Далее, (см. (39), (40)),

$$\sum_{T\leqslant t_{2\nu}(\tau)\leqslant T+H} Z[t_{2\nu}(\tau)] = \sum_{T\leqslant t_{2\nu}\leqslant T+H} Z[t_{2\nu}(\tau)]+O(T^{1/6}\ln T). \tag{53}$$

Наконец, интегрируя первое соотношение в (41) (после преобразования (53)), по τ в промежутке $\langle -x, x\rangle$, получаем первое соотношение в (5), и, аналогичным способом — второе.

Литература

[1] Ян Мозер, *Об одной сумме в теории дзета-функции Римана*, Acta Arith. 31 (1976), стр. 31–43.

[2] — *Об одной теореме Харди–Литтлвуда в теории дзета-функции Римана*, ibid. 31 (1976), стр. 45–51.

[3] — *О поведении функций* $\mathrm{Re}\{\zeta(s)\}$, $\mathrm{Im}\{\zeta(s)\}$ *в критической полосе*, ibid. 34 (1977), стр. 25–35.

[4] — *Добавление к работе: Об одной теореме Харди–Литтлвуда в теории дзета--функции Римана*, ibid. 35 (1979), стр. 403–404.

[5] — *О корнях уравнения* $Z'(t) = 0$, ibid. 40 (1981), стр. 79–89.

[6] — *Исправление к работам*: Acta Arith. 31 (1976), стр. 31–43; 31 (1976), стр. 45–51; 35 (1979), стр. 403–404, ibid. 40 (1981), стр. 97–107.

[7] Е. К. Титчмарш, *Теория дзета-функции Римана*, Москва 1953.

[8] R. Balasubramanian, *An improvement of a theorem of Titchmarsh on mean square of* $|\zeta(\frac{1}{2}+it)|$, Proc. London Math. Soc. (3) 36 (1978), стр. 540–576.

[9] G. H. Hardy and J. E. Littlewood, *Contributions to the theory of the Riemann zeta-function and the theory of distribution of primes*, Acta Math. 41 (1918), стр. 119–196.

[10] E. Landau, *Über die Hardysche Entdeckung unendlich vieler Nullstellen der Zetafunktion mit reellen Teil* 1/2, Math. Ann. 76 (1915), стр. 212–243.

[11] C. L. Siegel, *Über Riemann's Nachlass zur analytischen Zahlentheorie*: Quellen und Studien zur Geschichte der Math. Astr. und Physik, Abteilung B: Studien, 2 (1932), стр. 45–80.

[12] E. C. Titchmarsh, *On van der Corput's method and the Zeta-function of Riemann*, *IV*, Quart. J. Math. 5 (1934), стр. 98–105.

Поступило 24.1.1980 (1196)

ACTA ARITHMETICA
XLII (1982)

Darstellung natürlicher Zahlen als Summe von Quadraten

von

Franz Halter-Koch (Graz)

Die Sätze über die Darstellbarkeit natürlicher Zahlen als Summe von Quadraten gehören zu den schönsten und ältesten Resultaten der elementaren Zahlentheorie (siehe [3]). In der vorliegenden Arbeit untersuche ich die Darstellbarkeit natürlicher Zahlen als Summe von

(a) positiven Quadraten;

(b) verschiedenen Quadraten;

(c) verschiedenen positiven Quadraten.

Einzelresultate zu diesen Themenkreisen sind seit langem bekannt, ich werde aber der Vollständigkeit halber alle Ergebnisse formulieren. Die Beweismethoden sind elementar und auch auf die Darstellung natürlicher Zahlen durch andere quadratische Formen anwendbar; ich werde das an zwei Beispielen demonstrieren. Abschließend diskutiere ich einige asymptotische Resultate im Anschluß an die Ergebnisse von Malyshev, welchen sich die angegebenen expliziten Resultate der Struktur nach unterordnen.

1. Summen von drei Quadraten. Bekanntlich ist eine natürliche Zahl genau dann Summe von drei Quadraten, wenn sie nicht von der Form $4^h u$ mit $u \equiv 7 \bmod 8$ ist. Das Problem der Darstellung natürlicher Zahlen als Summe von drei positiven Quadraten wurde etwa gleichzeitig von verschiedenen Autoren behandelt ([22], [18], [8], [7], [1]). Ich schließe hier an die Untersuchungen von A. Schinzel [22] an, der auch die Darstellung als Summe von drei verschiedenen Quadraten untersuchte. Sei $r_s(n)$ die Anzahl der $(a_1, \ldots, a_s) \in \boldsymbol{Z}^s$ mit $(a_1, \ldots, a_s) = 1$ und $n = \sum_{i=1}^{s} a_i^2$; dann gilt:

$$r_2(n) = \begin{cases} 0, & \text{falls } 4|n \text{ oder } p|n \text{ für eine Primzahl } p \equiv 3 \bmod 4,\\ 2^{\mu+2} & \text{sonst;}\end{cases}$$

