Sur les sommes de quatre cubes

par

A. Schinzel et W. Sierpiński (Warszawa)

1. W. Sierpiński a énoncé l'hypothèse H suivante:

H. *Tout nombre entier g admet une infinité de représentations de la forme*

$$g = x^3+y^3-z^3-t^3, \tag{1}$$

où x, y, z, t sont des entiers positifs.

Nous prouverons ici que l'hypothèse H est vraie pour tous les entiers dont la valeur absolue ne dépasse pas 100 et que parmi 18 entiers consécutifs quelconques il y en a au moins 12 pour lesquels l'hypothèse H est vraie.

Théorème 1. *Si*

$$g = a^3+b^3-c^3-d^3, \tag{2}$$

où a, b, c, d sont des entiers, $(a+b)(c+d) > 0$ et $a \neq b$ ou bien $c \neq d$, et si le nombre $(a+b)(c+d)$ n'est pas le carré d'un nombre naturel, il existe une infinité de représentations (1) *du nombre g, où x, y, z, t sont des entiers positifs.*

Ce théorème pourrait être sans peine déduit de la proposition de L. J. Mordell qui se trouve à la p. 216 de son travail [6]. Or, il nous semble que dans l'énoncé de Mordell il est nécessaire d'ajouter la condition que $a \neq b$ ou $c \neq d$, sans quoi sa démonstration ne serait pas suffisante (dans le cas où $a = b$ et $c = d$) (1).

Il est à remarquer aussi que C. A. Mebius dans son travail [4] affirme à la p. 17 qu'une somme algébrique de quatre cubes peut être représentée comme telle d'une infinité de manières. Or, la démonstration de Mebius est incorrecte, car elle est en défaut lorsque $a\beta$ est un carré ou lorsque $x_1 = y_1 = 0$.

(1) (Ajouté pendant la correction des épreuves.) Cf. L.J. Mordell, *Corrigendum: On the four integer cubes problem,* Journ. London Math. Soc. 32 (1957), p. 383.

Lemme. *Soient r et s des entiers positifs tels que le nombre rs ne soit pas un carré. S'il existe des entiers u_0 et v_0 dont l'un au moins n'est pas nul et tels que, h étant un entier, on ait $ru_0^2-sv_0^2 = h$, l'équation $ru^2-sv^2 = h$ a une infinité de solutions en nombres naturels u et v, tels que $2|u-u_0$ et $2|v-v_0$.*

Démonstration du lemme. Il résulte de l'hypothèse sur les nombres r et s que le nombre naturel $4rs$ n'est pas un carré et il s'ensuit, comme on sait, que l'équation $\xi^2-4rs\eta^2 = 1$ a une infinité de solutions en nombres naturels ξ et η. Dans chacune de ces solutions ξ, η le nombre ξ est évidemment impair. On vérifie sans peine que les nombres $u = |u_0|\xi+2s|v_0|\eta$ et $v = |v_0|\xi+2r|u_0|\eta$ satisfont à l'équation $ru^2-sv^2 = h$. Or, comme l'un au moins des nombres u_0, v_0 n'est pas nul, on démontre sans peine que pour η suffisamment grands les nombres u et v sont aussi grands que l'on veut. Le nombre ξ étant impair, on voit sans peine que les nombres $u-u_0$ et $v-v_0$ sont pairs. Notre lemme se trouve ainsi démontré.

Démonstration du théorème 1. D'après (2) on trouve

$$3(a+b)(a-b)^2-3(c+d)(c-d)^2 = 4g-(a+b)^3+(c+d)^3.$$

L'équation

$$3(a+b)u^2-3(c+d)v^2 = 4g-(a+b)^3+(c+d)^3 \tag{3}$$

a donc la solution $u_0 = a-b$, $v_0 = c-d$ et, comme $a \neq b$ ou bien $c \neq d$, l'un au moins des nombres u_0 et v_0 n'est pas nul. Le nombre $3^2(a+b)(c+d)$ n'étant pas un carré, il résulte de notre lemme que l'équation (3) a une infinité de solutions en nombres naturels u et v tels que $2|u-u_0$ et $2|v-v_0$. Posons

$$x = \frac{u+a+b}{2}, \quad y = \frac{v-c-d}{2}, \quad z = \frac{u-a-b}{2}, \quad t = \frac{v+c+d}{2}. \tag{4}$$

Les nombres (4) seront entiers et naturels pour u et v suffisamment grands, et on vérifie sans peine qu'on a l'égalité (1). Le théorème 1 se trouve ainsi démontré.

