритмом танцующих связей и для разработанной авторами высокоэффективной программной реализации составляет величину порядка 8000 ДЛК/с для однопоточной CPU-реализации на современных процессорах. С ОЛК/ОДЛК связан ряд открытых вопросов: задачами перечислительной комбинаторики, классификация комбинаторных структур (графов) из ОДЛК на множестве бинарного отношения ортогональности [7–9]. Наиболее известной нерешенной задачей из данной области является задача о поиске тройки взаимно-ортогональных ЛК/ДЛК (ВОЛК/ВОДЛК) порядка 10, которая, несмотря на многочисленные попытки построения, не найдена, однако окончательно не доказано, что она не существует.

Вычислительные эксперименты и анализ экспериментальных данных

Темп перебора можно существенно увеличить, если уйти от использования трансверсалей и алгоритма танцующих связей. В общем случае это невозможно, однако в некоторых частных случаях эта идея вполне имеет право на жизнь. Так в проекте добровольных распределенных вычислений RakeSearch был осуществлен перебор всех возможных пар ОДЛК порядка 9, в которых парный квадрат B, ортогональный проверяемому квадрату A, был получен путем перестановки строк квадрата A. Темп перебора при этом приблизительно на порядок выше (в районе 70 000 – 80 000 ДЛК/с), что позволило открыть несколько десятков новых комбинаторных структур из ДЛК порядка 9, ОДЛК к которым были достроены с использованием метода Эйлера-Паркера в ходе постобработки найденных строчно-перестановочных пар ОДЛК [8]. Другим известным типом ОДЛК, также формируемым без использования трансверсалей, являются самоортогональные ЛК/ДЛК (англ. SOLS/SODLS) [10], в которых ортогональный квадрат *B* пары ОДЛК получается путем транспонирования квадрата *A*. Например, приведенный ниже квадрат, выписанный в виде строкового представления, является SODLS порядка 10:

0123456789520978146395718643027864925130895034267136952170484317608295678253091420461
938571438079526.

Поиск SODLS может быть организован с эффективным темпом, на несколько порядков превосходящим темп метода Эйлера-Паркера, как ввиду того, что транспонирование квадрата и соответствующая проверка пары квадратов на ортогональность является очень быстрыми операциями, так и в связи с возможностью разработки специализированного высокоэффективного генератора ОДЛК соответствующего типа на базе *X*-образных диагональных заполнений (линеек), принципов вариации порядка заполнения ячеек и специализированной программной реализации на базе вложенных циклов и битовой арифметики [11, 12]. Кроме самоортогональных в некоторых источниках также упоминаются дважды самоортогональные квадраты (англ. DSOLS/DSODLS) [13], в которых в дополнение к требованию ортогональности от транспонирования накладывается дополнительное требование на наличие ортогонального квадрата для преобразования транспонирования квадрата от побочной диагонали. Пример такого DSODLS порядка 9 приведен ниже:

012345678243076815467182350835607124781453062370218546154760283506821437628534701.

В комбинаторике существует ряд задач, связанных с подсчетом числа комбинаторных объектов определенного типа в зависимости от его размерности (числа расстановок ферзей на шахматной доске размером $N \times N$ [6, 14], числа магических квадратов определенного типа [15] и т.п.). Обычно в результате решения поставленной задачи получается числовой ряд, *n*-е значение которого определяет число соответствующих объектов размерности *n*. Большое число подобных рядов входит в состав Онлайн-энциклопедии целочисленных последовательностей (англ. OEIS) [16]. D На момент начала исследования числовые ряды, соответствующие числу самоортогональных и дважды самоортогональных ДЛК порядка *N*, в OEIS представлены не были, что делает актуальной задачу подсчета соответствующих SODLS и DSODLS и публикацию полученных числовых значений.

В настоящее время в распоряжении коллектива авторов имеется полный перечень канонических форм (КФ) ОДЛК порядка до 8 включительно (здесь и далее под КФ понимается лексикографически минимальный представитель соответствующего главного класса ДЛК, квадраты в рамках которого эквивалентны и могут быть получены путем применения *M*-преобразований [17, 18]). Отталкиваясь от данных списков, можно определить, что число главных классов SODLS порядка $1 \leq N \leq 8$ образует следующий числовой ряд:

1, 0, 0, 1, 1, 0, 2, 8.

