

Курс “Media Data Compression”

# Сжатие с потерями: Вейвлет-анализ и сжатие изображений

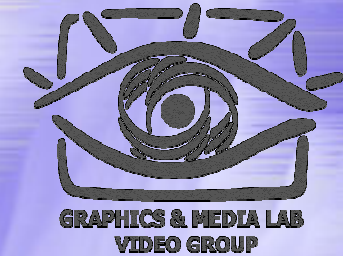
Антон Переберин

*Московский Государственный Университет*

*CS MSU Graphics&Media Lab*

[avpereb@newmail.ru](mailto:avpereb@newmail.ru)

# Сжатие без потерь и с потерями



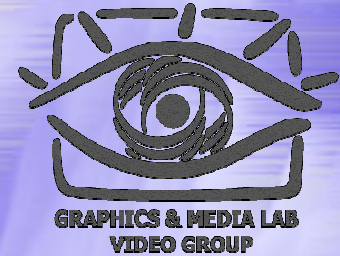
## ◆ Сжатие без потерь:

не искажая информации, найти способ закодировать ее меньшим числом битов.

## ◆ Сжатие с потерями:

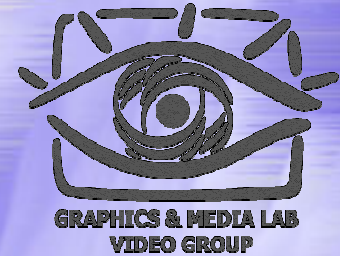
пожертвовать частью информации, которая «не существенна» для представления данных.

# Сжатие с потерями



- ◆ Применимо не для любых данных (текстовые данные, двоичный исполняемый код требуют полного восстановления)
- ◆ Проблема оценки качества

# Сжатие с потерями (прод.)



- ◆ Степень сжатия — десятки и сотни раз
- ◆ Возможность выбора между степенью сжатия и качеством восстановленной информации

# Цель лекции



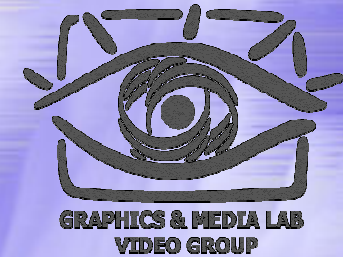
- ◆ Познакомить с некоторыми общими принципами сжатия информации с потерями
- ◆ Познакомить с основами гармонического анализа (анализа Фурье) и вейвлет-анализа (анализа всплесков).
- ◆ Проиллюстрировать применение вейвлет-анализа для сжатия графической информации

# За рамками лекции



- ◆ Описания конкретных алгоритмов сжатия
- ◆ Критерии качества

# Общий принцип сжатия с потерями



$$\mathbf{x} = [x_0, x_1, \dots, x_{N-1}] \Rightarrow \mathbf{y} = [y_0, y_1, \dots, y_{N-1}]$$

$$\mathbf{y} = f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} = f^{-1}(\mathbf{y})$$

$$\mathbf{x}^{(0)} = f^{-1}(y_0, 0, 0, \dots, 0)$$

$$\mathbf{x}^{(1)} = f^{-1}(y_0, y_1, 0, \dots, 0)$$

...

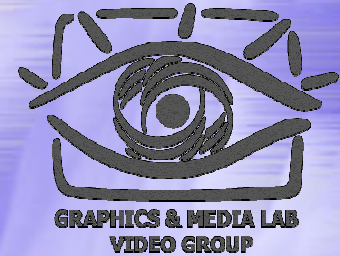
$$\mathbf{x}^{(n)} = f^{-1}(y_0, y_1, \dots, y_n, 0, \dots, 0), \quad 0 \leq n < N$$

...

$$\mathbf{x}^{(N-1)} = \mathbf{x}$$

Последовательность  $\{\mathbf{x}^{(n)}\}$  «сходится» к  $\mathbf{x}$ .

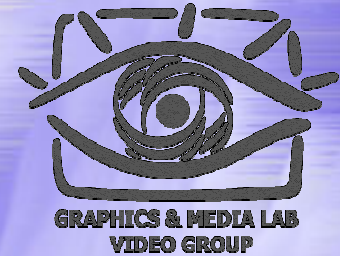
# Обработка сигналов



- ◆ *Сигнал* -- функция.
- ◆ *Непрерывный сигнал* -- функция, имеющая непрерывную область определения
- ◆ *Дискретный сигнал* -- функция, определенная на счетном (конечном) множестве



# Гармонический анализ



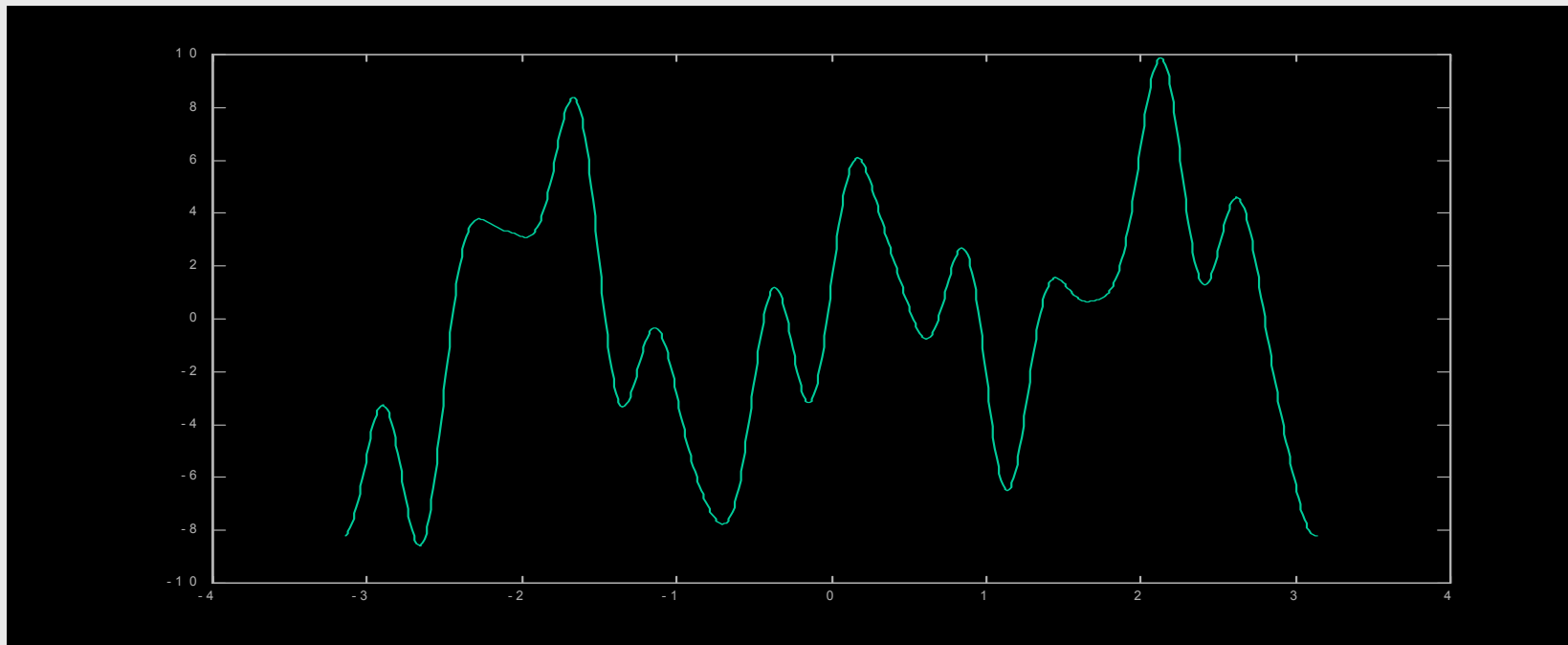
Идея: представить сигнал  
в виде суперпозиции (суммы)  
*гармонических колебаний*,  
т.е. функций вида:

$$A \sin(\omega x + \alpha)$$

$A$  — амплитуда,  $\omega$  — частота,  $\alpha$  — фазовый угол.

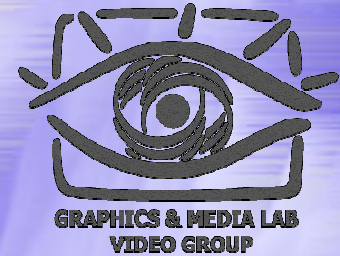
Период колебаний  $T = 2\pi/\omega$ .

# Пример сигнала



$$f(x) = \sin x - 2 \cos 2x + 5 \sin(3x + 1) + 3 \sin(10x - 0.5) + \cos(15x - 1)$$

# Преобразование Фурье



## ◆ Преобразование Фурье:

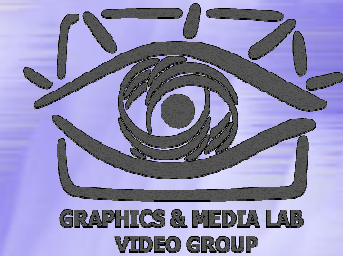
$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \exp(-i\omega x) dx$$

$$A(\omega) = |F(\omega)|, \quad \text{tg } \alpha(\omega) = \arg F(\omega)$$

## ◆ Обратное преобразование Фурье:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) \exp(i\omega x) d\omega$$

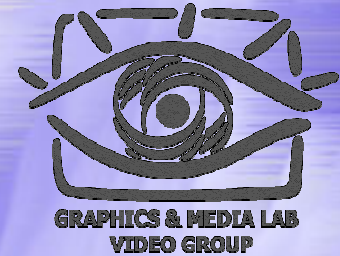
# Дискретное косинусное преобразование (DCT)



$$y_k = \frac{1}{\sqrt{N}} x_0 \cos \frac{\pi k}{2N} + \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{n=1}^{N-1} x_n \cos \frac{\pi k(2n+1)}{2N}, \quad 0 \leq k < N$$

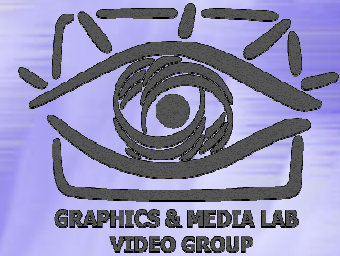
$$x_n = \frac{1}{\sqrt{N}} y_0 + \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{k=1}^{N-1} y_k \cos \frac{\pi k(2n+1)}{2N}, \quad 0 \leq n < N$$

# Частота



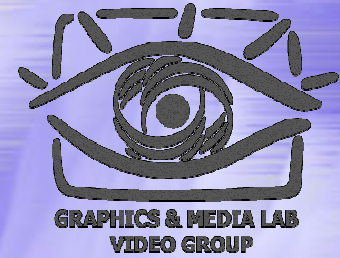
- ◆ *Частоте* в некотором смысле соответствует понятие «уровень детализации». Высокие частоты отвечают за передачу мелких деталей, низкие -- крупных.