Corollaire 1. *L'hypothèse H est vraie pour tout nombre $6k$, où $k = 1, 2, 3, \ldots$*

Démonstration. On a l'identité de W. Hunter (voir [6], p. 218, renvoi *))

$$6k = [\tfrac{1}{6}(k^8-k^2)+k+1]^3+[\tfrac{1}{6}(k^7-k)-k^3]^3-[\tfrac{1}{6}(k^8-k^2)-k+1]^3-$$
$$-[\tfrac{1}{6}(k^7-k)+k^3]^3.$$

Posons $a = \frac{1}{6}(k^8-k^2)+k+1$, $b = \frac{1}{6}(k^7-k)-k^3$, $c = \frac{1}{6}(k^8-k^2)-k+1$, $d = \frac{1}{6}(k^7-k)+k^3$. Si l'on avait $a = b$ et $c = d$, il en résulterait $a-c = b-d$, donc $2k = -2k^3$, d'où (k étant naturel) $1 = -k^2$, ce qui est impossible. On a donc ou bien $a \neq b$, ou bien $c \neq d$.

On démontre sans peine que pour k naturel les nombres $a+b$ et $c+d$ sont naturels et que

$$\begin{aligned}(a+b)(c+d) &= \left[\tfrac{1}{6}(k^8+k^7-k^2-k)+1\right]^2-(k^3-k)^2\\ &= \left[\tfrac{1}{6}(k^8+k^7-k^2-k)\right]^2+\tfrac{1}{3}(k^8+k^7-k^2-k)-(k^3-k)^2+1\\ &> \left[\tfrac{1}{6}(k^8+k^7-k^2-k)\right]^2,\end{aligned}$$

donc, pour $k > 1$:

$$\left[\tfrac{1}{6}(k^8+k^7-k^2-k)+1\right]^2 > (a+b)(c+d) > \left[\tfrac{1}{6}(k^8+k^7-k^2-k)\right]^2$$

et le nombre $(a+b)(c+d)$, en tant que compris entre deux carrés consécutifs, n'est pas un carré (pour $k > 1$). Nous pouvons donc appliquer le théorème 1, d'où il résulte que le corollaire 1 est vrai pour tout nombre naturel $k > 1$.

Pour $k = 1$, c'est-à-dire pour le nombre 6 on a

$$6 = 6^3+5^3-7^3-(-2)^3$$

et $(6+5)(7-2) = 55$ — nombre positif qui n'est pas un carré. On peut donc appliquer le théorème 1 pour $g = 6$, $a = 6$, $b = 5$, $c = 7$, $d = -2$, ce qui prouve que le corollaire 1 est vrai aussi pour $k = 1$. Le corollaire 1 se trouve ainsi démontré complètement.

COROLLAIRE 2. *L'hypothèse* H *est vraie pour tout nombre* $6k+3$, *où* $k = 0, 1, 2, \ldots$

Démonstration. On a l'identité

$$6k+3 = (k+1)^3+(2k+7)^3-(k+5)^3-(2k+6)^3 \ (^2).$$

Posons $a = k+1$, $b = 2k+7$, $c = k+5$, $d = 2k+6$. Vu que $k \geqslant 0$, on a ici évidemment $a \neq b$ et $(a+b)(c+d) = (3k+8)(3k+11) > 0$. Les nombres naturels $3k+8$ et $3k+11$ sont premiers entre eux, puisque $(3k+11)-(3k+8) = 3$ et que le nombre premier 3 ne divise ni $3k+8$ ni $3k+11$. Donc, si le nombre $(3k+8)(3k+11)$ était un carré, il existerait un nombre naturel m tel que $3k+8 = m^2$, ce qui est impossible, puisque $3k+8 = 3(k+2)+2$ et que le carré d'un entier ne peut être de la forme $3t+2$, où t est un entier. Le nombre $(a+b)(c+d)$ n'est donc pas un carré et nous pouvons appliquer le théorème 1, d'où résulte le corollaire 1.