Определение числа главных классов SODLS порядка $N > 8$ не представляется возможным ввиду отсутствия аналогичных списков КФ ОДЛК. Однако известен список SODLS порядка 9, который был предоставлен Harry White по просьбе авторов и включает 224 832 нормализованных ДЛК (ДЛК с упорядоченной первой строкой). Отталкиваясь от него, можно построить множество соответствующих различных КФ и подсчитать их количество, которое оказалось равным 470, что является 9-м членом исследуемого числового ряда. Полученный список КФ SODLS порядка 9, в свою очередь, позволил получить новые комбинаторные структуры в дополнение к известным, полученным ранее путем анализа центральной симметрии [19, 20] и строчно-перестановочных ОДЛК [8] (см. табл.).

Таблица

Перечень новых комбинаторных структур порядка 9, полученных на базе SODLS

№	Название структуры	Один из ДЛК в ее составе
1	Клика-4 (4N6M1C)	012345678123458760576023481437180526285634017368207154641572803850716342704861235
2	6N5M3C	012345678230176854784530162548702316125864703671428035467213580 80

		3651427356087241
3	Линия-6 (6N5M3C2)	012345678230618745568402317123750864807163452675284130341027586456 6871023784536201
4	6N8M3C	0123456781205867433867215047584623104658701328741032655430178262 01638457637254081 [*]
5	Робот (8N8M4C)	0123456781246873503758614025374260816481305274602781352815037648 06754213753012846
6	10N9M4C	0123456782301768543410827655768104237546283106854372014032615878 67503142128754036
7	10N9M4C2	0123456781205768435847632014086371527458103263670284152731845608 56201734631452087
8	10N19M3C	0123456781234875607548603125361024872607518436470382513816247058 75216034408573126 [**]
9	10N21M3C	0123456781437285066278503145846071322085147637652830418364712503 50162487471036825
10	12N20M6C2	0123456781238705645842067138567241307486132053670584214051623876 31487052270531846
11	12N20M6C3	0123456781245837603670584214056321878462173052837045167501268346 38471052571860243
12	12N21M2C	0123456781234078564567382102708615436015734827850243618346521075 68210734347186025 [**]
13	14N22M7C	0123456781238705643670284154056321877485163208567042312701538466 31487052584261703
14	18N61M4C	0123456781245837603671084255718602438460173526382540174837265012 50671834705432186
15	20N28M9C	0123456781240387656781530425816724033475102862304678514032865178 56724130765801324
16	32N42M12C	0123456782307861547681023456245308171058674323872145065416237808 76451023453078261
17	36N80M14C	0123456781265387408547602315806234177438510623651078244370821562 01476385678214503
18	96N402M8C	0123456781204678357541830626385217043862704514716385208650123475 47806213203754186 [***]
19	98N470M21C	0123456781234785066470513824765820313586147208017362547342608152 65803147580127463
20	98N502M21C	0123456782301587463846072518457631025632104876710825341065748234 57821360728436015
21	162N606M37C	0123456781235780648076235412458601375607124836382047157841563204 76031852351487206
22	540N1500M11C	0123456782318765408574031626452307811047682533785140264631528075 20687314786021435 [*, **]
23	760N944M57C	0123456782301578646784032517532841065876104324217365801450687238 06521347364872015 [***]

Примечание. Комбинаторные структуры, отмеченные символом «*», включают в своем составе одну или несколько клик из ВОДЛК мощности 4, символом «**» – мощности 6, символом «***» – мощности 3 [21].

Список SOLS порядка 10 также известен [22]. Путем его канонизации (нахождения симметрично расположенных трансверсалей, постановка их на место главной и побочной диагонали путем перестановки строк и столбцов исследуемого ЛК) [23] можно получить список SODLS порядка 10, включающий в своем составе 30 502 различных КФ, что является 10-м членом исследуемого числового ряда (данные списки, идентичные по своему составу, были получены соавторами статьи независимо друг от друга с использованием различных программных реализаций).

Имея списки КФ SODLS, путем применения *M*-преобразований к каждой КФ в их составе можно получить соответствующие им главные классы из ДЛК, сложить их мощность и получить общее число нормализованных SODLS, представляющих собой следующий числовой ряд:

$$1, 0, 0, 2, 4, 0, 64, 1152, 224832, 234255360. \qquad (1)$$

Интересной особенностью полученного ряда является тот факт, что все главные классы SODLS порядка 10 являются полноразмерными: они образованы 15360 нормализованными ДЛК каждый и включают в своем составе 7680 SODLS и 7680 ESODLS [24] с ортогональностью относительно преобразования транспонирования от побочной диагонали. Данная особенность была выявлена эмпирически в ходе вычислительного эксперимента, в котором производилось построение всех главных классов SODLS и оценка их мощностей. Для размерностей $1 \le N \le 9$ данное свойство не выполняется, и различные главные классы содержат различное число нормализованных ДЛК, по-видимому, ввиду наличия обобщенных симметрий у соответствующих SODLS [25], уменьшающих мощности некоторых главных классов по сравнению с теоретическим максимумом.