# Фильтрация



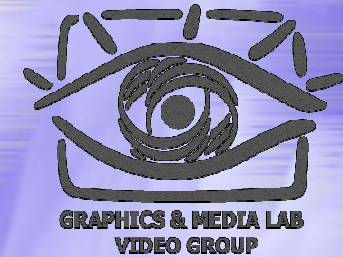
- ◆ *Низкочастотная фильтрация* -- обращение в 0 коэффициентов (амплитуд) при высоких частотах (исключение мелких деталей) -- эффект размытия изображения
- ◆ *Высокочастотная фильтрация* -- обращение в 0 коэффициентов при низких частотах (исключение «основы» изображения) -- эффект выделения перепадов

# Частота / Пространство



- ◆ Гармонический анализ не имеет пространственной локализации, поскольку не имеют пространственной локализации гармонические функции.

# Другие подходы

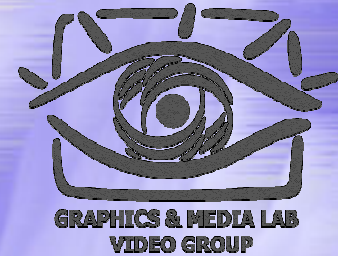


- ◆ Дробить данные на фрагменты, применять преобразования Фурье к каждому фрагменту по отдельности
- ◆ Найти преобразование, имеющее и частотную, и пространственную локализацию.



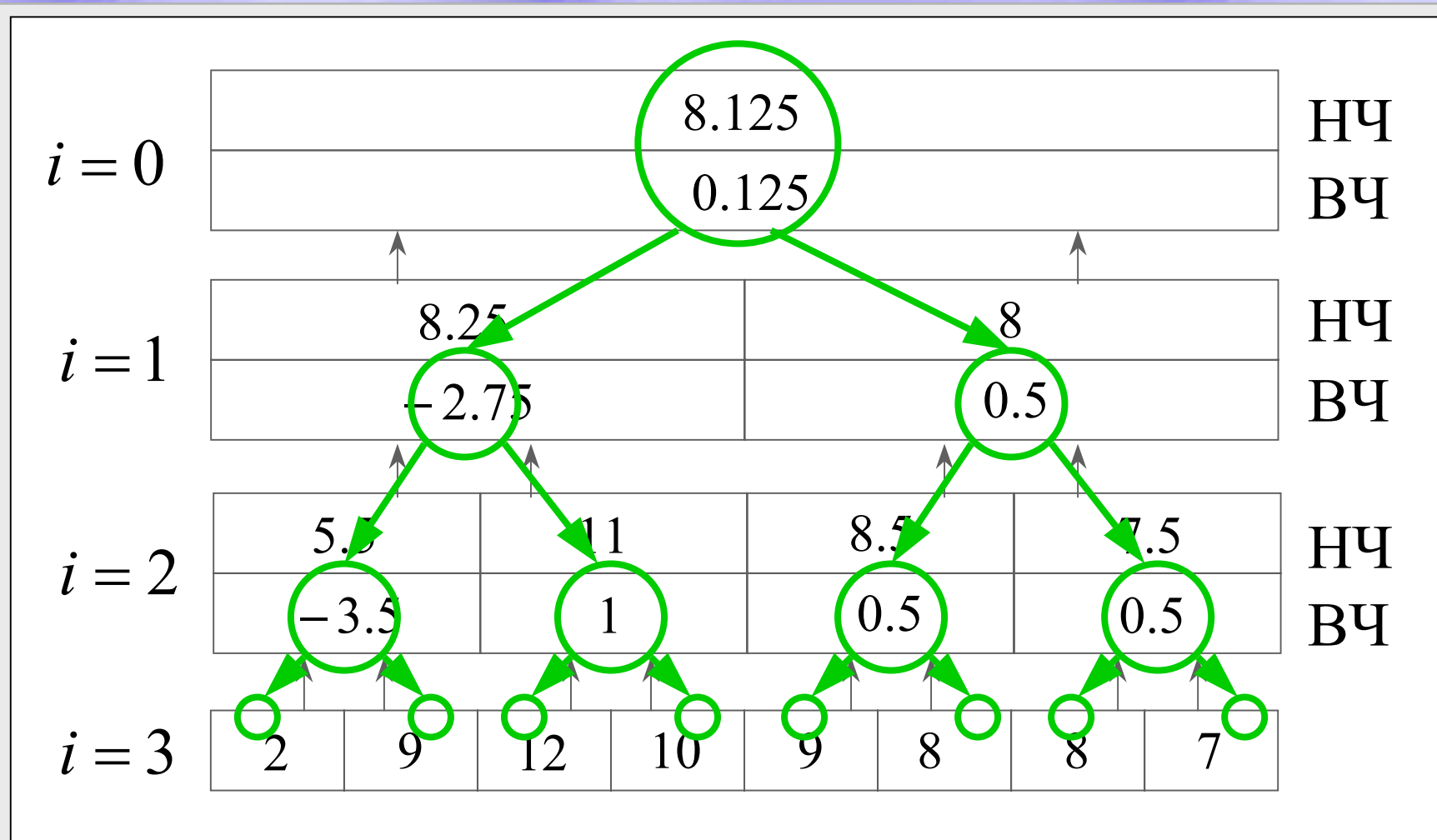
# Вейвлет-анализ.

## Основная идея

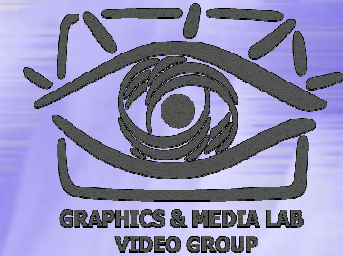


Представить данные в виде грубого приближения и детализирующей информации. Детализирующей информации тем больше, чем выше уровень детализации (частота)

# Простейший случай — преобразование Хаара



# Преобразование Хаара



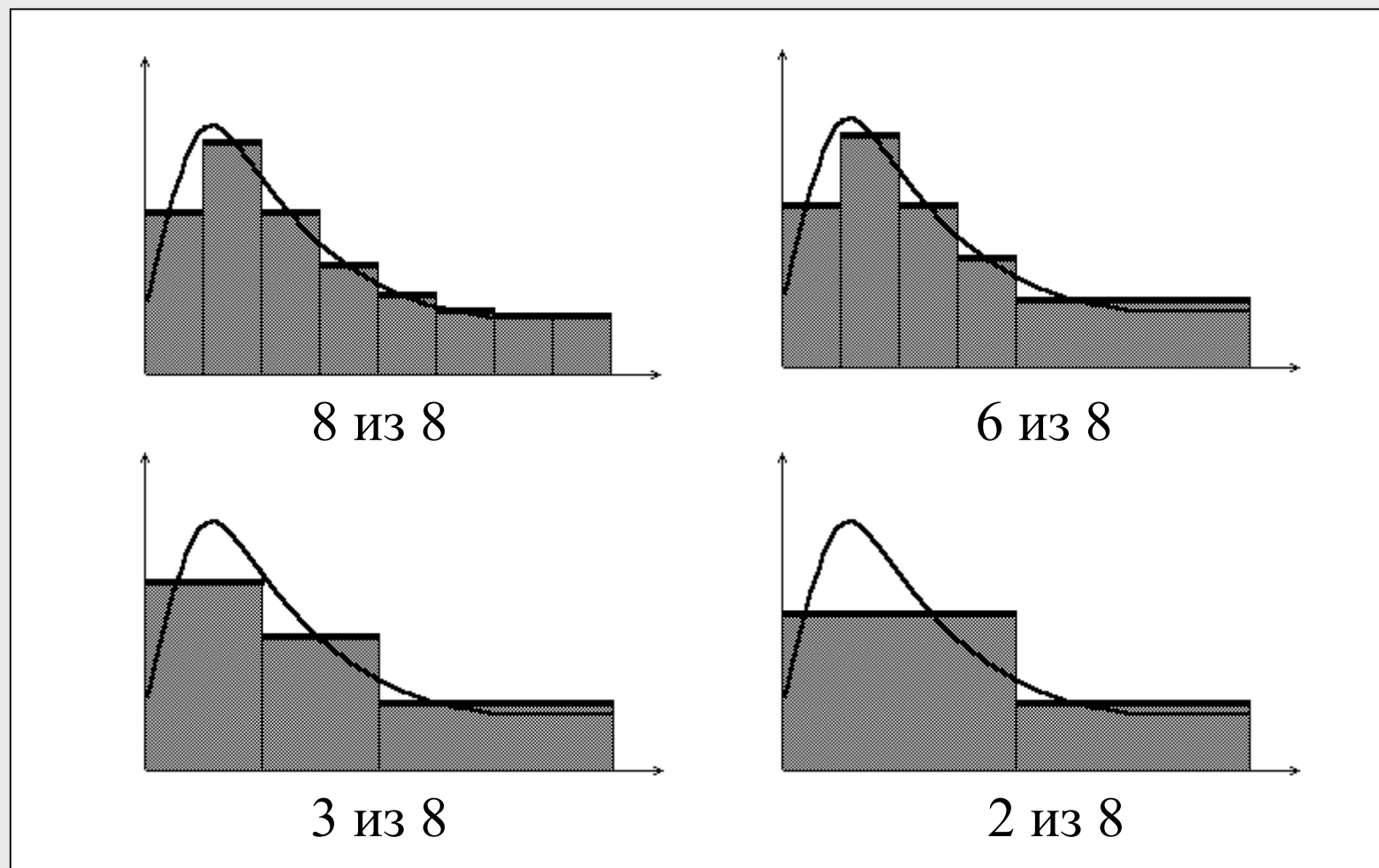
- ◆ В результате преобразования количество информации не изменилось
- ◆ Уровню разрешения (детализации)  $i$  соответствуют  $2^i$  детализирующих коэффициентов (вейвлет-коэффициентов)
- ◆ С ростом уровня детализации усиливается пространственная локализация преобразования