(2) Voir L. J. Mordell [6], p. 209, formule (3a) et p. 217. Les corollaires 2, 4, 5, 6 et 7 et le théorème 2 pourraient être sans peine déduits des propositions analogues de L. J. Mordell ([6], p. 217-218) en faisant dans ses énoncées ainsi que dans leurs démonstrations les modifications nécessaires, mais, pour ne laisser au lecteur aucun doute, nous donnons ici les démonstrations détaillées de ces corollaires.

Des corollaires 1 et 2 on déduit tout de suite le

COROLLAIRE 3. *L'hypothèse* H *est vraie pour tous les nombres naturels divisibles par* 3.

COROLLAIRE 4. *L'hypothèse* H *est vraie pour tous les nombres* $18k+1$, *où* k *est un entier.*

Démonstration. On a l'identité

$$18k+1 = (2k+14)^3+(3k+30)^3-(2k+23)^3-(3k+26)^3.$$

Posons $a = 2k+14$, $b = 3k+30$, $c = 2k+23$, $d = 3k+26$. Pour k entier $\neq -9$ on a $(a+b)(c+d) = (5k+44)(5k+49) > 0$ (puisque, pour $k \geqslant -8$ les nombres $5k+44$ et $5k+49$ sont positifs et pour $k \leqslant -10$ ils sont negatifs).

Si l'on avait $a = b$ et $c = d$, il en résulterait $a-b = c-d$, c'est-à-dire $-k-16 = -k-3$, ce qui est impossible. Donc on a $a \neq b$ ou bien $c \neq d$.

Soit maintenant k un entier $\neq -8$ et $\neq -9$.

Si le nombre naturel $(5k+44)(5k+49)$ était un carré, alors, les nombres $5k+44$ et $5k+49$ étant premiers entre eux (puisque leur différence $= -5$ et le nombre premier 5 ne divise aucun de ces nombres), il existerait des nombres naturels m et n tels que $5k+44 = \pm m^2$ et $5k+49 = \pm n^2$, d'où $\pm 5 = n^2-m^2 = (n-m)(n+m)$, ce qui donne $n+m = 5$ et $n-m = \pm 1$, d'où $n = 3$ ou bien $n = 2$, donc $5k+49 = \pm 9$ ou bien $5k+49 = \pm 4$ et on n'a ici en k entier que les solutions $k = -8$ ou $k = -9$ qui sont exclues. Donc si k est un entier $\neq -8$ et $\neq -9$, le nombre $(a+b)(c+d)$ n'est pas un carré. Nous pouvons donc appliquer le théorème 1, d'où il résulte que le corollaire 4 est vrai pour tous les nombres entiers k sauf peut-être pour $k = -8$ et $k = -9$, c'est-à-dire pour les nombres -143 et -161. Or, on a ici les décompositions

$$-143 = 2^3+1^3-5^3-3^3 \quad \text{et} \quad -161 = 3^3+3^3-6^3-(-1)^3$$

et, puisque $(2+1)(5+3) = 24 > 0$ et $(3+3)(6-1) = 30 > 0$ ne sont pas des carrés, on peut appliquer le théorème 1 et on conclut que l'hypothèse H est vraie pour les nombres -143 et -161.

Le corollaire 4 est ainsi démontré complètement.

L'hypothèse H étant évidemment vraie pour le nombre entier $-g$ si elle est vraie pour le nombre g, et puisque $-(18k+1) = 18(-k)+1$, on déduit tout de suite du corollaire 4 le

COROLLAIRE 5. *L'hypothèse* H *est vraie pour tous les nombres* $18k-1$, *où* k *est un entier.*

COROLLAIRE 6. *L'hypothèse* H *est vraie pour tous les nombres* $18k+8$, *où* k *est un entier.*