Умножая полученные числовые значения ряда (1) на $N!$, можно получить общее число SODLS, представляющее собой следующий числовой ряд:

1, 0, 0, 48, 480, 0, 322560, 46448640, 81587036160, 850065850368000.

Имея готовые списки главных классов SODLS, нормализованных SODLS и SODLS общего вида можно получить соответствующие числовые ряды для DSODLS, выполнив дополнительную проверку на наличие ортогонального квадрата при транспонировании соответствующего SODLS от побочной диагонали. При этом можно получить следующие числовые ряды, также не представленные в OEIS на момент выполнения научных изысканий:

- 1, 0, 0, 1, 1, 0, 2, 8, 88, 0 – число главных классов DSODLS $(1 \le N \le 10)$;
- 1, 0, 0, 2, 4, 0, 64, 1152, 28608, 0 – число нормализованных DSODLS $(1 \le N \le 10)$;
- 1, 0, 0, 48, 480, 0, 322560, 46448640, 10381271040, 0 – число DSODLS общего вида $(1 \le N \le 10)$.

Несложно заметить, что DSODLS порядка 10 не существуют (ранее аналогичный результат был получен для DSOLS порядка 10 [13]). Из последнего свойства, в частности, вытекает скудный набор комбинаторных структур, образуемых SODLS порядка 10 по сравнению, например, с комбинаторными структурами, получаемыми в окрестностях обобщенных симметрий [25] или от SODLS меньших порядков (например, порядка 9).

Все полученные числовые ряды прошли апробацию и были добавлены в OEIS под номерами A329685, A287761, A287762 (SODLS) и A333366, A333367, A333671 (DSODLS). В ходе публикации предварительной информации, связанной с проведенными расчетами, выяснилось, что аналогичные значения были получены ранее Francis Gaspalou [26] и частично опубликованы Harry White [27]. Таким образом, расчеты, выполненные в рамках проекта добровольных распределенных вычислений Gerasim@Home, могут являться независимым подтверждением правильности опубликованных ранее значений.

Авторы статьи выражают благодарность пользователю citerra [Russia Team] с форума BOINC.ru, а также Harry White и Francis Gaspalou за ряд ценных замечаний, связанных с исследованием истории вопроса изучения свойств SODLS и DSODLS.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Colbourn C.J., Dinitz J.H. Handbook of Combinatorial Designs, Second Edition. Chapman & Hall/CRC, 2006. 1016 p.
2. Keedwell A.D., Dénes J. Latin Squares and their Applications. Elsevier, 2015. 438 p. DOI: 10.1016/C2014-0-03412-0.
3. Parker E.T. Orthogonal Latin squares // Proc. Natl. Acad. Sci. USA. 1959. Vol. 45(6). P. 859–862.
4. Vatutin E.I., Kochemazov S.E., Zaikin O.S., Valyaev S.Yu. Enumerating the Transversals for Diagonal Latin Squares of Small Order // CEUR Workshop Proceedings. Proceedings of the Third International Conference BOINC-based High Performance Computing: Fundamental Research and Development (BOINC: FAST 2017). Technical University of Aachen, Germany. 2017. Vol. 1973. P. 6–14.
5. Knuth D.E. Dancing links // arXiv:cs/0011047v1 [cs.DS]. 2000. 26 p.
6. Кнут Д.Э. Искусство программирования. Т. 4А. Комбинаторные алгоритмы. Ч. 1. М.: Вильямс, 2013. 960 с.
7. Ватутин Э.И., Манзюк М.О., Титов В.С., Кочемазов С.Е., Белышев А.Д., Никитина Н.Н. Классификация комбинаторных структур из диагональных латинских квадратов порядка 1–8 на множестве отношения ортогональности // Высокопроизводительные вычислительные системы и технологии. 2019. Т. 3. № 1. С. 94–100.
8. Manzyuk M., Nikitina N., Vatutin E. Start-up and the Results of the Volunteer Computing Project RakeSearch // Communications in Computer and Information Science book series. Springer. 2019. Vol. 1129. P. 725–734. DOI: 10.1007/978-3-030-36592-9_59.
9. Vatutin E.I., Titov V.S., Zaikin O.S., Kochemazov S.E., Manzuk M.O., Nikitina N.N. Orthogonality-based classification of diagonal Latin squares of order 10 // CEUR Workshop Proceedings. 2018.