$$r_3(n) = \begin{cases} 0, & \text{falls } n \equiv 0, 4, 7 \bmod 8,\\ 3\cdot 2^{\mu+2} h_0(-4n), & \text{falls } n \equiv 1, 2, 5, 6 \bmod 8,\ n \neq 1,\\ 3\cdot 2^{\mu+2} h_0(-n), & \text{falls } n \equiv 3 \bmod 8,\ n \neq 3;\end{cases}$$

dabei ist $\mu = \mu(n)$ die Anzahl der ungeraden Primteiler von n und $h_0(-D)$ ($D > 0$, $D \equiv 0$ oder $3 \bmod 4$) die Anzahl der Klassen primitiver positiv definiter binärer quadratischer Formen der Diskriminante $-D$ im Hauptgeschlecht. Bezeichnet man mit $h(-D)$ die Anzahl aller Klassen primitiver positiv definiter binärer quadratischer Formen der Diskriminante $-D$, so gilt die Dirichlet'sche Klassenzahlformel

$$h(-D) = \frac{w\sqrt{D}}{2} \cdot L_D(1)$$

mit

$$w = \begin{cases} 6, & \text{falls } D = 3, \\ 4, & \text{falls } D = 4, \\ 2 & \text{sonst} \end{cases}$$

und

$$L_D(1) = \sum_{n=1}^{\infty}{}' \left(\frac{-D}{n}\right) \cdot \frac{1}{n} = \prod_p \left\{1 - \left(\frac{-D}{p}\right) \cdot \frac{1}{p}\right\}^{-1}.$$

Ferner ist

$$h(-D) = h_0(-D) \cdot \begin{cases} 2^{\lambda-2}, & \text{falls } D \equiv 12 \bmod 16, \\ 2^{\lambda}, & \text{falls } D \equiv 0 \bmod 32, \\ 2^{\lambda-1} & \text{sonst,} \end{cases}$$

wobei λ die Anzahl der Primteiler von D bezeichnet. Sei nun noch $r_2'(n)$ die Anzahl der $(a, b) \in \boldsymbol{Z}^2$ mit $(a, b) = 1$ und $n = a^2 + 2b^2$; dann ist

$$r_2'(n) = \begin{cases} 0, & \text{falls } 4 | n \text{ oder } p | n \text{ für eine} \\ & \text{Primzahl } p \equiv 5 \text{ oder } 7 \bmod 8, \\ 2^{\mu+1} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Genau dann ist $n \in \boldsymbol{N}$ darstellbar als Summe von drei positiven bzw. verschiedenen bzw. verschiedenen positiven teilerfremden Quadraten, wenn $r_3(n) - 3r_2(n) > 0$ bzw. $r_3(n) - 6r_2'(n) > 0$ bzw. $r_3(n) - 3r_2(n) - -6r_2'(n) > 0$. Wertet man diese Formeln aus, so erhält man:

Satz 1. *Sei $n \in \boldsymbol{N}$, $n \not\equiv 0, 4, 7 \bmod 8$ und*

$$h_0^*(n) = \begin{cases} h_0(-4n), & \text{falls } n \not\equiv 3 \bmod 8, \\ h_0(-n), & \text{falls } n \equiv 3 \bmod 8. \end{cases}$$

(a) *Genau dann ist n Summe von drei positiven teilerfremden Quadraten, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:*

(i) *n hat einen Primteiler $p \equiv 3 \bmod 4$;*

(ii) $h_0^*(n) > 1$.

(b) *Genau dann ist n Summe von drei verschiedenen teilerfremden Quadraten, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:*

(i) *n hat einen Primteiler $p \equiv 5$ oder $7 \bmod 8$;*

(ii) $h_0^*(n) > 1$.

(c) *Genau dann ist n Summe von drei verschiedenen positiven teilerfremden Quadraten, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:*

(i) *n hat einen Primteiler $p \equiv 7 \bmod 8$;*

(ii) *n hat einen Primteiler $p_1 \equiv 3 \bmod 8$ und einen Primteiler $p_2 \equiv 5 \bmod 8$;*

(iii) *n hat einen Primteiler p mit $p \equiv 3$ oder $5 \bmod 8$ und $h_0^*(n) > 1$;*

(iv) *für alle ungeraden Primteiler p von n ist $p \equiv 1 \bmod 8$ und $h_0^*(n) > 2$.*

(a) und (b) stehen schon in [22], (c) findet man auch in [15].