# Преобразование Хаара (прод.)

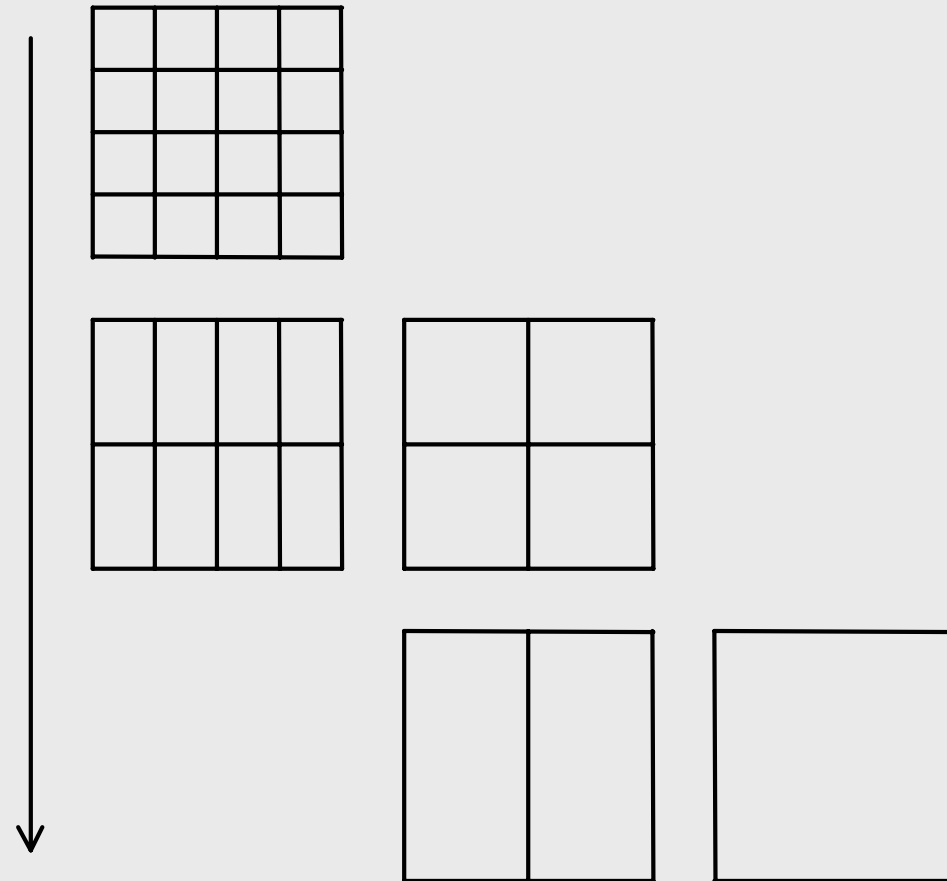


Обращением малых по абсолютной величине вейвлет-коэффициентов в 0 можно добиться сокращения объемов информации

# Сжатие информации (вейвлеты Хаара)



# Двумерное вейвлет-преобразование



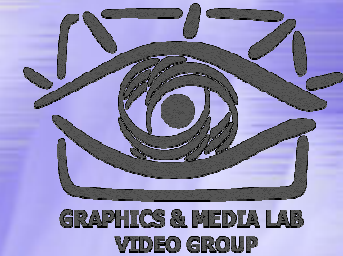
# Вейвлет-сжатие



Исходное  
изображение  
512x512  
(262144 байт).  
Преобразование  
Хаара дает 20%  
нулей



# Вейвлет-сжатие



1 шаг  
преобразования  
Хаара,  
все ВК  
обращены в 0  
(75% нулей)





# Вейвлет-сжатие



2 шага  
преобразования  
Хаара,  
все ВК  
обращены в 0  
(93% нулей)



# Вейвлет-сжатие



2 шага  
преобразования  
Хаара,  
порог 0.05  
(86% нулей)



# Вейвлет-сжатие



2 шага  
преобразования  
Хаара,  
порог 0.1  
(90% нулей)



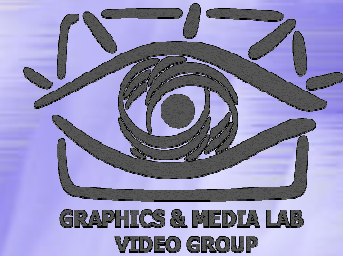
# Вейвлет-сжатие



2 шага  
преобразования  
D4,  
порог 0.1  
(90% нулей)

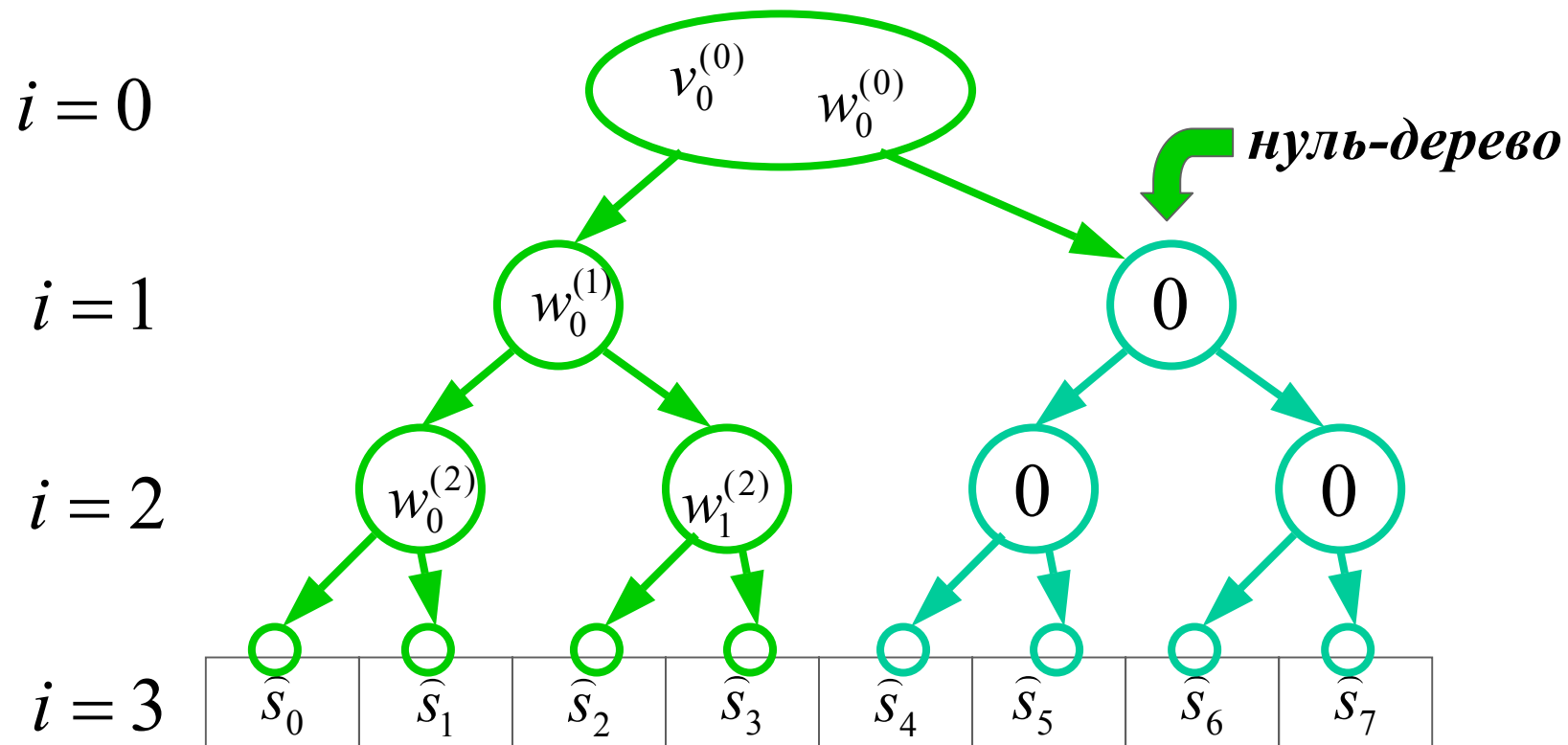
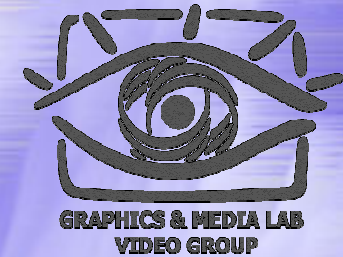