Démonstration. On a l'identité (voir [6], p. 209, formule (8) et cf. p. 217-218)

$$18k+8 = (k-5)^3+(3k-30)^3-(k-14)^3-(3k-29)^3.$$

Posons $a = k-5$, $b = 3k-30$, $c = k-14$, $d = 3k-29$. Si l'on avait $a = b$ et $c = d$, on aurait $a-c = b-d$, donc $9 = -1$, ce qui est impossible. Donc $a \neq b$ ou bien $c \neq d$. On a $(a+b)(c+d) = (4k-35)(4k-43)$. Les deux facteurs sont positifs pour $k > 10$ et négatifs pour $k < 9$. Donc, si k est un entier $\neq 9$ et $\neq 10$, on a $(a+b)(c+d) > 0$. Les nombres $4k-35$ et $4k-43$ sont impairs et leur différence est $= 8$, d'où il résulte qu'ils sont premiers entre eux. Donc, si le nombre $(4k-35)(4k-43)$ était un carré, il existerait des nombres naturels m et n tels que $4k-35 = \pm m^2$ et $4k-43 = \pm n^2$, d'où $8 = \pm(m^2-n^2) = \pm(m-n)(m+n)$. Les nombres $m-n$ et $m+n$ sont de même parité, donc, comme diviseurs complémentaires du nombre ± 8, ils doivent être tous les deux pairs. Si l'on avait $m+n = 2$, on aurait $m-n = \pm 4$, ce qui donne $m = 3$ ou bien $m = -1$, ce qui est impossible. On a donc $m+n = 4$, $m-n = \pm 2$, ce qui donne $m = 3$, $n = 1$, ou bien $m = 1$, $n = 3$. Dans le premier cas on trouve $4k-35 = \pm 9$, ce qui donne, pour k entier, $k = 11$, et dans le second cas on trouve $4k-35 = \pm 1$, ce qui donne (k étant entier) $k = 9$. Donc, si k est un entier différent de 9, 10 et 11, le nombre $(a+b)(c+d)$ est un nombre naturel qui n'est pas un carré et d'après le théorème 1 nous concluons que le corollaire 6 est vrai pour tout nombre entier k sauf peut-être pour $k = 9$, 10 et 11, c'est-à-dire pour les nombres 170, 188 et 206. Or, pour ces nombres on a les égalités

$$170 = 6^3+2^3-3^3-3^3, \qquad 188 = 6^3+0^3-3^3-1^3,$$

$$206 = 6^3+(-2)^3-1^3-1^3,$$

et puisque les nombres $(6+2)(3+3) = 48$, $(6+0)(3+1) = 24$, $(6-2)\times\times(1+1) = 8$ sont naturels et ne sont pas des carrés, on conclut, d'après le théorème 1, que l'hypothèse H est vraie pour les nombres 170, 188 et 206. Le corollaire 6 se trouve ainsi démontré complètement.

Il en résulte tout de suite que pour k entier l'hypothèse H est vraie pour les nombres $18k+10 = -[18(-k-1)+8]$.

COROLLAIRE 7. *L'hypothèse* H *est vraie pour tous les nombres* $18k+7$, *où* k *est un entier.*

Démonstration. On a l'identité (voir [6], p. 209, formule (7))

$$18k+7 = (8k-2)^3+(k+2)^3-(9k-2)^3-(-6k+1)^3.$$

Posons $a = 8k-2$, $b = k+2$, $c = 9k-2$, $d = -6k+1$. Si l'on avait $a = b$, on aurait $7k = 4$, ce qui est impossible pour k entier. Soit $k > 0$. On a $(a+b)(c+d) = 9k(3k-1)$. Si $9k(3k-1)$ était un carré, le nombre $k(3k-1)$ serait un carré et, les nombres k et $3k-1$ étant premiers entre eux, il existerait des nombres naturels m et n tels que $k = m^2$ et $3k-1 = n^2$, ce qui est impossible, le carré d'un entier, divisé par 3, ne donnant jamais le reste -1. Le nombre $(a+b)(c+d)$ n'est donc pas un carré et d'après le théorème 1 on conclut que le corollaire 7 est vrai pour les nombres $k = 1, 2, \ldots$

Pour $k = 0$ le corollaire 7 est vrai, puisque $7 = 2^3+n^3-n^3-1^3$ pour $n = 1, 2, \ldots$