Um aus Satz 2 auch Aussagen über nicht-primitive Darstellungen herzuleiten, benötigt man genauere Kenntnisse über die Diskriminanten $-D$ mit $h_0(-D) = 1$. Der folgende Satz faßt die Resultate von F. Grube [9] und N. A. Hall [10] (für einen einheitlichen Beweis siehe [7], beachte jedoch die fehlerhaften Formulierungen dortselbst) sowie P. J. Weinberger [26] zusammen:

Satz 2. (a) *Sei $D > 0$, $D \equiv 0$ oder $3 \bmod 4$, $-D$ keine Fundamentaldiskriminante* (1) *und $h_0(-D) = 1$; dann ist entweder $D = 4D_0$ mit einer Fundamentaldiskriminante $-D_0 \equiv 0 \bmod 8$ und $h_0(-D_0) = 1$, oder $D \in \{12,$ $16, 27, 28, 36, 48, 60, 64, 72, 75, 99, 100, 112, 147, 180, 192, 240, 288,$ $315, 448, 960\}$.*

(b) *Außer den bei Dickson* ([4], § 55) *aufgeführten* 101 *Diskriminanten $-D$ mit $h_0(-D) = 1$ gibt es keine weiteren mit $D \leqslant 2 \cdot 10^{11}$.*

(c) *Es gibt höchstens eine Fundamentaldiskriminante $-D$ mit $h_0(-D)$ $= 1$ und $D > 2 \cdot 10^{11}$.*

Korollar 1. *Sei $n \in \boldsymbol{N}$, $n \not\equiv 0, 4, 7 \bmod 8$.*

(a) *Ist $n = ms^2$ mit $s > 1$ und $n \notin \{9, 18, 25, 27, 99\}$, so ist n Summe von drei verschiedenen positiven teilerfremden Quadraten.*

(b) *Genau dann ist n nicht Summe von drei positiven teilerfremden Quadraten, wenn $n \in \{1, 2, 5, 10, 13, 25, 37, 58, 85, 130, ?\}$* (2) *mit $? \geqslant 5 \times$ $\times 10^{10}$.*

(c) *Genau dann ist n nicht Summe von drei verschiedenen teilerfremden Quadraten, wenn $n \in \{1, 2, 3, 6, 9, 11, 18, 19, 22, 27, 33, 43, 51, 57, 67, 99,$ $102, 123, 163, 177, 187, 267, 627, ?\}$ mit $? \geqslant 5 \cdot 10^{10}$.*

Beweis. Die Beweise ergeben sich unmittelbar aus den Sätzen 1 und 2 und der für alle $d > 0$, $d \equiv 0$ oder $3 \bmod 4$ und alle ungeraden

(1) d heißt *Fundamentaldiskriminante*, wenn d nicht in der Form $d = m^2 d_0$ mit $m > 1$ und einer Diskriminante d_0 geschrieben werden kann.

(2) Mit ? bezeichne ich im folgenden stets eine Zahl, deren Existenz nicht gesichert ist.

Primzahlen q gültigen Formel

$$h_0(-dq^2) = h_0(-d)\cdot\begin{cases}1, & \text{falls } d = q = 3,\\ q, & \text{falls } q|d, \text{ aber } (d, q) \neq (3, 3),\\ \dfrac{1}{w}\cdot\left[q-\left(\dfrac{-d}{q}\right)\right] & \text{sonst,}\end{cases}$$

welche man leicht aus der analytischen Klassenzahlformel folgert. (a) verallgemeinert ein klassisches Resultat von Hurwitz [12]; siehe auch [19], Theorem 1, und [22].

KOROLLAR 2. *Genau dann ist $n \in \boldsymbol{N}$ Summe von drei positiven bzw. verschiedenen bzw. verschiedenen positiven Quadraten, wenn $n = 4^h u$ mit $h \geqslant 0$, $u \not\equiv 0 \bmod 4$, und u Summe von drei positiven bzw. verschiedenen bzw. verschiedenen positiven Quadraten ist.*

Beweis. Ist $n = 4^h u$ mit $h \geqslant 0$, $u \not\equiv 0 \bmod 4$, so ist n genau dann Summe von drei positiven bzw. verschiedenen bzw. verschiedenen positiven Quadraten, wenn das für u gilt. Ist u quadratfrei, so ist jede Darstellung von u als Summe von drei Quadraten notwendig primitiv. Ist u nicht quadratfrei, so folgt die Aussage aus Korollar 1(a).

2. Summen von vier und mehreren Quadraten.

SATZ 3. *Genau dann ist $n \in \boldsymbol{N}$ nicht Summe von vier verschiedenen positiven (im Falle $n \not\equiv 0 \bmod 8$ auch teilerfremden) Quadraten, wenn entweder*

$n = 4^h a$ *mit $h \geqslant 0$ und $a \in \{1, 2, \ldots, 19, 22, 23, 25, 26, 27, 31, 33, 34, 37, 38, 42, 43, 47, 55, 58, 67, 73, 82, 97, 103\}$*

oder

$n \in \{21, 29, 35, 41, 45, 49, 53, 59, 61, 69, 77, 83, 89, 101, 115, 157\}$.

Beweis. Es genügt, die folgenden Behauptungen zu beweisen:

(i) Mit einer geraden Zahl n ist auch $4^h n$ $(h \geqslant 0)$ nicht Summe von vier verschiedenen positiven Quadraten.

(ii) Mit einer ungeraden Zahl n ist auch $2n$ Summe von vier verschiedenen positiven teilerfremden Quadraten.