# Реализация сжатия

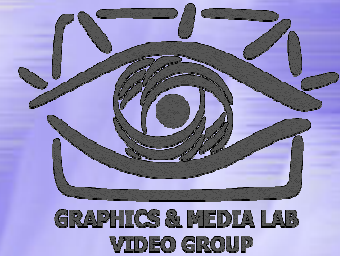


- ◆ Вейвлет-преобразование с обнуленными коэффициентами лучше сжимается известными методами сжатия без потерь
- ◆ Существуют способы переупорядочить коэффициенты так, чтобы обеспечилось лучшее сжатие

# Сжатие с помощью нуль-деревьев

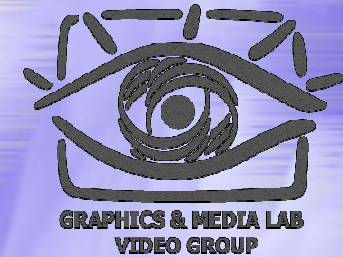


# Преимущества вейвлет-сжатия



- ◆ Адаптация к особенностям конкретного сигнала
- ◆ Возможность прогрессивной (с постепенным увеличением детализации) и локальной распаковки

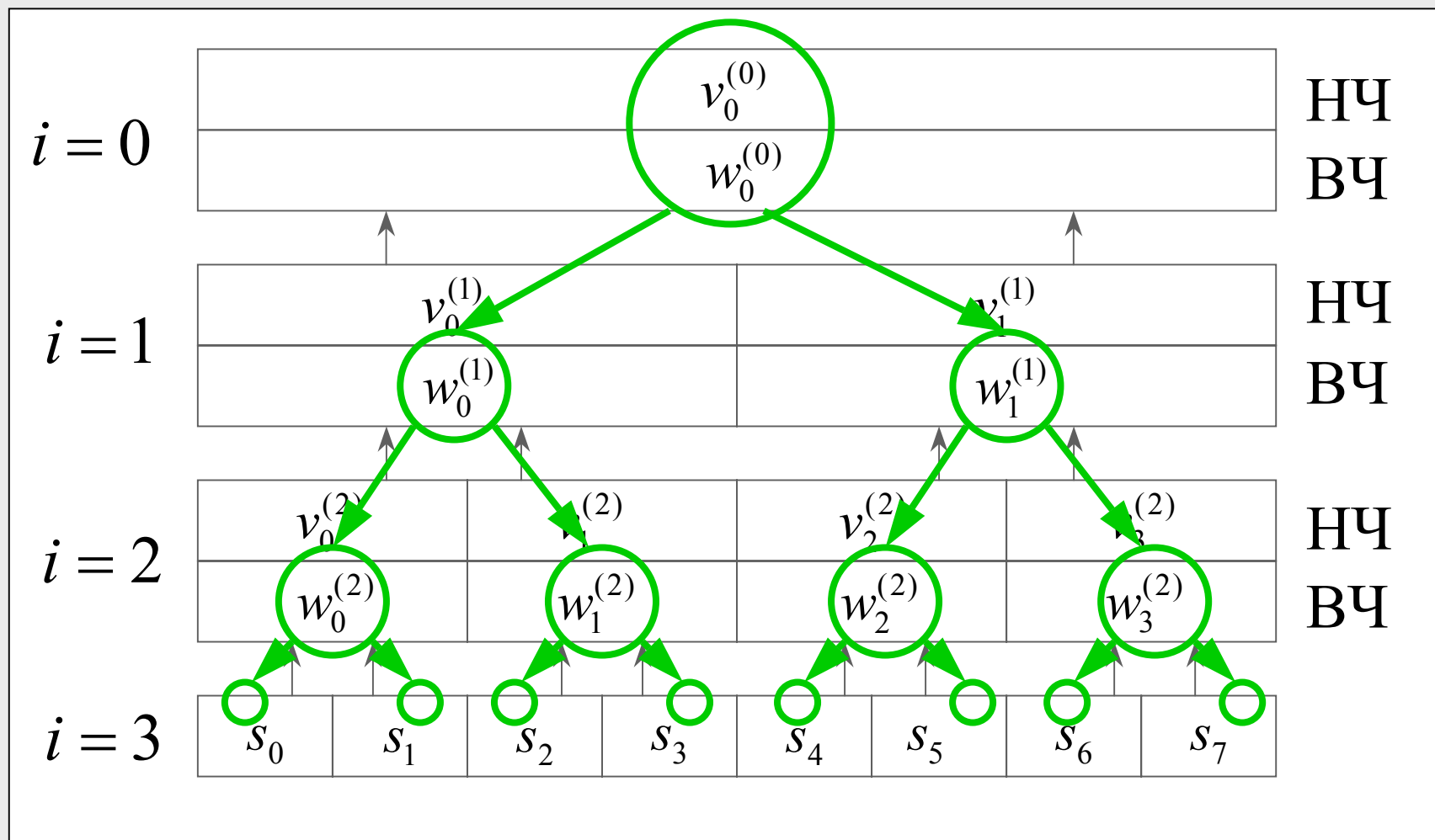
## Другие вейвлет-преобразования



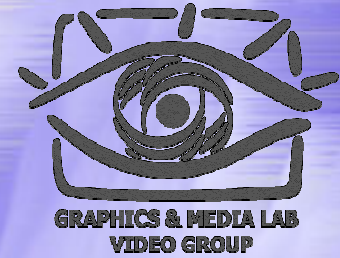
- ◆ Преобразование Хаара имеет ряд недостатков (в первую очередь «негладкость»)
- ◆ Необходимо искать преобразования, по структуре похожие на Хаара, но обладающие большей гладкостью



# Вейвлет-преобразование дискретных сигналов



# Свертка и фильтры



$$\mathbf{y} = \mathbf{x} * \mathbf{h} : \quad y_k = \sum_n h_n x_{k-n}$$

**x** -- ИСХОДНЫЙ СИГНАЛ,

**h** -- ядро свертки или  
*фильтр*

# Вейвлет-преобразование в общем виде



Прямое:

$$\mathbf{v}^{(i)} = \downarrow_2 \left[ \mathbf{v}^{(i+1)} * \tilde{\mathbf{h}} \right]$$
$$\mathbf{w}^{(i)} = \downarrow_2 \left[ \mathbf{v}^{(i+1)} * \tilde{\mathbf{g}} \right]$$

Обратное:

$$\mathbf{v}^{(i+1)} = \left[ \uparrow_2 \mathbf{v}^{(i)} \right] * \mathbf{h} + \left[ \uparrow_2 \mathbf{w}^{(i)} \right] * \mathbf{g}$$

Фильтры для преобразования Хаара:

$$\tilde{\mathbf{h}} = [0.5, 0.5], \quad \tilde{\mathbf{g}} = [-0.5, 0.5];$$
$$\mathbf{h} = [1, 1], \quad \mathbf{g} = [1, -1]$$

# Часть 2:



- ◆ Многомасштабный анализ
- ◆ Примеры вейвлетов
- ◆ Биортогональный МО
- ◆ Вейвлет-пакеты
- ◆ Лифтинг
- ◆ Целочисленное вейвлет-преобразование

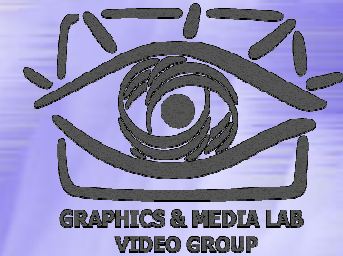
# Ортогональный многочасштабный анализ



## ◆ Последовательность замкнутых подпространств

1.  $V^{(i)} \subset V^{(i+1)}, \quad i \in \mathbf{Z};$        $\mathbf{V} = \{V^{(i)}\}_{i \in \mathbf{Z}} \subset \mathbf{L}_2(\mathbf{R}):$
2.  $\bigcup_{i \in \mathbf{Z}} V^{(i)}$  ПЛОТНО В  $\mathbf{L}_2(\mathbf{R});$
3.  $\bigcap_{i \in \mathbf{Z}} V^{(i)} = \emptyset;$
4.  $v(x) \in V^{(i)} \Leftrightarrow v(2x) \in V^{(i+1)}, \quad i \in \mathbf{Z};$
5.  $v(x) \in V^{(0)} \Leftrightarrow v(x-j) \in V^{(0)}, \quad i \in \mathbf{Z};$
6.  $\exists \varphi(x) \in V^{(0)}, \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dx \neq 0: \{\varphi(x-j)\}_{j \in \mathbf{Z}}$  ОНБ В  $V^{(0)}.$

# Свойства ОМА



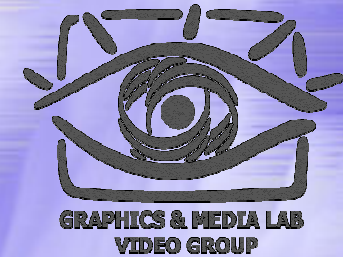
1.  $\exists \mathbf{h} = \{h_k\}_{k \in K \subset \mathbf{Z}} : \varphi(x) = \sqrt{2} \sum_{k \in K} h_k \varphi(2x - k);$

2.  $\forall i \in \mathbf{Z} \left\{ \varphi_j^{(i)}(x) \equiv \sqrt{2^i} \varphi(2^i x - j) \right\}_{j \in \mathbf{Z}}$  ОНБ в  $V^{(i)}$ ;

3. Если  $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dx = 1$ , то  $\mathbf{h}$  определяет  $\varphi(x)$

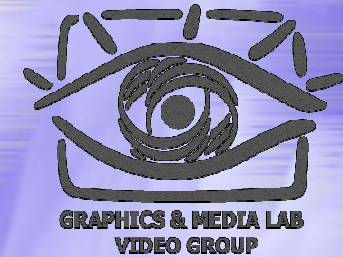
с точностью до мн – ва меры нуль.