Vol. 2267. Proceedings of the VIII International Conference "Distributed Computing and Grid-technologies in Science and Education" (GRID 2018). Dubna, JINR, 2018. P. 282–287.
10. Brayton R.K., Coppersmith D., Hoffman A.J. Self-Orthogonal Latin Squares of All Orders n != 2, 3, 6 // Bulletin of the American Mathematical Society. 1974. Vol. 80. No. 1. P. 116–118.
11. Ватутин Э.И., Заикин О.С., Журавлев А.Д., Манзюк М.О., Кочемазов С.Е., Титов В.С. О влиянии порядка заполнения ячеек на темп генерации диагональных латинских квадратов // Информационно-измерительные диагностирующие и управляющие системы (Диагностика – 2016). Курск: изд-во ЮЗГУ, 2016. С. 33–39.
12. Kochemazov S., Zaikin O., Vatutin E., Belyshev A. Enumerating Diagonal Latin Squares of Order Up to 9 // Journal of Integer Sequences. 2020. Vol. 23. Issue 1. Article ID 20.1.2.
13. Runming Lu, Sheng Liu, Jian Zhang. Searching for Doubly Self-orthogonal Latin Squares // Lecture Notes in Computer Science. 2011. Vol. 687. P. 538-550. DOI: 10.1007/978-3-642-23786-7_41.
14. Fischetti M., Salvagnin D. Finding First and Most-Beautiful Queens by Integer Programming // arXiv:1907.08246 [cs.DS], 2019.
15. Ripatti A. On the number of semi-magic squares of order 6 // arXiv:1807.02983 [math.CO], 2018.
16. Sloane N.J.A. The on-line encyclopedia of integer sequences // https://oeis.org/
17. Чебраков Ю.В. Теория магических матриц. Санкт-Петербург, 2016. 352 с.
18. Vatutin E., Belyshev A., Kochemazov S., Zaikin O., Nikitina N. Enumeration of isotopy classes of diagonal Latin squares of small order using volunteer computing // Communications in Computer and Information Science. 2018. Vol. 965. Springer. P. 578–586. DOI: 10.1007/978-3-030-05807-4_49.
19. Ватутин Э.И., Кочемазов С.Е., Заикин О.С., Манзюк М.О., Никитина Н.Н., Титов В.С. О свойствах центральной симметрии диагональных латинских квадратов // Высокопроизводительные вычислительные системы и технологии. 2018. № 1 (8). С. 74–78.
20. Vatutin E.I., Kochemazov S.E., Zaikin O.S., Manzuk M.O., Nikitina N.N., Titov V.S. Central Symmetry Properties for Diagonal Latin Squares // Problems of Information Technology. 2019. No. 2. P. 3–8. DOI: 10.25045/jpit.v10.i2.01.
21. Ватутин Э.И., Никитина Н.Н., Манзюк М.О., Заикин О.С., Белышев А.Д. О свойствах клик из диагональных латинских квадратов малой размерности на множестве бинарного отношения ортогональности // Интеллектуальные и информационные системы (Интеллект – 2019). Тула, 2019. С. 17–23.
22. Burger A.P., Kidd M.P., van Vuuren J.H. Enumerasie van self-ortogonale Latynse vierkante van orde 10 // LitNet Akademies (Natuurwetenskappe). 2010. No. 7(3). P. 1–22.
23. Brown J.W., Cherry F., Most L., Most M., Parker E.T., Wallis W.D. Completion of the spectrum of orthogonal diagonal Latin squares // Lecture notes in pure and applied mathematics. 1992. Vol. 139. P. 43–49.
24. Vatutin E.I. Number of main classes of extended self-orthogonal diagonal Latin squares of order *n* // https://oeis.org/A309210
25. Ватутин Э.И., Белышев А.Д., Заикин О.С., Никитина Н.Н., Манзюк М.О. Исследование свойств обобщенных симметрий в диагональных латинских квадратах с использованием добровольных распределенных вычислений // Высокопроизводительные вычислительные системы и технологии. 2019. Т. 3. № 2. С. 39–51.
26. Gaspalou F. Official web page // http://www.gaspalou.fr/magic-squares/index.htm
27. White H. Official web page // http://budshaw.ca/SODLS.html