Soit maintenant k un entier < 0. En tenant compte de l'identité pour $18k+7$, on a l'identité

$$18k+7 = (-9k+2)^3+(8k-2)^3-(-6k+1)^3-(-k-2)^3.$$

Posons $a = -9k+2$, $b = 8k-2$, $c = -6k+1$, $d = -k-2$. Si l'on avait $a = b$, on aurait $27k = 4$, ce qui est impossible pour k entier. On a donc $a \neq b$. On a $(a+b)(c+d) = (-k)(-7k-1)$ ce qui est > 0 pour $k < 0$. Les nombres $-k$ et $-7k-1$ étant premiers entre eux, si le nombre $(-k)(-7k-1)$ était un carré, il existerait un nombre naturel n tel que $-7k-1 = n^2$, ce qui est impossible, puisque le carré d'un entier divisé par 7 ne donne que les restes 0, 1, 2 ou 4. Le nombre $(a+b)(c+d)$ n'est donc pas un carré et on en déduit, d'après le théorème 1, que le corollaire 7 est vrai pour $k = -1, -2, \ldots$

Le corollaire 7 se trouve ainsi démontré complètement.

Il en résulte tout de suite que l'hypothèse H est vraie pour tous les nombres $18k+11 = -[18(-k-1)+7]$, où k est un entier.

Vu les corollaires 3, 4, 5, 6 et 7 on obtient le

THÉORÈME 2. *L'hypothèse* H *est vraie pour tous les entiers de la forme* $(18k+r)t^3$, *où* $r = 0, 1, 3, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 15$ *ou* 17 *et* k et t sont des *entiers*.

Il en résulte que parmi 18 entiers consécutifs quelconques il y en a au moins 12 pour lesquels l'hypothèse H est vraie.

Il résulte aussi du théorème 2 que l'hypothèse H est vraie pour tous les nombres naturels $\leqslant 100$ sauf peut-être pour les nombres 2, 4, 5, 13, 14, 16, 20, 22, 23, 31, 32, 34, 38, 40, 41, 49, 50, 52, 58, 59, 67, 68, 70, 74, 76, 77, 85, 86, 92, 94, 95. Pour ces derniers nombres la validité de l'hypothèse

H résulte du théorème 1 et des décompositions suivantes de ces nombres $n = a^3+b^3-c^3-d^3$:

n	a	b	c	d	$(a+b)(c+d)$
2	9	1	8	6	140
4	10	7	11	2	$17\cdot 13$
5	5	2	4	4	$7\cdot 8$
13	85	28	86	2	$113\cdot 88$
14	65	2	58	43	$67\cdot 101$
$16 = 2^3.2$					
20	16	-14	11	1	$2\cdot 12$
22	16	1	14	11	$5^2\cdot 17$
23	71	44	76	16	$115\cdot 92$
31	52	31	44	44	$83\cdot 88$
$32 = 2^3.4$					
34	3	2	1	0	5
38	4	1	3	0	15
$40 = 2^3.5$					
41	8	-7	4	4	8
49	4	1	2	2	$5\cdot 4$
50	41	29	49	-29	$70\cdot 20$
52	11	4	10	7	$15\cdot 17$
58	4	1	2	-1	5
59	5	-4	1	1	2
67	76	31	77	23	$107\cdot 10^2$
68	5	2	4	1	$7\cdot 5$
70	20	11	21	0	$31\cdot 21$
74	25	1	24	12	$6^2\cdot 26$
76	10	7	11	-4	$17\cdot 7$
77	5	2	4	-2	$7\cdot 2$
85	16	4	14	11	$20\cdot 5^2$
86	53	26	55	-2	$79\cdot 53$
92	6	1	5	0	$7\cdot 5$
94	7	1	5	5	$4^2\cdot 5$
95	20	14	22	1	$34\cdot 23$ [3]

On vérifie sans peine qu'on a ici toujours $a \neq b$ et que les nombres $(a+b)(c+d)$ sont naturels et ne sont pas des carrés.

Nous avons ainsi démontré que l'hypothèse H est vraie pour tous les entiers dont la valeur absolue ne dépasse pas 100.