(iii) Eine ungerade Zahl n ist genau dann Summe von vier verschiedenen teilerfremden Quadraten, wenn $4n$ Summe von vier verschiedenen positiven teilerfremden Quadraten ist.

(iv) Jede ungerade Zahl $n > 1001$ ist Summe von vier verschiedenen positiven teilerfremden Quadraten.

Satz 3 folgt dann leicht aus (i) bis (iv) unter Zuhilfenahme eines kleinen Rechners. (i) ist trivial, die Beweise von (ii) und (iii) stehen im wesentlichen bei Pall ([19], p. 13), so daß es genügt, (iv) zu zeigen; dazu verwende ich das folgende Lemma, dessen Beweis sich ebenfalls im wesentlichen bereits bei Pall ([19], p. 14) findet.

LEMMA. *Sei n ungerade und $2n = a^2+b^2+c^2+d^2$ mit positiven, teilerfremden natürlichen Zahlen a, b, c, d, $a^2 > 3n/2$, $c \neq d$ und $a \equiv b \bmod 2$; dann ist n Summe von vier verschiedenen positiven teilerfremden Quadraten.*

Beweis von (iv). Sei n ungerade, $n > 1001$.

Fall 1: $n \equiv 3 \bmod 4$. Wegen $n > 1002$ gibt es eine ungerade Zahl $a > 19$ mit $\frac{3}{2}n < a^2 < (a+4)^2 < 2n$. Für $j \in \{0, 1, 2\}$ ist $2n-(a+2j)^2 \equiv 5 \bmod 8$, also sind in jeder Darstellung von $2n-(a+2j)^2$ als Summe von drei Quadraten diese notwendigerweise verschieden. Ist nun $2n-(a+2j)^2$ für ein $j \in \{0, 1, 2\}$ Summe von drei positiven Quadraten, so folgt die Behauptung (iv) aus obigem Lemma. Ist $2n-(a+2j)^2$ nicht Summe von drei positiven Quadraten, so folgt aus Korollar 1: $2n-(a+2j)^2 \in \{5, 13, 37, 85, ?\}$; für mindestens einen Wert von j ist das aber nicht der Fall.

Fall 2: $n \equiv 1 \bmod 8$. Es gibt eine ungerade Zahl $x \leqslant 15$ mit $(n-x^2)/4 \equiv 14 \bmod 16$, also ist $(n-x^2)/4$ Summe von drei (notwendigerweise verschiedenen positiven) teilerfremden Quadraten; daraus folgt (iv) für n.

Fall 3: $n \equiv 5 \bmod 8$. Es gibt ein $x \in \{1, 3, 5, 7\}$ mit $(n-x^2)/4 \equiv 5 \bmod 8$, man schließt wie im Fall 1, daß sich entweder $(n-x^2)/4$ oder $(n-(x+16)^2)/4$ als Summe von drei verschiedenen positiven Quadraten darstellen läßt, und daraus folgt wieder (iv) für n.

SATZ 4. *Genau die folgenden 123 Zahlen sind nicht als Summe von fünf verschiedenen positiven (teilerfremden) Quadraten darstellbar:*

1, 2, …, 54, 56, …, 65, 67, …, 74, 76, 77, 78, 80, 81, 83, 84, 85, 86, 89, 91, 92, 93, 96, 97, 98, 101, 102, 104, 105, 107, 108, 109, 112, 113, 116, 117, 119, 122, 124, 125, 128, 133, 136, 137, 140, 141, 149, 153, 164, 173, 177, 182, 188, 189, 197, 203, 221, 224, 236, 245.

Beweis. Ich werde zeigen: Ist $n \equiv 1 \bmod 8$, $n \geqslant 580$ oder $n \not\equiv 1 \bmod 8$, $n \geqslant 1138$, so ist n Summe von fünf verschiedenen positiven (teilerfremden) Quadraten; die verbleibenden Fälle können dann wieder mit einem Tischrechner erledigt werden.

Fall 1: $n \equiv 1 \bmod 8$, $n \geqslant 580$. Nach Korollar 1 ist dann entweder $n-340$ oder $n-580$ Summe von drei verschiedenen positiven teilerfremden Quadraten. Sei $n-340 = a^2+b^2+c^2$ mit verschiedenen positiven teilerfremden Zahlen a, b, c, und sei $a \equiv 0$, $b \equiv 2$, $c \equiv 1 \bmod 4$. Dann ist $n = 18^2+4^2+a^2+b^2+c^2 = 14^2+12^2+a^2+b^2+c^2$, also alles bewiesen, falls nicht $(a, b) = (4, 14)$ oder $(a, b) = (12, 18)$; im Falle $(a, b) = (4, 14)$ ist aber $n = 20^2+10^2+6^2+4^2+c^2$, und im Falle $(a, b) = (12, 18)$ ist $n = 22^2+16^2+8^2+2^2+c^2$. Ist $n-580$ Summe von drei verschiedenen positiven teilerfremden Quadraten, so schließt man analog.