---

Ватутин Эдуард Игоревич
Доцент каф. Вычислительной техники,
Юго-Западный государственный университет
305040, Россия, г. Курск, ул. 50 лет Октября, д. 94,
ORCID 0000-0002-7362-7387
Тел.: +7-4712-22-26-65
Эл. почта: evatutin@rambler.ru

Белышев Алексей Дмитриевич
Почетный член,
Интернет-портал BOINC.ru
Тел.: +7-4712-22-26-65
Эл. почта: alexey-bell@yandex.ru

E.I. VATUTIN, A.D. BELYSHEV

ABOUT THE NUMBER OF SELF-ORTHOGONAL (SODLS) AND DOUBLY SELF-ORTHOGONAL DIAGONAL LATIN SQUARES (DSODLS) OF ORDERS 1–10

The article describes computational experiments aimed to enumerating the number of self-orthogonal and double-self-orthogonal diagonal Latin squares (DLS) of orders up to 10. For each of the types of self-orthogonality, the corresponding number of main classes of DLSs, the number of normalized DLSs and the number of DLSs of general form are presented in the form of numerical sequences published in OEIS with numbers A329685, A287761, A287762 (SODLS) and A333366, A333367, A333671 (DSODLS). Values for orders 1–8 were obtained by analyzing the complete lists of canonical forms of the main classes of orthogonal DLSs obtained by the authors by exhaustive search. Values for order 9 were derived from the SODLS list of order 9 provided by Harry White. Values for order 10 were obtained by analyzing the list of SOLS of order 10, available online (van Vuuren et al.). The values obtained confirm the similar values obtained previously by Francis Gaspalou and partially published by Harry White. In addition, a list of new combinatorial structures of the order of 9 obtained by repelling from SODLS of the corresponding order, including cliques with a cardinality of 3, 4, and 6, is given.

Keywords: *combinatorics, diagonal Latin squares, orthogonal diagonal Latin squares, combinatorial structures, self-orthogonal diagonal Latin squares, doubly self-orthogonal diagonal Latin squares, integer sequences, OEIS, Gerasim@Home.*