2. Il existe une infinité de nombres naturels g qui admettent une infinité de représentations de la forme (1) ainsi que de chacune des formes

$$g = x^3+y^3+z^3-t^3 \tag{5}$$

[3] Nous avons profité ici des décompositions trouvées par A. S. Bang [1], A. Wahlgren [7], Chao Ko [3] et J. C. P. Miller and M. F. C. Woollett [5].

et

$$g = x^3-y^3-z^3-t^3 \tag{6}$$

où x, y, z, t sont des nombres naturels.

Tels sont, par exemple, tous les nombres naturels g qui sont les différences de deux cubes naturels, $g = a^3-b^3$, puisqu'on a alors évidemment pour $n = 1, 2, 3, \ldots$ les identités:

$$a^3-b^3 = a^3+n^3-b^3-n^3,$$

$$a^3-b^3 = a^3+[(9n^3-1)b]^3+[(9n^4-3n)b]^3-(9n^4b)^3,$$

$$a^3-b^3 = (9n^4a)^3-[(9n^3-1)a]^3-[(9n^4-3n)a]^3-b^3.$$

Tel est, par exemple, le nombre $7 = 2^3-1^3$.

Or, nous ne savons pas si le nombre $g = 1$ admet une infinité de représentations de la forme (5) (où x, y, z, t sont naturels). On a, par exemple, $1 = 4^3+4^3+6^3-7^3 = 4^3+38^3+58^3-63^3 = 4^3+37^3+63^3-67^3$.

Nous ne savons pas non plus si le nombre $g = 2$ admet une infinité de représentations de la forme (6). On a par exemple $2 = 4^3-2^3-3^3-3^3 = 235^3-3^3-69^3-233^3 = 683^3-650^3-353^3-2^3$.

Or, nous ne connaissons aucun entier g pour lequel on puisse démontrer qu'il n'a qu'un nombre fini (ou nul) de représentations de la forme (5), respectivement de la forme (6) (où x, y, z, t sont naturels).

Il est à remarquer qu'on s'est occupé de représentations des nombres naturels g de la forme

$$g = x^3+y^3+2z^3, \tag{7}$$

où x, y, z sont des entiers. M. Chao Ko [3] a démontré que tout nombre naturel $\leqslant 100$, sauf peut-être les nombres 76 et 99, admet au moins une telle représentation (on a par exemple $13 = (-35)^3+(-62)^3+2\cdot 52^3$, $20 = 63^3+(-3)^3+2\cdot(-50)^3$, $31 = 52^3+31^3+2\cdot(-44)^3$, $79 = 23^3+(-26)^3+2\cdot 14^3$). 76 est le plus petit nombre naturel pour lequel on ne sait pas s'il admet au moins une représentation de la forme (7), où x, y, z sont des entiers.

3. THÉORÈME 3. *Tout nombre rationnel positif r admet une infinité de représentations de chacune des formes*

$$r = x^3+y^3+z^3+t^3, \tag{8}$$

$$r = x^3+y^3+z^3-t^3, \tag{9}$$

$$r = x^3+y^3-z^3-t^3, \tag{10}$$

$$r = x^3-y^3-z^3-t^3, \tag{11}$$

où x, y, z, t sont des nombres rationnels positifs.

Démonstration. La proposition P suivante est connue:

P. *Tout nombre rationnel positif est la somme des cubes de trois nombres rationnels positifs* (voir par exemple [2], p. 197-199, Theorem 234).

Soit r un nombre rationnel positif. Il existe évidemment une infinité de nombres rationnels positifs t tels que $r > t^3$. Le nombre $r-t^3$ est donc rationnel positif et, d'après la proposition P, il existe des nombres rationels positifs x, y, z tels que $r-t^3 = x^3+y^3+z^3$, ce qui prouve que le nombre r admet une infinité de représentations de la forme (8), où x, y, z, t sont des nombres rationnels positifs.

r et t étant des nombres rationnels positifs, $r+t^3$ est aussi un nombre rationnel positif, et on déduit tout de suite de la proposition P que tout nombre rationnel positif admet une infinité de représentations de la forme (9), où x, y, z, t sont des nombres rationnels positifs.