Fall 2: $n \not\equiv 1 \bmod 8$, $n \geqslant 1138$. Dann ist $n-25^2 \not\equiv 0 \bmod 8$, $n-25^2 \geqslant 513$, also nach Satz 3 $n-25^2 = a^2+b^2+c^2+d^2$ mit verschiedenen positiven teilerfremden a, b, c, d. Ist $25 \notin \{a, b, c, d\}$, so bin ich fertig;

andernfalls sei $a = 25$, dann ist $n = 35^2+5^2+b^2+c^2+d^2$, und es genügt, die Fälle $b = 35$ und $b = 5$ weiter zu untersuchen. Im Falle $b = 35$ ist $n = 2475+c^2+d^2$, aber $2475 = 49^2+7^2+5^2 = 45^2+21^2+3^2 = 43^2+25^2+1^2$, und daraus erhält man eine Darstellung von n als Summe von fünf verschiedenen positiven teilerfremden Quadraten.

Im Falle $b = 5$ ist $n = 1275+c^2+d^2$, und die Behauptung folgt aus $1275 = 35^2+7^2+1^2 = 31^2+17^2+5^2 = 25^2+23^2+11^2$.

Bemerkung. Aus den Sätzen 3 und 4 kann man nun leicht die Sätze von Pall und Dubois über die Darstellung natürlicher Zahlen als Summe von vier bzw. fünf positiven bzw. verschiedenen Quadraten herleiten ([6]; [19], Theorems 2 and 3; [25], chap. XI).

Analog zu Satz 4 zeigt man:

Satz 5. *Genau die folgenden 167 Zahlen sind nicht als Summe von sechs verschiedenen positiven (teilerfremden) Quadraten darstellbar*

1, 2, ..., 90, 92, ..., 103, 105, ..., 114, 116, 117, 118, 120, 121, 122, 123, 125, 126, 127, 128, 129, 132, 133, 134, 135, 137, 138, 140, 141, 142, 144, 145, 148, 149, 150, 153, 157, 158, 161, 162, 165, 172, 173, 174, 177, 183, 185, 186, 189, 193, 197, 198, 205, 212, 213, 217, 222, 225, 228, 233, 237, 249, 261, 285, 333.

Über die Darstellbarkeit natürlicher Zahlen als Summe von fünf oder mehr Quadraten gilt:

Satz 6. *Seien $s, h \in \boldsymbol{N}$, $s \geqslant 5$. Dann haben fast alle natürlichen Zahlen n eine Darstellung $n = a_1^2+\ldots+a_s^2$ mit verschiedenen teilerfremden $a_i \geqslant h$; ist $N_{s,h}$ die größte Zahl, die sich nicht in dieser Form schreiben läßt, so gilt*

$$N_{s+1,h} \leqslant 2(\sqrt{N_{s,h}}+2)^2.$$

Beweis. Es genügt zu zeigen: Ist jedes $m > N_{s,h}$ Summe von s verschiedenen teilerfremden Quadraten $a_i^2 \geqslant h^2$, und ist $n > 2(\sqrt{N_{s,h}}+2)^2$, so ist n Summe von $s+1$ verschiedenen teilerfremden Quadraten $a_i^2 \geqslant h^2$.

Sei also $n > 2(\sqrt{N_{s,h}}+2)^2$ und $a = [\sqrt{n/2}]+1$; dann ist $n-a^2 > N_{s,h}$, also $n-a^2 = a_1^2+\ldots+a_s^2$ mit $a_1 > a_2 > \ldots > a_s \geqslant h$ und $(a_1, \ldots, a_s) = 1$; wäre $a \leqslant a_1$, so folgte $n > 2a^2$, ein Widerspruch.

Bemerkung. Die Abschätzung von $N_{s,h}$ in Satz 6 ist sehr grob, die folgenden Werte wurden mit Hilfe eines Rechners ermittelt ([3]):

s	6	7	8	9	10	11	12
$N_{s,1}$	333	330	462	539	647	888	1036

3. Andere quadratische Formen. Sei $f = ax^2+by^2+cz^2$ mit $a, b, c \in \boldsymbol{N}_+$ und $(a, b, c) = 1$ eine primitive positiv definite ternäre Diagonalform mit nur einer Klasse im Geschlecht (für die Bestimmung aller solcher

([3]) Herrn Dr. H. Brunotte danke ich für die Durchführung der Rechnungen.

