Actividade 2 - 14.01.2006 - Grupo 13/15 anos

PAR OU ÍMPAR

PROBLEMA 1

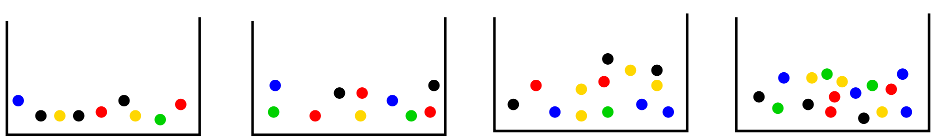
Um número diz-se super-ímpar se o produto dos seus algarismos for um número ímpar. Quantos são os números super-ímpares com três algarismos?

PROBLEMA 2

Nas casas de um tabuleiro 5 x 5 vivem vinte e cinco pessoas invejosas. Cada pessoa inveja os vizinhos que vivem nas casas com uma aresta comum à sua. Será possível que todos troquem de casa de modo que cada um fique a morar numa casa que inveja?

PROBLEMA 3

O Adérito tem quatro caixas, uma com 9 berlindes, outra com 10 berlindes, outra com 13 berlindes e a última com 16 berlindes. Ao escolher três das caixas, o Adérito retira um berlinde de cada uma delas e coloca estes três berlindes na caixa restante.



Apenas repetindo esta operação, conseguirá o Adérito ficar com 12 berlindes em cada caixa?

PROBLEMA 4

A Anita escreve os números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e 10 num quadro e efectua a seguinte operação nove vezes: escolhe ao acaso dois números do quadro, apaga-os e escreve a diferença entre eles. Verifica que no final ela obtém sempre um número ímpar.

PROBLEMA 5

O único marciano sobrevivente conta que em Marte apenas existiam 20 marcianos amarelos, 21 azuis e 22 verdes. Quando dois marcianos de cores distintas se encontravam, fundiam-se transformando-se num só marciano com a cor distinta da deles. Qual é a cor do marciano sobrevivente?

PROBLEMA 1

Um produto de números inteiros é ímpar se todos os seus factores forem números ímpares. Assim, um número é super-ímpar se todos os seus algarismos forem ímpares. Logo, os algarismos de um número super-ímpar podem ser 1, 3, 5, 7 ou 9 e, portanto, existem $5 \times 5 \times 5 = 125$ números super-ímpares com três algarismos.

AGORA PARA PENSAR: Quantos números super-ímpares com 2006 algarismos existem?

PROBLEMA 2

Considerem-se as casas do tabuleiro pintadas de preto e branco, como num tabuleiro de xadrez. Um habitante de uma casa preta inveja vizinhos que vivem em casas brancas e um habitante de uma casa branca inveja vizinhos que vivem em casas pretas. Passar a morar numa casa invejada significa trocar de cor de casa. Assim, se todos passassem a morar numa casa invejada, todos teriam que mudar de cor de casa. Mas isso é impossível, pois o tabuleiro tem um número ímpar de casas e, portanto, existe mais uma casa de uma cor que de outra.

PROBLEMA 3

Em cada passo, denomine-se por Pares as caixas com um número par de berlindes e por Ímpares as caixas com um número ímpar de berlindes. O Adérito começa com duas caixas Pares e com duas caixas Ímpares. Ao retirar um berlinde de cada uma das caixas seleccionadas, o Adérito muda a paridade dessas caixas. Ao colocar os três berlindes na caixa restante, o Adérito também muda a paridade desta caixa.

Assim, o Adérito tem sempre duas caixas Pares e duas caixas Ímpares ao longo de todo o processo. Portanto, o Adérito nunca conseguirá ficar com 12 berlindes em cada caixa.

PROBLEMA 4

No início a Anita tem 5 números ímpares escritos no quadro: 1, 3, 5, 7 e 9. Em cada passo, a Anita apaga dois números e escreve no quadro a sua diferença. Se os dois números são ímpares, a diferença é um número par e por isso, no quadro, aparecerão menos dois números ímpares. Se os números apagados são pares, a diferença entre eles é um número par e, no quadro, aparecerá o mesmo número de números ímpares. Se um deles for par e outro ímpar, a diferença é ímpar e o número de ímpares mantém-se o mesmo. Assim, ao fim de cada passo, ou o conjunto dos números ímpares se mantém ou lhe são retirados dois elementos.

Como a Anita começa com 5 números ímpares, ela terá sempre um número ímpar de números ímpares escritos no quadro. Portanto, no final, quando lhe restar apenas um número, este terá que ser ímpar.

PROBLEMA 5

Inicialmente, o número de marcianos amarelos e verdes é par e o número de marcianos azuis é ímpar. Sempre que dois marcianos se encontram, muda a paridade do número de marcianos de cada um das três cores. Assim, a paridade do número de marcianos amarelos é sempre igual à paridade do número de marcianos verdes, mas distinta da paridade do número de marcianos azuis. Deste modo, o marciano sobrevivente não pode ser amarelo nem verde e, portanto, é azul.