# Детализирующие подпространства



1.  $\forall i \in \mathbf{Z} \quad \exists W^{(i)} : W^{(i)} \perp V^{(i)}, \quad V^{(i+1)} = V^{(i)} \oplus W^{(i)};$
2.  $\bigcup_{i \in \mathbf{Z}} W^{(i)} = \mathbf{L}_2(\mathbf{R});$
3.  $\exists \psi(x) \in W^{(0)} : \{\psi(x - j)\}_{j \in \mathbf{Z}}$  ОНБ в  $W^{(0)}$ .

# Свойства детализирующих подпространств



1.  $\exists \mathbf{g} = \{g_l\}_{l \in L \subset \mathbf{Z}} : \psi(x) = \sqrt{2} \sum_{l \in L} g_l \varphi(2x - l);$
2.  $\forall i \in \mathbf{Z} \left\{ \psi_j^{(i)}(x) \equiv \sqrt{2^i} \psi(2^i x - j) \right\}_{j \in \mathbf{Z}}$  ОНБ в  $W^{(i)}$ ;
3.  $\left\{ \psi_j^{(i)}(x) \right\}_{i, j \in \mathbf{Z}}$  ОНБ в  $L_2(\mathbf{R})$ ;
4. Если  $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dx = 1$ , то  $\mathbf{h}$  и  $\mathbf{g}$  определяет  $\psi(x)$

с точностью до мн – ва меры нуль.



ИТОГ:



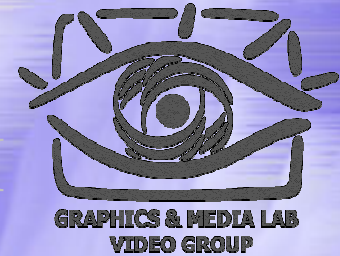
◆ Разложение сигнала по ОНБ в  $L_2(\mathbf{R})$

$$f(x) \sim \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} w_j^{(i)} \psi_j^{(i)}(x)$$

$$f(x) \sim \sum_{j=-\infty}^{+\infty} v_j^{(I)} \varphi_j^{(I)}(x) + \sum_{i=I}^{+\infty} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} w_j^{(i)} \psi_j^{(i)}(x), \quad I \in \mathbf{Z}.$$

◆ Базис имеет *иерархическую* структуру

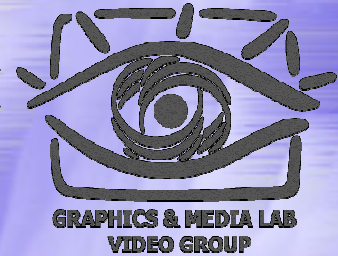
# Коэффициенты разложения



$$v_j^{(i)} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \varphi_j^{(i)}(x) dx,$$

$$w_j^{(i)} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \psi_j^{(i)}(x) dx.$$

# Соотношение между коэффициентами соседних уровней разрешения



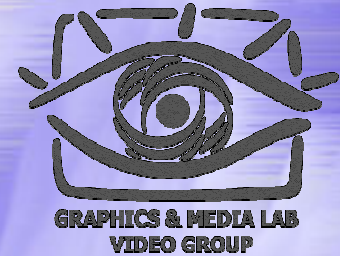
$$v_j^{(i)} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} v_{2j+k}^{(i+1)} h_k,$$

$$w_j^{(i)} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} v_{2j+k}^{(i+1)} g_k,$$

$$v_j^{(i+1)} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left( v_k^{(i)} h_{j-2k} + w_k^{(i)} g_{j-2k} \right),$$

$$i, j \in \mathbf{Z}.$$

# Субполосное преобразование



$$\begin{aligned}\mathbf{v}^{(i)} &= \downarrow_2 \left[ \mathbf{v}^{(i+1)} * \mathbf{h}^* \right], \\ \mathbf{w}^{(i)} &= \downarrow_2 \left[ \mathbf{v}^{(i+1)} * \mathbf{g}^* \right], \\ \mathbf{v}^{(i+1)} &= \uparrow_2 \left[ \mathbf{v}^{(i)} \right] * \mathbf{h} + \uparrow_2 \left[ \mathbf{w}^{(i)} \right] * \mathbf{g}, \\ i &\in \mathbf{Z}.\end{aligned}$$

# Примеры



Вейвлеты Хаара (нормализованные):

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, 1) \\ 0, & x \notin [0, 1) \end{cases}$$

$$\psi(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, 1/2) \\ -1, & x \in [1/2, 1) \\ 0, & x \notin [0, 1) \end{cases}$$

$$\mathbf{h} = \left[ \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right],$$

$$\mathbf{g} = \left[ -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right]$$

# Примеры (прод)



Добеши (Daubechies) D4:

$$\mathbf{h} = [h_0, h_1, h_2, h_3]$$

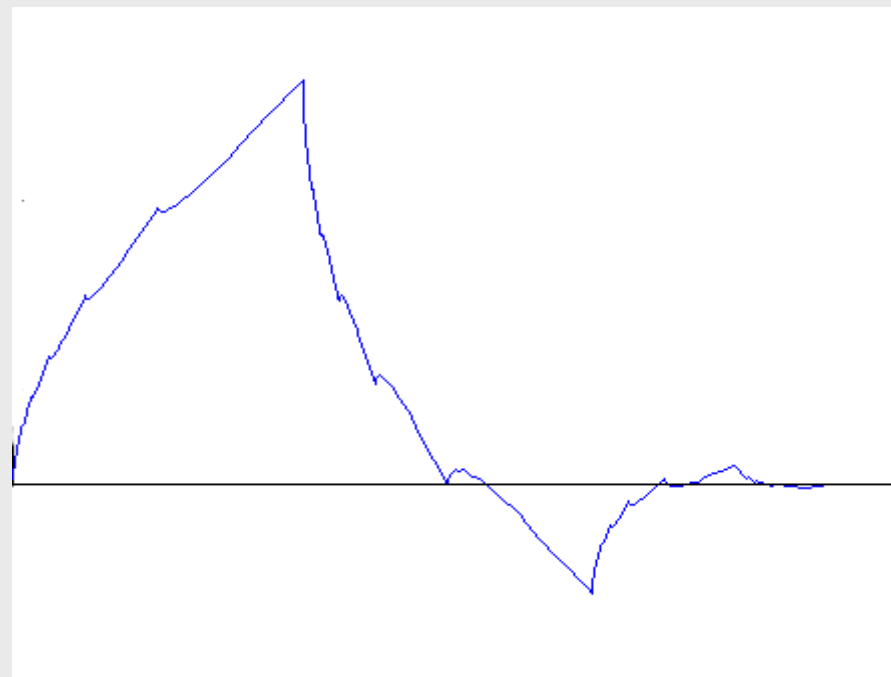
$$\mathbf{g} = [-h_3, h_2, -h_1, h_0]$$

$$h_0 = \frac{1 + \sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, h_1 = \frac{3 + \sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, h_2 = \frac{3 - \sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, h_3 = \frac{1 - \sqrt{3}}{4\sqrt{2}}$$

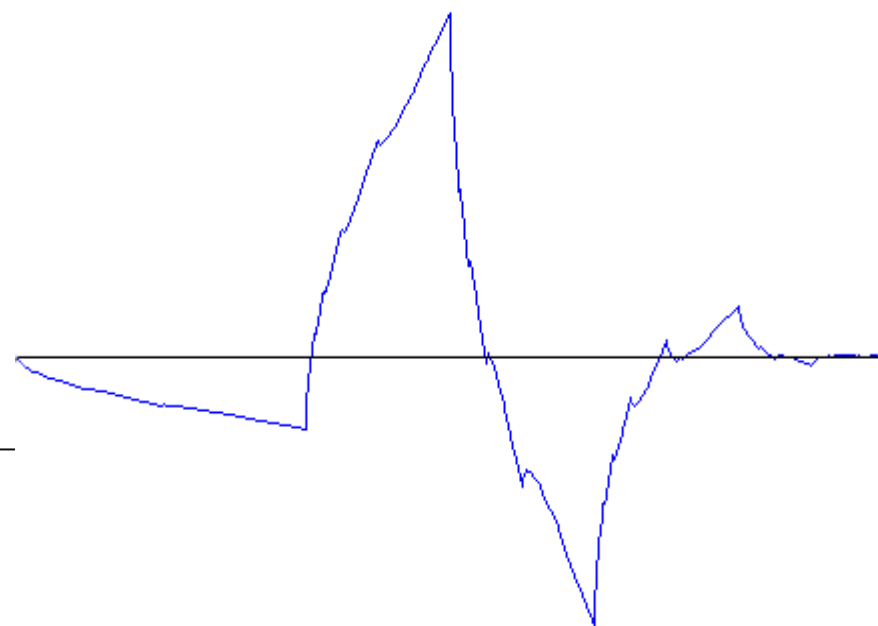
# Примеры (прод)



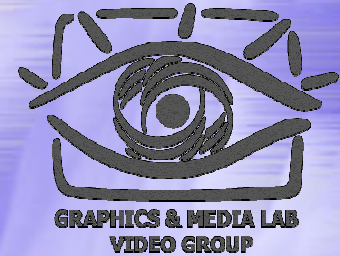
◆ Скейлинг-функция D4



◆ Вейвлет D4



# Характеристики вейвлетов



- ◆ Компактный носитель
- ◆ Симметричность (четная/нечетная)
- ◆ Количество нулевых моментов (важно при прямом преобразовании)
- ◆ Гладкость (важна при обратном преобразовании)



# Нулевой момент



- ◆ Ф-ция  $f(x)$ , имеет  $N$  нулевых моментов, если:

$$I_n[f] = 0, \quad n = 1, 2, \dots, N - 1; \quad I_N[f] \neq 0,$$

$$I_n[f] = \int_X x^n f(x) dx.$$

- ◆ Вейвлет должен иметь хотя бы один нулевой момент

# Ограничение ортогональности



- ◆ Не существует симметричных, гладких ортогональных вейвлетов с компактным носителем
  - Хаар: симметричный, к.н., 1 нул. мом., негладкий (разрывная ф-ция)
  - D4: к.н., 2 нул. мом., непрерывн., нигде не дифф., несимметр.