Pour démontrer que tout nombre rationnel positif admet une infinité de représentations de la forme (11), où x, y, z, t sont des nombres rationnels positifs, il suffit de prendre pour x un nombre rationnel quelconque tel que $x^3 > r$ et d'appliquer la proposition P au nombre x^3-r.

Nous allons maintenant démontrer que tout nombre rationnel positif admet une infinité de représentations de la forme (10), où x, y, z, t sont des nombres rationnels positifs.

Soit r un nombre rationnel positif, $r = l/m$, où l et m sont des nombres naturels. D'après le Corollaire 3 le nombre naturel $27lm^2$, en tant que divisible par 3, admet une infinité de représentations de la forme $27lm^2 = a^3+b^3-c^3-d^3$, où a, b, c, d sont des nombres naturels. Or, on a

$$r = \frac{l}{m} = \left(\frac{a}{3m}\right)^3 + \left(\frac{b}{3m}\right)^3 - \left(\frac{c}{3m}\right)^3 - \left(\frac{d}{3m}\right)^3.$$

Quant à la proposition P il est encore à remarquer qu'en modifiant un peu sa démonstration donnée l. c. dans le livre de Hardy et Wright on peut démontrer que tout nombre rationnel positif r peut être représenté sous chacune des formes

$$r = x^3+y^3-z^3 \quad \text{et} \quad r = x^3-y^3-z^3,$$

où x, y et z sont des nombres rationnels positifs.

Après avoir lu notre travail A. Mąkowski a démontré que l'hypothèse H est vraie pour tous les entiers dont la valeur absolue ne dépasse pas 300, sauf peut-être pour les nombres ± 148, ± 257, ± 284 pour lesquels il n'a pas trouvé de décompositions qui permetteraient d'appliquer nos théorèmes. La démonstration, pareillement que celle des pages 25 et 26, résulte du théorème 2 et pour les nombres pour lesquels ce théorème

ne s'applique pas, du théorème 1 et de la table des décompositions suivantes.

n	a	b	c	d	$(a+b)(c+d)$
103	16	-11	11	11	$5\cdot 22$
$104 = 2^3\cdot 13$					
106	8	1	4	7	$9\cdot 11$
110	5	1	2	2	$6\cdot 4$
$112 = 2^3\cdot 14$					
113	8	2	4	7	$10\cdot 11$
121	4	4	-1	2	8
122	5	-1	1	1	$4\cdot 2$
124	5	0	0	1	5
$128 = 4^3\cdot 2$					
130	97	97	-388	392	$2^3\cdot 97$
131	5	2	1	1	$7\cdot 2$
139	13	7	-7	14	$20\cdot 7$
140	5	44	-23	46	$49\cdot 23$
142	8	0	3	7	$8\cdot 10$
146	14	4	11	11	$18\cdot 22$
149	8	8	-5	10	$16\cdot 5$
157	4	7	5	5	$11\cdot 10$
158	8	8	-11	13	2^5
$160 = 2^3\cdot 20$					
164	7	-3	3	5	$4\cdot 8$
166	7	7	8	2	$14\cdot 10$
167	8	-1	1	7	$7\cdot 8$
175	7	7	-1	8	$14\cdot 7$
$176 = 2^3\cdot 22$					
178	8	2	-1	7	$10\cdot 6$
182	6	4	-3	5	$10\cdot 2$
$184 = 2^3\cdot 23$					
185	8	2	-2	7	$10\cdot 5$
193	16	16	20	-1	$32\cdot 19$
194	5	5	-2	4	$10\cdot 2$
196	6	2	1	3	$8\cdot 4$
202	7	-5	2	2	$2\cdot 4$
203	14	-13	7	1	$1\cdot 8$
211	7	1	2	5	$2^3\cdot 7$
212	14	2	7	13	$16\cdot 20$
218	7	0	0	5	$7\cdot 5$
220	7	1	-1	5	2^5
221	20	14	-5	22	$34\cdot 17$
229	13	-11	8	5	$2\cdot 13$ (4)
230	8	5	4	7	$13\cdot 11$
236	9	3	8	2	$12\cdot 10$
238	7	7	-4	8	$14\cdot 4$