Formen siehe [14]). Für eine natürliche Zahl n sei $r_f(n)$ die Anzahl der $(x, y, z) \in \boldsymbol{Z}^3$ mit $(x, y, z) = 1$ und $n = ax^2+by^2+cz^2$; aus der Siegel'schen analytischen Theorie der quadratischen Formen ([24]; siehe auch [16]) folgt:

$$r_f(n) = R(n, d)\cdot \prod_{p\mid 2d} \frac{r_f(n; p^{2v_p(2n)+1})}{p^{2(2v_p(2n)+1)}\cdot\left(1-\frac{1}{p^2}\right)}$$

mit

$$R(n, d) = \begin{cases} \frac{12}{d}\cdot h(-dn), & \text{falls } dn \equiv 0 \bmod 4,\ dn \neq 4;\\ \frac{18}{d}\cdot h(-dn), & \text{falls } dn \equiv 3 \bmod 8,\ dn \neq 3;\\ \frac{6}{d}\cdot h(-dn), & \text{falls } dn \equiv 7 \bmod 8;\\ \frac{6}{d}\cdot h(-4dn), & \text{falls } dn \equiv 1,2 \bmod 4,\ dn \neq 1.\end{cases}$$

Dabei ist $d = abc$, v_p die p-adische Exponentenbewertung von $\boldsymbol{Q}$ und $r_f(n; p^b)$ die Anzahl der $(x, y, z) \in \{0, 1, \ldots, p^b-1\}^3$ mit $(x, y, z, p) = 1$ und $n \equiv ax^2+by^2+cz^2 \bmod p^b$. Mit Hilfe dieser Formel und der bekannten Darstellungsanzahlen für binäre biquadratische Formen (siehe [13], § 41) gelingt nun wieder die Bestimmung aller $n \in \boldsymbol{N}$, welche sich in der Form

$$n = ax^2+by^2+cz^2$$

mit $x, y, z \in \boldsymbol{N}_+$ darstellen lassen. Ich gebe zwei Beispiele:

Satz 7. *Genau dann ist $n \in \boldsymbol{N}$ nicht in der Form $n = x^2+y^2+2z^2$ mit $x, y, z \in \boldsymbol{N}_+$, $(x, y, z) = 1$ darstellbar, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:*

(i) $n \equiv 0 \bmod 8$;

(ii) $n \equiv 14 \bmod 16$;

(iii) $n = p_1\ldots p_r$ *mit Primzahlen* $p_i \equiv 1 \bmod 8$ *und* $h_0(-8n) = 2$;

(iv) $n \in \{1, 2, 3, 5, 6, 9, 11, 29, 51, 65, ?\}$ *mit* $? \geqslant 5\cdot 10^{10}$.

Satz 8. *Sei $n \in \boldsymbol{N}$, $n \equiv 1 \bmod 3$. Genau dann ist n nicht in der Form $n = x^2+3y^2+3z^2$ mit $x, y, z \in \boldsymbol{N}_+$, $(x, y, z) = 1$ darstellbar, wenn*

$$n \in \{1, 4, 13, 28, 37, 133, ?\}$$

mit $? \geqslant 5\cdot 10^{10}$.

Satz 8 zeigt, daß sich die Form $x^2+3y^2+3z^2$ völlig anders verhält als beispielsweise die Formen $x^2+y^2+z^2$ oder $x^2+y^2+2z^2$: 28 besitzt eine Darstellung $28 = x^2+3y^2+3z^2$ mit $x, y, z \in N_+$, nämlich $28 = 2^2+3\cdot 2^2+3\cdot 2^2$ und eine Darstellung $28 = x^2+3y^2+3z^2$ mit $x, y, z \in Z$, $(x, y, z) = 1$, nämlich $28 = 1^2+3\cdot 3^2+3\cdot 0^2$, aber keine Darstellung der Form $28 = x^2+3y^2+3z^2$ mit $x, y, z \in N_+$, $(x, y, z) = 1$.

Sei nun $f = ax^2+by^2+cz^2+dt^2$ eine der 54 positiv definiten quarternären Diagonalformen, welche alle natürlichen Zahlen darstellen (siehe [5], § 56). Mit Hilfe der entsprechenden Sätze über ternäre Formen gelingt es nun wieder, ähnlich wie in § 2 alle $n \in N$ zu bestimmen, welche sich in der Form

$$n = ax^2+by^2+cz^2+dt^2$$

mit $x, y, z, t \in N_+$ darstellen lassen. Ich gebe auch hierfür zwei Beispiele:

SATZ 9. *Genau die folgenden 12 natürlichen Zahlen n haben keine Darstellung der Form*

$$n = x^2+y^2+z^2+2t^2$$

mit $x, y, z, t \in N_+$:

$$1, 2, 3, 4, 6, 7, 9, 10, 12, 15, 18, 33.$$

SATZ 10. *Genau die folgenden natürlichen Zahlen n haben keine Darstellung der Form*

$$n = x^2+y^2+3z^2+3t^2$$

mit $x, y, z, t \in N_+$:

$$n = 3^k u \text{ mit } k \geqslant 0 \quad \text{und} \quad u \in \{1, 2, 4, 5, 7, 10, 13, 22\}.$$

4. Asymptotische Resultate. Die Ergebnisse aus § 1 und § 2 ergeben unmittelbar das folgende Korollar:

KOROLLAR 3. *Sei $s \geqslant 3$ und Q die Menge aller $n \in N$, welche sich als Summe von s teilerfremden Quadraten darstellen lassen. Dann lassen sich fast alle $n \in Q$ auch als Summe von s verschiedenen positiven teilerfremden Quadraten darstellen.*

Beweis. Für $s \geqslant 4$ ist das unmittelbar ersichtlich; für $s = 3$ folgt die Behauptung aus Satz 1 unter Benutzung von $\lim\limits_{D\to\infty} h_0(-D) = \infty$ (siehe [2]).