# Неортогональный многочасштабный анализ



...

$$6. \quad \exists \varphi(x) \in V^{(0)}, \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) dx \neq 0:$$

$\{\varphi(x - j)\}_{j \in \mathbb{Z}}$  базис Рисса в  $V^{(0)}$ .

# Базис Рисса



- ◆ Базис в гильбертовом пространстве:

$$\{e_i\} \subset X: \forall x \in X \exists! \{\alpha_i\}: x = \sum_i \alpha_i e_i,$$

$$\exists A, B, 0 < A \leq B: A \|x\|^2 \leq \sum_i |\alpha_i|^2 \leq B \|x\|^2$$

- ◆ ОНБ является базисом Рисса с  $A = B = 1$ .

# Биортогональные преобразования



$$\mathbf{V}, \mathbf{W}, \tilde{\mathbf{V}}, \tilde{\mathbf{W}}: \tilde{V}^{(0)} \perp W^{(0)}, V^{(0)} \perp \tilde{W}^{(0)}.$$

$$v_j^{(i)} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \tilde{\varphi}_j^{(i)}(x) dx, \quad w_j^{(i)} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \tilde{\psi}_j^{(i)}(x) dx.$$

$$v_j^{(i)} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} v_{2j+k}^{(i+1)} \tilde{h}_k, \quad w_j^{(i)} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} v_{2j+k}^{(i+1)} \tilde{g}_k, \quad i, j \in \mathbf{Z}.$$

Ф-лы обратного преобразования *не меняются*

# Субполосное биорт. преобразование



$$\begin{aligned}\mathbf{v}^{(i)} &= \downarrow_2 \left[ \mathbf{v}^{(i+1)} * \tilde{\mathbf{h}} \right], \\ \mathbf{w}^{(i)} &= \downarrow_2 \left[ \mathbf{v}^{(i+1)} * \tilde{\mathbf{g}} \right], \\ \mathbf{v}^{(i+1)} &= \uparrow_2 \left[ \mathbf{v}^{(i)} \right] * \mathbf{h} + \uparrow_2 \left[ \mathbf{w}^{(i)} \right] * \mathbf{g}, \\ i &\in \mathbf{Z}.\end{aligned}$$

# Примеры



Линейные сплайны:

$$\tilde{\mathbf{h}} = \sqrt{2} \left[ -\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8} \right],$$

$$\tilde{\mathbf{g}} = \sqrt{2} \left[ \frac{1}{4}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4} \right];$$

$$\mathbf{h} = \sqrt{2} \left[ \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4} \right],$$

$$\mathbf{g} = \sqrt{2} \left[ \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, -\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8} \right].$$

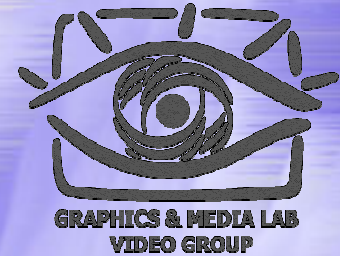
# Нормализация преобразований



- ◆ Преобразования, сохраняющие норму
- ◆ Преобразования, не сохраняющие норму (сохраняющие диапазон значений коэффициентов)



# Вейвлет-пакеты

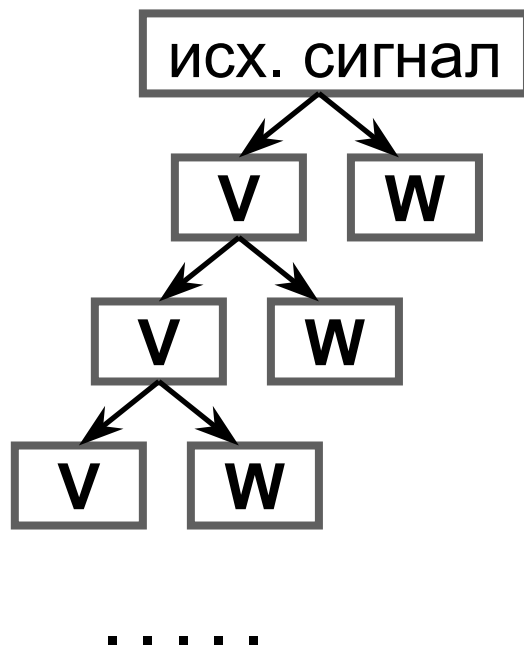


- ◆ Идея: к высокочастотным составляющим сигнала также применить ВП.

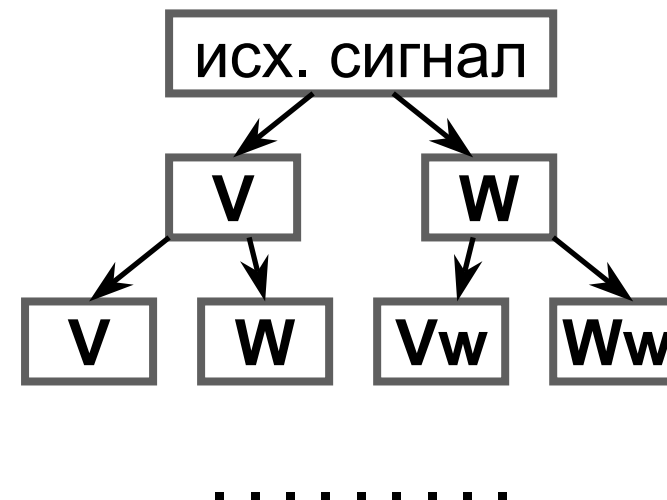
# Вейвлет-пакеты (прод.)



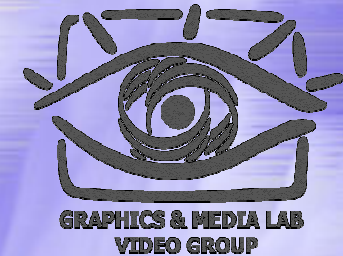
Обычное ВП



Вейвлет-пакеты



# Вейвлет-пакеты (прод.)



- ◆ Пример
  - Исходный сигнал: [1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15]
  - Преобразование Хаара
- ◆ Рез-т 1 шага обычного преобразования
  - НЧ: [2, 6, 10, 14]
  - ВЧ: [1, 1, 1, 1]
- ◆ Применение дополнительных 2-х шагов ВП к ВЧ-составляющей:
  - [1] [0] [0, 0]

# Вейвлет-пакеты (прод.)



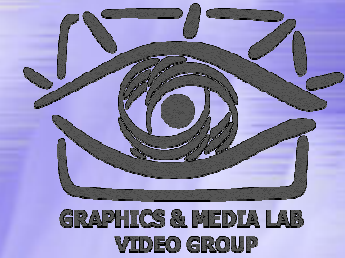
## ◆ Плюсы:

- позволяют улучшить результаты сжатия с «плохими» фильтрами
- позволяют искать оптимальную схему разложения

## ◆ Минусы:

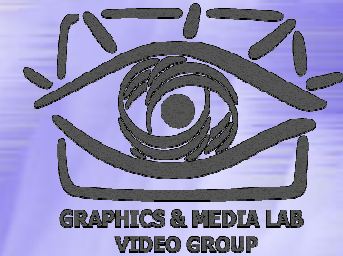
- требует большего времени для расчетов
- нужно либо запоминать схему, либо выполнять разложение по одной из predetermined схем

# Лифтинг



Идея: выполнять каждый шаг преобразования в несколько элементарных этапов, постепенно улучшая результат

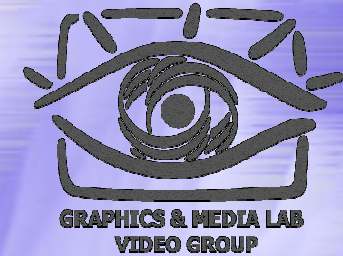
# Лифтинг (прод.)



$$\begin{aligned}
 \mathbf{v}^{(i,0)} &= \downarrow_2^{even} [\mathbf{v}^{(i+1)}] \\
 \mathbf{w}^{(i,0)} &= \downarrow_2^{odd} [\mathbf{v}^{(i+1)}] \\
 \mathbf{w}^{(i,1)} &= \mathbf{w}^{(i,0)} + \mathbf{v}^{(i,0)} * \mathbf{h}^{(1)} \\
 \mathbf{v}^{(i,1)} &= \mathbf{v}^{(i,0)} + \mathbf{w}^{(i,1)} * \mathbf{g}^{(1)} \\
 \mathbf{w}^{(i,2)} &= \mathbf{w}^{(i,1)} + \mathbf{v}^{(i,1)} * \mathbf{h}^{(2)} \\
 \mathbf{v}^{(i,2)} &= \mathbf{v}^{(i,1)} + \mathbf{w}^{(i,2)} * \mathbf{g}^{(2)} \\
 &\dots \\
 \mathbf{w}^{(i,K)} &= \mathbf{w}^{(i,K-1)} + \mathbf{v}^{(i,K-1)} * \mathbf{h}^{(K)} \\
 \mathbf{v}^{(i,K)} &= \mathbf{v}^{(i,K-1)} + \mathbf{w}^{(i,K)} * \mathbf{g}^{(K)} \\
 \mathbf{w}^{(i)} &= C_w \mathbf{w}^{(i,K)} \\
 \mathbf{v}^{(i)} &= C_v \mathbf{v}^{(i,K)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{v}^{(i+1)} &= \uparrow_2^{even} [\mathbf{v}^{(i,0)}] + \uparrow_2^{odd} [\mathbf{w}^{(i,0)}] \\
 \mathbf{w}^{(i,0)} &= \mathbf{w}^{(i,1)} - \mathbf{v}^{(i,0)} * \mathbf{h}^{(1)}, \\
 \mathbf{v}^{(i,0)} &= \mathbf{v}^{(i,1)} - \mathbf{w}^{(i,1)} * \mathbf{g}^{(1)}, \\
 \mathbf{w}^{(i,1)} &= \mathbf{w}^{(i,2)} - \mathbf{v}^{(i,1)} * \mathbf{h}^{(2)} \\
 \mathbf{v}^{(i,1)} &= \mathbf{v}^{(i,2)} - \mathbf{w}^{(i,2)} * \mathbf{g}^{(2)} \\
 &\dots \\
 \mathbf{w}^{(i,K-1)} &= \mathbf{w}^{(i,K)} - \mathbf{v}^{(i,K-1)} * \mathbf{h}^{(K)} \\
 \mathbf{v}^{(i,K-1)} &= \mathbf{v}^{(i,K)} - \mathbf{w}^{(i,K)} * \mathbf{g}^{(K)} \\
 \mathbf{w}^{(i,K)} &= \mathbf{w}^{(i)} / C_w \\
 \mathbf{v}^{(i,K)} &= \mathbf{v}^{(i)} / C_v
 \end{aligned}$$