(4) Cette décomposition a été trouvée par A. Gorzelewski.

n	a	b	c	d	$(a+b)(c+d)$
239	29	-28	13	1	$1\cdot 14$
247	10	4	-16	17	$14\cdot 1$
254	6	4	3	-1	$10\cdot 2$
265	7	55	53	26	$62\cdot 79$
266	11	-10	1	14	$1\cdot 15$
268	9	2	-12	13	$11\cdot 1$
274	7	4	2	5	$11\cdot 7$
275	11	2	10	4	$13\cdot 14$
283	7	1	-4	5	$8\cdot 1$
286	7	2	4	1	$9\cdot 5$
290	7	1	3	3	$8\cdot 6$
292	52	52	-151	153	$104\cdot 4$
293	8	5	1	7	$13\cdot 8$

Or, on a $232 = 2^2\cdot 29$, $248 = 2^3\cdot 31$, $250 = 5^3\cdot 2$, $256 = 4^3\cdot 4$, $272 = 2^3\cdot 34$.

Travaux cités

[1] A. S. Bang, *Om Tal, som kan skrives som en Sum af tre eller fire Kubiktal*, Matematisk Tidsskrift B (1940), p. 25-42.

[2] G. H. Hardy and E. M. Wright, *An introduction to the theory of numbers*, Oxford 1954.

[3] Chao Ko, *Decompositions into four cubes*, J. London Math. Soc. 11 (1936), p. 218-219.

[4] C. A. Mebius, *Zahlentheoretische Untersuchungen III, Die diophantische Gleichung $A^3+B^3-C^3-D^3 = E$*, Göteborgs Kungl. Vetenskaps. Handlingar, Sjätte Följden, Ser. B, 3 (1945), No 6, p. 1-21; cf. Math. Reviews 8 (1947), p. 6.

[5] J. C. P. Miller and M. F. C. Woollett, *Solutions of the Diophantine equation $x^3+y^3+z^3 = k$*, J. London Math. Soc. 30 (1955), p. 101-110.

[6] L. J. Mordell, *On the four integer cubes problem*, J. London Math. Soc. 11 (1936), p. 208-218.

[7] A. Wahlgren, *On tal, som kunna skrivas som en summa av fyra kubiktal*, Matematisk Tidsskrift B (1941), p. 33-41.

Reçu par la Rédaction le 25. 11. 1956

On the so-called density-hypothesis in the theory of the zeta-function of Riemann

by

P. Turán (Budapest)

§ 1. Introduction

1. If $w = u+iv$, then the zeta-function of Riemann is for $u > 1$ defined by

$$\zeta(w) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-w}. \tag{1.1.1}$$

As is well known, $(w-1)\zeta(w)$ is an integral-function, which has an infinity of zeros, called "non-trivial" zeros, in the vertical strip $0 < u < 1$, which according to Riemann have a mysterious connection with the prime-numbers. Denoting by $N(T)$ the number of these non-trivial zeros in the parallelogram

$$0 < u < 1, \quad 0 < v \leqslant T, \tag{1.1.2}$$

we have according to Riemann-Mangoldt[1] for $T \geqslant 2$

$$\left| N(T) - \frac{T}{2\pi}\log\frac{T}{2\pi e}\right| \leqslant c_1 \log T, \tag{1.1.3}$$

where c_1 and later $c_2, \ldots$ are positive numerical constants (if some of them depend upon small parameters ε or $\varkappa$, δ, the dependence will always be explicitly stated). The famous unproved conjecture of Riemann asserts that $\zeta(w) \neq 0$ for $u > \frac{1}{2}$. Recently it has been realized that many of its consequences in the number-theory could have been deduced from "density-theorems" which assert that in parallelograms

$$u \geqslant a, \quad 0 < v \leqslant T, \quad \tfrac{1}{2} \leqslant a \leqslant 1, \tag{1.1.4}$$

the number of zeros of $\zeta(w)$ is "not too large". More exactly, $N(a, T)$

(1) See *e. g.* [3], p. 181, the name of Mangoldt not being mentioned.