Korollar 3 folgt für $s \geqslant 4$ unmittelbar aus den Resultaten von Malyshev [17], aus welchen man auch sofort die folgende quantitative Version von Korollar 3 herleiten kann:

SATZ 11. *Sei $s \geqslant 4$ und Q die Menge aller $n \in N$, welche sich als Summe von s teilerfremden Quadraten darstellen lassen; seien $c_1, \ldots, c_s \in R_+$ und $\sum\limits_{i=1}^{s} c_i^2 < 1$; dann lassen sich fast alle $n \in Q$ auch in der Form $n = \sum\limits_{i=1}^{s} x_i^2$ mit verschiedenen teilerfremden $x_i \in N$, $x_i > c_i\sqrt{n}$, darstellen.*

Für einen rein algebraischen Beweis von Satz 11 im Falle $s \geqslant 5$ siehe [11].

Im Falle $s = 3$ erhält man Resultate von der Schärfe des Satzes 11 nur unter Annahme einer Form der Riemann'schen Vermutung für Dirichlet'sche L-Funktionen (siehe [20]). Ich beweise hier das folgende schwächere Resultat:

SATZ 12. *Sei $0 < \delta < 1/2$; dann gibt es eine (nicht effektiv berechenbare) Konstante $A_\delta > 0$, so daß für alle $n \in N$ mit $n \not\equiv 0, 4, 7 \bmod 8$ und $n > A_\delta$ gilt:*

$$n = a_1^2+a_2^2+a_3^2$$

mit verschiedenen teilerfremden Zahlen $a_i > n^{1/2-\delta}$.

Beweis. Nach [23] ist für jedes $\varepsilon > 0$ $L_D(1) \gg D^{-\varepsilon}$ (dort nur für Fundamentaldiskriminanten $-D$, wegen

$$L_{Ds^2}(1) = L_D(1)\cdot \prod_{\substack{p\mid s\\ p\nmid D}} \left(1-\left(\frac{-D}{p}\right)\cdot\frac{1}{p}\right) \quad \text{und} \quad \prod_{p\leqslant s}\left(1-\frac{1}{p}\right) \gg s^{-2}$$

aber auch für beliebige Diskriminanten, siehe [21]). Aus der analytischen Klassenzahlformal folgt $r_3(n) \gg D^{1/2-\delta/2}$ für $n \neq 0, 4, 7 \bmod 8$, und es genügt daher,

$$3r_2(n)+6r_2'(n)+6\sum_{h=1}^{[n^{1/2-\delta}]} r_2(n-h^2) \ll D^{1/2-\delta/2}$$

zu zeigen, denn dann ist für große n die Anzahl der $(a_1, a_2, a_3) \in Z^3$ mit verschiedenen $a_i > n^{1/2-\delta}$ und $a_1^2+a_2^2+a_3^2 = n$ positiv. Sei $\tau(n)$ die Anzahl der Teiler von n; dann ist $r_2(n) \leqslant 4\tau(n)$, $r_2'(n) \leqslant 2\tau(n)$ und $\tau(n) \ll n^{\delta/2}$, also

$$3r_2(n)+6r_2'(n)+6\sum_{h=1}^{[n^{1/2-\delta}]} r_2(n-h^2) \ll n^{1/2-\delta}\cdot n^{\delta/2} = n^{1/2-\delta/2}.$$

Nach § 3 ist klar, wie man eine zu Satz 12 analoge Aussage für beliebige ganzzahlige positiv definite ternäre quadratische Formen mit einklassigem Geschlecht beweist (qualitative Resultate stehen in [15]).

Literatur

[1] H. P. Baltes, P. K.-J. Draxl, E. R. Hilf, *Quadratsummen und gewisse Randwertprobleme der Mathematischen Physik*, J. Reine Angew. Math. 268/69 (1974), S. 410–417.

[2] S. Chowla, *An extension of Heilbronn's class-number theorem*, Quart. J. Math. 5 (1934), S. 304–307.

[3] L. E. Dickson, *History of the theory of numbers*, vol. II, New York 1952.

[4] — *Introduction to the theory of numbers*, New York 1957.

[5] — *Modern elementary theory of numbers*, Chicago 1939.

[6] E. Dubouis, L'intermed. des Math. 18 (1911), S. 55–56 und 224–225.