# Лифтинг (примеры)



## Хаар (ненормализ.)

$$v_j^{(i,0)} = v_{2j}^{(i+1)},$$

$$w_j^{(i,0)} = v_{2j+1}^{(i+1)}$$

$$w_j^{(i,1)} = w_j^{(i,0)} - v_j^{(i,0)}$$

$$v_j^{(i,1)} = v_j^{(i,0)} + 0.5w_j^{(i,1)}$$

$$w_j^{(i)} = 0.5w_j^{(i,1)}$$

$$v_j^{(i)} = v_j^{(i,1)}$$

## $D_4$

$$v_j^{(i,0)} = v_{2j}^{(i+1)}, w_j^{(i,0)} = v_{2j+1}^{(i+1)}$$

$$w_j^{(i,1)} = w_j^{(i,0)} - \sqrt{3}v_j^{(i,0)}$$

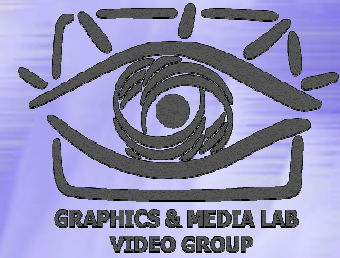
$$v_j^{(i,1)} = v_j^{(i,0)} + \frac{\sqrt{3}}{4}w_j^{(i,1)} + \frac{\sqrt{3}-2}{4}w_{j+1}^{(i,1)}$$

$$w_j^{(i,2)} = w_j^{(i,1)} + v_j^{(i,1)}$$

$$v_j^{(i)} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}v_j^{(i,1)}$$

$$w_j^{(i)} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}w_j^{(i,2)}$$

# Лифтинг (прод.)



- ◆ Гарантированное восстановление
- ◆ Создание новых вейвлет-подобных преобразований
- ◆ Снижение вычислительной сложности (до 50%)
- ◆ Реализация целочисленного ВП

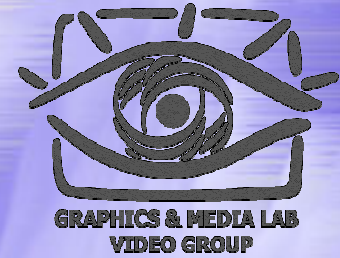


# Целочисленное ВП



- ◆ Обычное ВП теоретически обратимо. На практике 100%-ного восстановления сигнала может не произойти из-за ошибок округления
- ◆ Проблему могло бы решить преобразование, которое для целочисленных сигналов вычисляло бы целочисленные коэффициенты

# Целочисленное ВП (прод.)



$$\begin{aligned} \mathbf{v}^{(i,0)} &= \downarrow_2^{even} \left[ \mathbf{v}^{(i+1)} \right] \\ \mathbf{w}^{(i,0)} &= \downarrow_2^{odd} \left[ \mathbf{v}^{(i+1)} \right] \\ \mathbf{w}^{(i,1)} &= \mathbf{w}^{(i,0)} + \text{int} \left[ \mathbf{v}^{(i,0)} * \mathbf{h}^{(1)} \right] \\ \mathbf{v}^{(i,1)} &= \mathbf{v}^{(i,0)} + \text{int} \left[ \mathbf{w}^{(i,1)} * \mathbf{g}^{(1)} \right] \\ \mathbf{w}^{(i,2)} &= \mathbf{w}^{(i,1)} + \text{int} \left[ \mathbf{v}^{(i,1)} * \mathbf{h}^{(2)} \right] \\ \mathbf{v}^{(i,2)} &= \mathbf{v}^{(i,1)} + \text{int} \left[ \mathbf{w}^{(i,2)} * \mathbf{g}^{(2)} \right] \\ &\dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^{(i+1)} &= \uparrow_2^{even} \left[ \mathbf{v}^{(i,0)} \right] + \uparrow_2^{odd} \left[ \mathbf{w}^{(i,0)} \right] \\ \mathbf{w}^{(i,0)} &= \mathbf{w}^{(i,1)} - \text{int} \left[ \mathbf{v}^{(i,0)} * \mathbf{h}^{(1)} \right] \\ \mathbf{v}^{(i,0)} &= \mathbf{v}^{(i,1)} - \text{int} \left[ \mathbf{w}^{(i,1)} * \mathbf{g}^{(1)} \right] \\ \mathbf{w}^{(i,1)} &= \mathbf{w}^{(i,2)} - \text{int} \left[ \mathbf{v}^{(i,1)} * \mathbf{h}^{(2)} \right] \\ \mathbf{v}^{(i,1)} &= \mathbf{v}^{(i,2)} - \text{int} \left[ \mathbf{w}^{(i,2)} * \mathbf{g}^{(2)} \right] \\ &\dots \end{aligned}$$



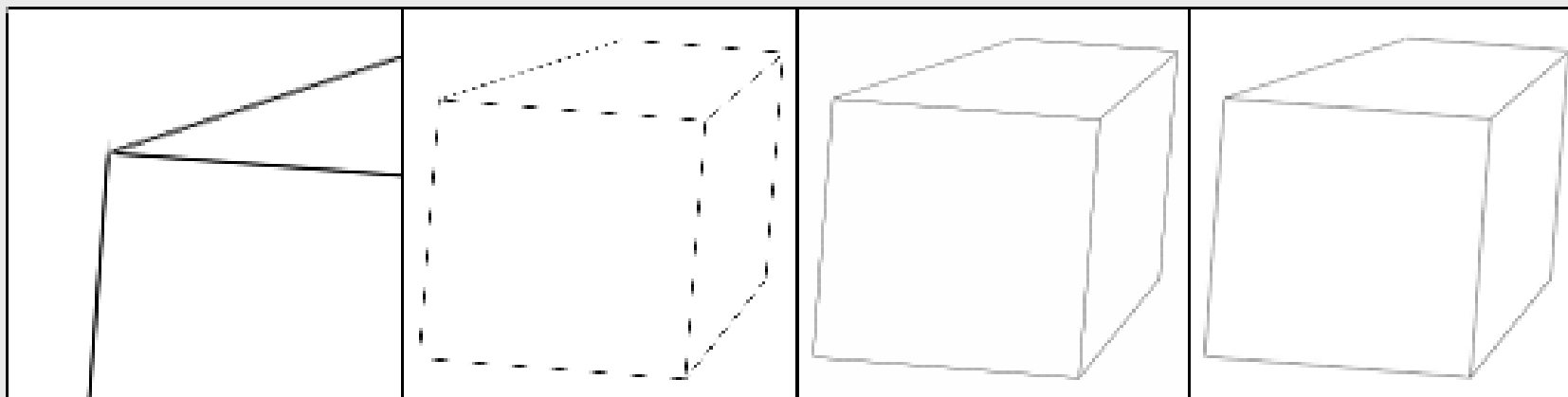
# Применение вейвлетов в компьютерной графике и обработке изображений