REFERENCES

1. Colbourn C.J., Dinitz J.H. Handbook of Combinatorial Designs. Second Edition. *Chapman & Hall/CRC*. 2006. 1016 p.
2. Keedwell A.D., Dénes J. Latin Squares and their Applications. *Elsevier*. 2015. 438 p. DOI: 10.1016/C2014-0-03412-0.
3. Parker E.T. Orthogonal Latin squares. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*. 1959. Vol. 45(6). P. 859–862.
4. Vatutin E.I., Kochemazov S.E., Zaikin O.S., Valyaev S.Yu. Enumerating the Transversals for Diagonal Latin Squares of Small Order. *CEUR Workshop Proceedings. Proceedings of the Third International Conference BOINC-based High Performance Computing: Fundamental Research and Development* (*BOINC: FAST 2017*). Technical University of Aachen. Germany. 2017. Vol. 1973. P. 6–14.
5. Knuth D.E. Dancing links. *arXiv:cs*/0011047v1 [cs.DS]. 2000. 26 p.
6. Knuth D.E. Art of programming. Vol. 4A. Combinatorial algorithms. Part 1. *Moscow. Publisher "Willams"*. 2013. 960 p. (in Russian).
7. Vatutin E.I., Manzuk M.O., Titov V.S., Kochemazov S.E., Belyshev A.D., Nikitina N.N. Orthogonality-based classification of diagonal Latin squares of orders 1–8. *High-performance computing systems and technologies*. 2019. Vol. 3. No. 1. P. 94–100 (in Russian).
8. Manzyuk M., Nikitina N., Vatutin E. Start-up and the Results of the Volunteer Computing Project RakeSearch. *Communications in Computer and Information Science*. *Springer*. 2019. Vol. 1129. P. 725–734. DOI: 10.1007/978-3-030-36592-9_59.
9. Vatutin E.I., Titov V.S., Zaikin O.S., Kochemazov S.E., Manzuk M.O., Nikitina N.N. Orthogonality-based classification of diagonal Latin squares of order 10. *CEUR Workshop Proceedings*. 2018. Vol. 2267. P. 282–287. Proceedings of the VIII International Conference "Distributed Computing and Grid-technologies in Science and Education" (GRID 2018). Dubna, JINR. 2018.
10. Brayton R.K., Coppersmith D., Hoffman A.J. Self-Orthogonal Latin Squares of All Orders n != 2, 3, 6. *Bulletin of the American Mathematical Society*. 1974. Vol. 80. No. 1. P. 116–118.
11. Vatutin E.I., Zaikin O.S., Zhuravlev A.D., Manzuk M.O., Kochemazov S.E., Titov V.S. The effect of filling cells order to the rate of generation of diagonal Latin squares. *Information-measuring and diagnosing control systems (Diagnostics – 2016). Kursk. Publisher SWSU*. 2016. P. 33–39 (in Russian).
12. Kochemazov S., Zaikin O., Vatutin E., Belyshev A. Enumerating Diagonal Latin Squares of Order Up to 9. *Journal of Integer Sequences*. 2020. Vol. 23. Issue 1. Article ID 20.1.2.
13. Runming Lu, Sheng Liu, Jian Zhang. Searching for Doubly Self-orthogonal Latin Squares. *Lecture Notes in Computer Science*. 2011. Vol. 687. P. 538-550. DOI: 10.1007/978-3-642-23786-7_41.
14. Fischetti M., Salvagnin D. Finding First and Most-Beautiful Queens by Integer Programming. *arXiv*:1907.08246 [cs.DS]. 2019.
15. Ripatti A. On the number of semi-magic squares of order 6. *arXiv*:1807.02983 [math.CO]. 2018.
16. Sloane N.J.A. The on-line encyclopedia of integer sequences. *https://oeis.org/*
17. Chebrakov Yu.V. Theory of magic matrixes. *Saint-Peterburg*. 2016. 352 p. (in Russian).
18. Vatutin E., Belyshev A., Kochemazov S., Zaikin O., Nikitina N. Enumeration of isotopy classes of diagonal Latin squares of small order using volunteer computing. *Communications in Computer and Information Science*. *Springer*. 2018. Vol. 965. P. 578–586. DOI: 10.1007/978-3-030-05807-4_49.
19. Vatutin E.I., Kochemazov S.E., Zaikin O.S., Manzuk M.O., Nikitina N.N., Titov V.S. Properties of central symmetry for diagonal Latin squares. *High-performance computing systems and technologies*. 2018. No. 1 (8). P. 74–78 (in Russian).
20. Vatutin E.I., Kochemazov S.E., Zaikin O.S., Manzuk M.O., Nikitina N.N., Titov V.S. Central Symmetry Properties for Diagonal Latin Squares // Problems of Information Technology. – No. 2. 2019. – pp. 3–8. DOI: 10.25045/jpit.v10.i2.01.
21. Vatutn E.I., Nikitina N.N., Manzuk M.O., Zaikin O.S., Belyshev A.D. Cliques properties from diagonal Latin squares of small order. *Intellectual and Information Systems* (*Intellect – 2019*). *Tula*. 2019. P. 17–23 (in Russian).
22. Burger A.P., Kidd M.P., van Vuuren J.H. Enumerasie van self-ortogonale Latynse vierkante van orde 10. *LitNet Akademies* (*Natuurwetenskappe*). 2010. No. 7(3). P. 1–22.
23. Brown J.W., Cherry F., Most L., Most M., Parker E.T., Wallis W.D. Completion of the spectrum of orthogonal diagonal Latin squares. *Lecture notes in pure and applied mathematics*. 1992. Vol. 139. P. 43–49.
24. Vatutin E.I. Number of main classes of extended self-orthogonal diagonal Latin squares of order *n*. *https://oeis.org/A309210*
25. Vatutin E.I., Belyshev A.D., Zaikin O.S., Nikitina N.N., Manzuk M.O. Investigating of properties of generalized symmetries in diagonal Latin squares using voluntary distributed computing. *High-performance computing systems and technologies*. 2019. Vol. 3. No. 2. P. 39–51 (in Russian).
26. Gaspalou F. Official web page. *http://www.gaspalou.fr/magic-squares/index.htm*
27. White H. Official web page. *http://budshaw.ca/SODLS.html*

Eduard I. Vatutin
Docent of Department of Computing Techniques,

Alexey D. Belyshev
Honorary member,

Southwest State University
305040, Russia, Kursk, 50 let Oktyabrya st., 94,
ORCID 0000-0002-7362-7387
Phone: +7-4712-22-26-65,
E-mail: evatutin@rambler.ru

Internet-portal BOINC.ru
Phone**:** +7-4712-22-26-65
E-mail: alexey-bell@yandex.ru