[7] E. Grosswald, *Negative discriminants of binary quadratic forms with one class in each genus*, Acta Arith. 8 (1963), S. 295–306.
[8] E. Grosswald, A. Calloway, J. Calloway, *The representation of integers by three positive squares*, Proc. Amer. Math. Soc. 10 (1959), S. 451–455.
[9] F. Grube, *Über einige Euler'sche Sätze aus der Theorie der quadratischen Formen*, Zeitschr. Math. Phys. 19 (1874), S. 429–519.
[10] N. A. Hall, *Binary quadratic discriminants with a single class of forms in each genus*, Math. Z. 44 (1939), S. 85–90.
[11] J. S. Hsia, Y. Kitaoka, M. Kneser, *Representation of positive definite quadratic forms*, J. Reine Angew. Math. 301 (1978), S. 132–141.
[12] A. Hurwitz, L'intermed. des Math. 14 (1907), S. 107.
[13] B. W. Jones, *The arithmetic theory of quadratic forms*, Amer. Math. Soc. Monograph, 1950.
[14] B. W. Jones, G. Pall, *Regular and semiregular positive ternary quadratic forms*, Acta Math. 70 (1939), S. 165–191.
[15] M. Kassner, *Darstellungen mit Nebenbedingungen durch quadratische Formen*, J. Reine Angew. Math. 331 (1982), S. 151–161.
[16] M. Kneser, *Quadratische Formen*, Vorlesungsausarbeitung, Göttingen 1974.
[17] A. V. Malyshev, *Über die Darstellung ganzer Zahlen durch positiv definite quadratische Formen* (russisch), Trudy Mat. Inst. Stekl. 65 (1962).
[18] L. J. Mordell, *The representation of integers by three positive squares*, Michigan Math. J. 7 (1960), S. 289–290.
[19] G. Pall, *On sums of squares*, Amer. Math. Monthly 40 (1933), S. 10–18.
[20] M. Peters, *Darstellung durch definite ternäre quadratische Formen*, Acta Arith. 34 (1977), S. 57–80.
[21] K. Prachar, *Primzahlverteilung*, Berlin 1957.
[22] A. Schinzel, *Sur les sommes de trois carrés*, Bull. Acad. Polon. Sci. 7 (1959), S. 307–310.
[23] C. L. Siegel, *Über die Classenzahl quadratischer Zahlkörper*, Acta Arith. 1 (1935), S. 83–86.
[24] — *Über die analytische Theorie der quadratischen Formen*, Ann. of Math. 36 (1935), S. 527–606.
[25] W. Sierpiński, *Elementary theory of numbers*, Warszawa 1964.
[26] P. J. Weinberger, *Exponents of the class groups of complex quadratic fields*, Acta Arith. 22 (1973), S. 117–124.

Eingegangen am 20.6.1980
und in revidierter Form am 1.9.1981 (1213)

ACTA ARITHMETICA
XLII (1982)

Теорема сравнения для мультипликативных функций

Б. В. Левин, Н. М. Тимофеев (Владимир, СССР)

В настоящей работе получено несколько результатов о суммах мультипликативных функций. Прежде чем сформулировать эти результаты введем определения.

Определение 1. Будем говорить, $f(n)$ *принадлежит классу* $M(c)$, если $f(n)$ — мультипликативна и для всех $r \geqslant 1$ и простых p имеет место неравенство $|f(p^r)| \leqslant c$.

Определение 2. Класс A состоит из неотрицательных мультипликативных функций h, удовлетворяющих условиям: $h(p^r) = O(1)$, существуют $\tau_0 = \mathrm{const} > 0$ и y_0 такие, что при всех $y \geqslant y_0$

$$\sum_{p\leqslant y} h(p)\log p \geqslant \tau_0 y.$$

Определение 3. $f(n) \in N(h, c_1)$, если существует $t_0 = t_0(f)$ такое, что

1) $\sum_p \big(h(p) - \mathrm{Re} f(p)p^{-it_0}\big)p^{-1} \leqslant c_1$,

2) $$\lim_{y\to\infty} \sup_{f\in N(h,c_1)} \frac{1}{\log y} \sum_{p\leqslant y} \big(h(p) - \mathrm{Re} f(p)p^{-it_0}\big)\frac{\log p}{p} = 0.$$

Теорема 1 (Теорема сравнения). *Пусть* $h(n) \in A$, $f(n) \in M(c) \cap N(h, c_1)$ *и* $|f(p)| \leqslant h(p)$, *тогда*

$$\sum_{n\leqslant x} f(n) = \frac{x^{it_0}\cdot C(x)}{1+it_0} \sum_{n\leqslant x} h(n)\big(1+o(1)\big)$$

равномерно по всем $f(n) \in N(h, c_1) \cap M(c)$. *Здесь*

$$C(x) = \prod_{p\leqslant x}\Big(1+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{f(p^r)}{p^{r(1+it_0)}}\Big)\Big(1+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{h(p^r)}{p^r}\Big)^{-1}.$$

Если же $f(n) \in M(c)$, $|f(p)| \leqslant h(p)$ *и для всех* t *ряд*

$$\sum_p \big(h(p) - \mathrm{Re} f(p)p^{-it}\big)\frac{1}{p}$$