---

# Обработка растровых изображений

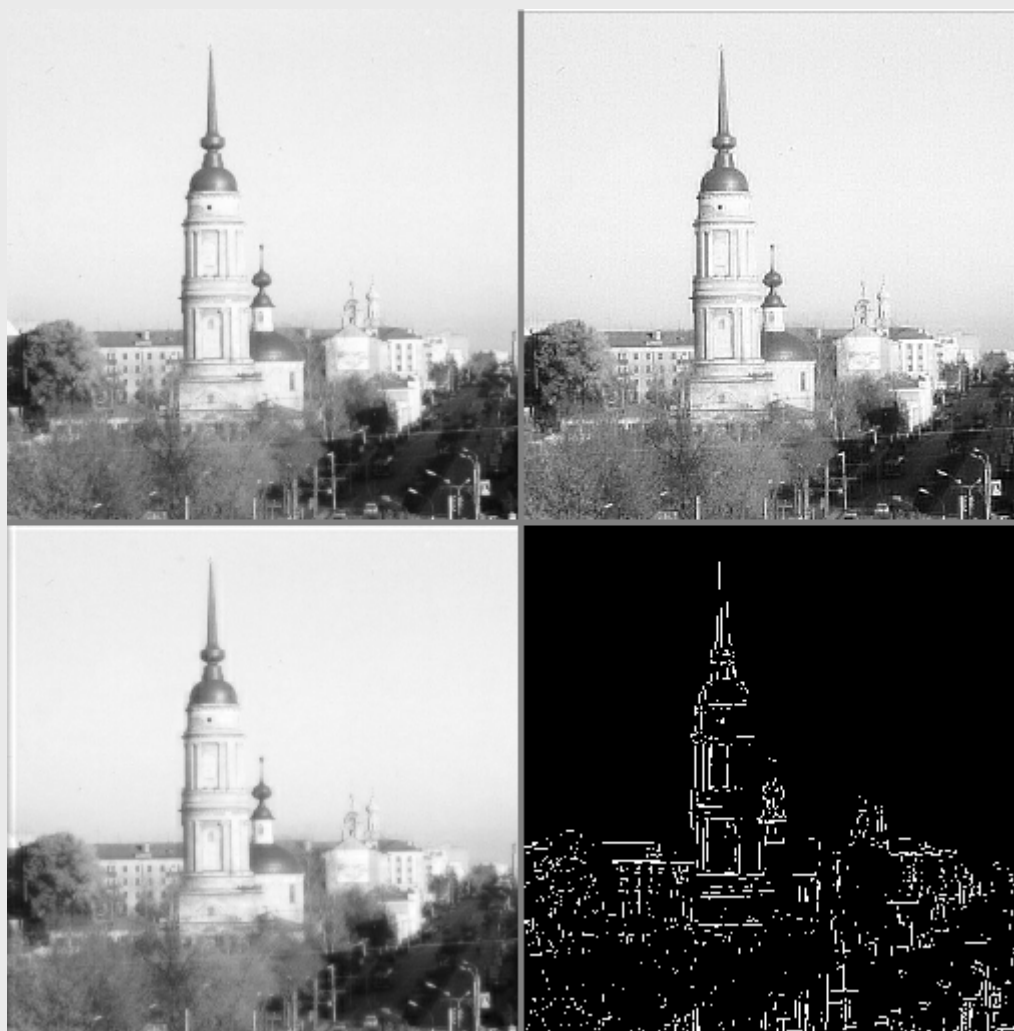


# Масштабирование



Исходное изображение уменьшили в 4  
раза простым прореживанием, с  
помощью преобразования Хаара, с  
помощью преобразования Добеши D4.

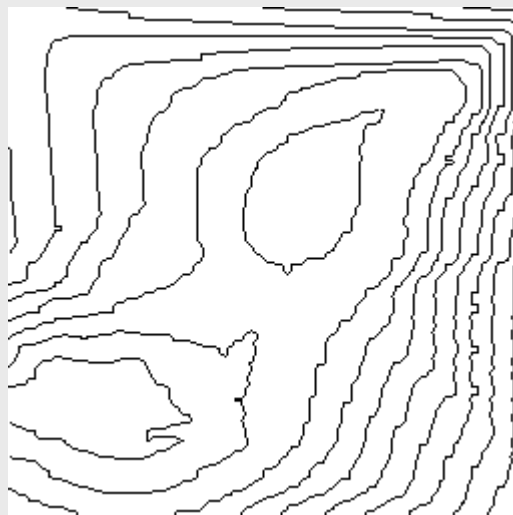
# Изменение четкости, выделение перепадов...



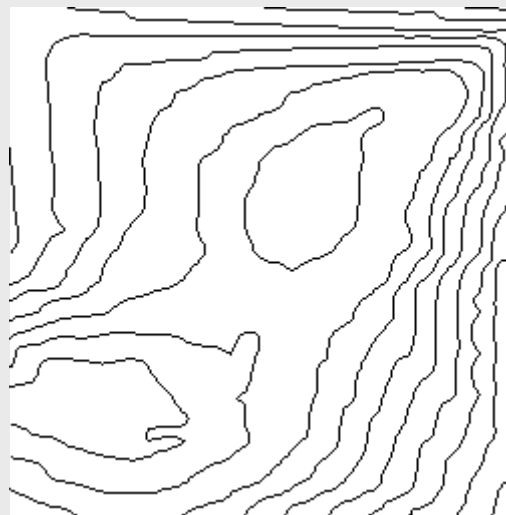
# Локальная обработка



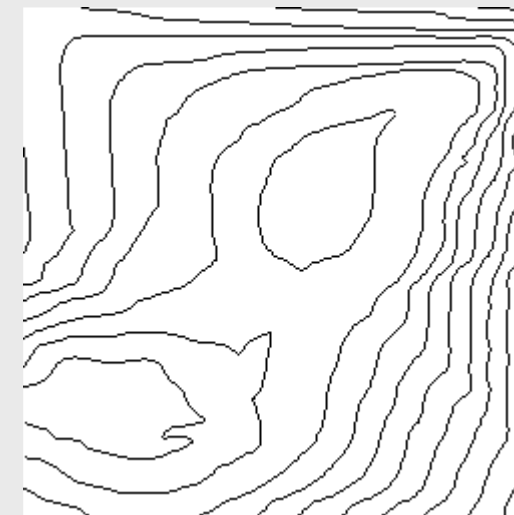
# Обработка кривых



без  
сглаживания



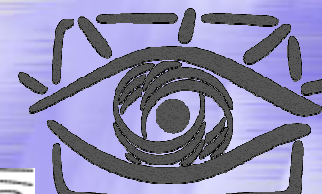
2 шага,  
осн. фильтр



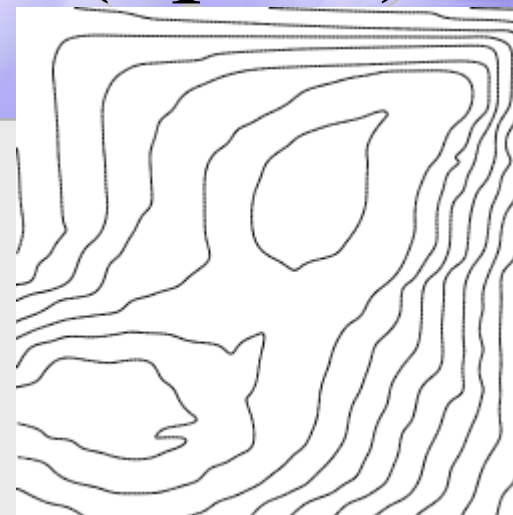
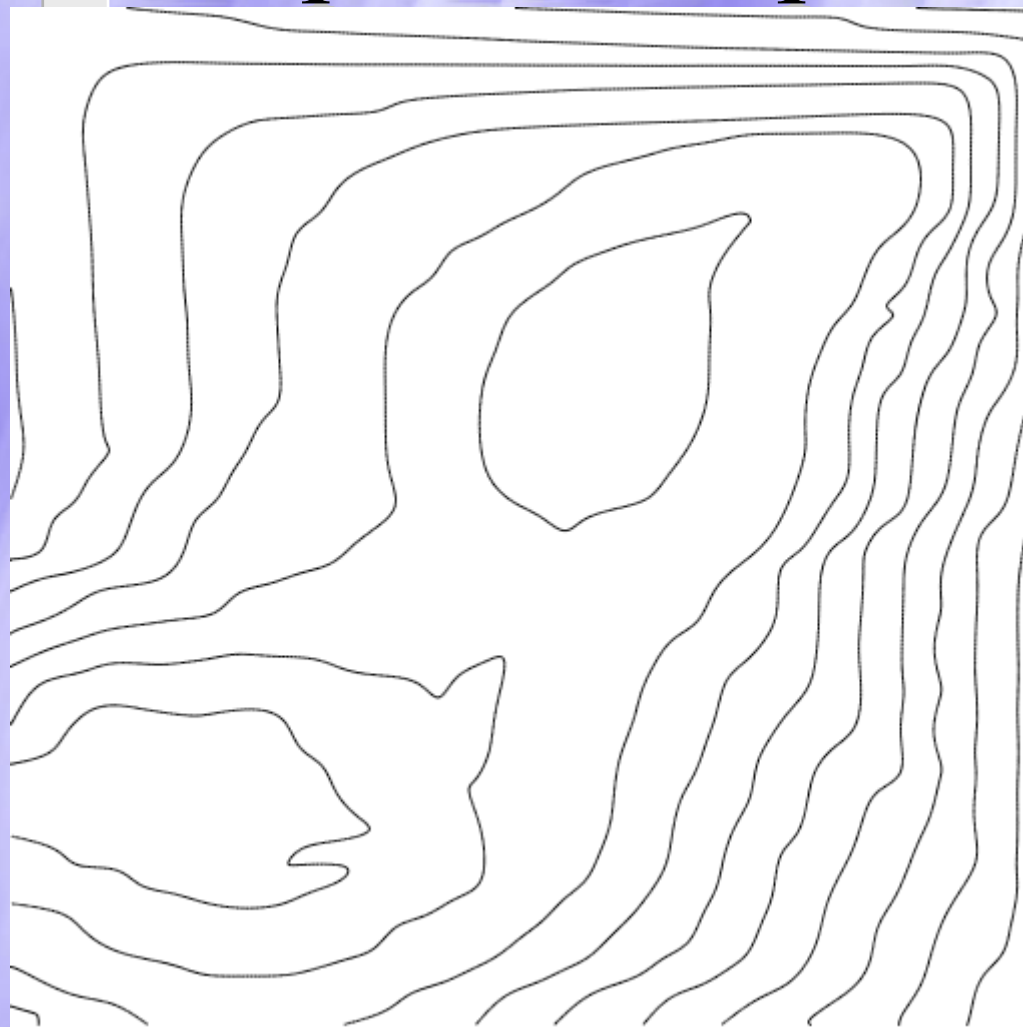
2 шага,  
доп. фильтр



# Обработка кривых (прод.)



GRAPHICS & MEDIA LAB  
VIDEO GROUP



попиксельное построение с антиалиасингом, масштабирование

# Вопросы?

