8 Nord Matematisk Tidskrift 7(1959)

Eulerian nos

460

~~etc~~

2538

2539

8517

8292

K TIDSKRIFT

ning.

ler og seminarier i Danmark.

ls matematiska förening.

o – Finlands matematik- och

sjon.

dervisning i Lund.

ervisning i Stockholm.

Oslo.

Redusert

kr. 10

mk. 350

kr. 30

kr. 10

kr. 8

22 i norsk valuta.

deres studerende (elever).

til ovenstående adresse.

vej 20, København Ø.

arenk 5, as. 5, Helsinki.

ðafélagsins,

Ásvallagötu 56, Reykjavík.

tutt, Blindern, Oslo.

52,

titutt, Blindern, Oslo.

t for 1959

betalt for 1958, bes gjøre det

bruke ovenstående innbetalings-

ontorene.

OM POTENSPRODUKTSUMMER

OVE J. MUNCH

1. Indledning. Det er en velkendt sag, at et vilkårligt polynomium af højst n'te grad kan skrives som en linearkombination af $n+1$ lineært uafhængige polynomier af højst n'te grad. Et hyppigt benyttet system af »basispolynomier« er [1, p. 168]

$$\binom{x}{0},\ \binom{x}{1},\ \ldots,\ \binom{x}{n},$$

som f. eks. indgår i Newtons interpolationsformel.

Der er næppe noget andet system, som har så mange anvendelsesmuligheder som dette; det forhindrer dog ikke, at der i specielle tilfælde findes andre systemer, som kan benyttes med fordel. Vi vil i det følgende benytte

$$\binom{x}{n},\ \binom{x+1}{n},\ \ldots,\ \binom{x+n}{n}. \tag{1}$$

At disse polynomier er lineært uafhængige, ses let ved i identiteten

$$\sum_{i=0}^{n} b_i \binom{x+i}{n} = 0$$

at indsætte $x=0, 1, \ldots, n$ efter hinanden; man får da

$$b_n = b_{n-1} = \ldots = b_0 = 0 .$$

Vi nævner nogle grunde til, at vi vælger det sidstnævnte system:

Hvis to polynomier $P(x)$ og $P^*(x)$ af n'te grad tilfredsstiller relationen

$$P(x-1) = (-1)^n P^*(-x)\,, \tag{2}$$

og $P(x)$ har fremstillingen

$$P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i \binom{x+i}{n}\,,$$

så er

$$P^*(x) = \sum_{i=0}^{n} a_{n-i} \binom{x+i}{n}.$$

Benytter vi nemlig omskrivningen

$$\binom{x-1+i}{n} = (-1)^n \binom{-x+n-i}{n},$$

finder vi

$$P(x-1) = \sum_{i=0}^{n} a_i \binom{x-1+i}{n} = (-1)^n \sum_{i=0}^{n} a_i \binom{-x+n-i}{n}$$
$$= (-1)^n \sum_{i=0}^{n} a_{n-i} \binom{-x+i}{n},$$

der ved anvendelse af (2) fører til den anførte formel for $P^*(x)$.

Heraf — eller direkte af (2) — følger, at forbindelsen mellem $P(x)$ og $P^*(x)$ er gensidig. Hvis specielt

$$P(x-1) = (-1)^n P(-x),$$

så har man en symmetri i koefficienterne a_i, idet der på grund af entydigheden af disse må gælde $a_i = a_{n-i}$.

Vi viser yderligere, at dersom polynomiet $P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i \binom{x+i}{n}$ har de heltallige nulpunkter $p, p-1, \ldots, 0, -1, \ldots, -q$, så gælder $a_0 = a_1 = \ldots = a_{q-1} = a_{n-p} = \ldots = a_{n-1} = a_n = 0$. Thi indsættelse af $x = 0$ giver $a_n = 0$, hvorefter $x = 1$ giver $a_{n-1} = 0$, osv. indtil $x = p$, der giver $a_{n-p} = 0$. Tilsvarende finder man med $x = -1, -2, \ldots, -q$, at $a_0 = a_1 = a_2 = \ldots = a_{q-1} = 0$.

Man kan finde mere af interesse om denne interpolationsmetode, men vi standser her, da vi har anført tilstrækkeligt til vort formål.

2. Summation af potensprodukter. Lad $p_1, p_2, \ldots, p_q$ samt n være hele positive tal. I udtrykket

$$\sum_{K}^{n} k_1^{p_1} k_2^{p_2} \ldots k_q^{p_q}$$

skal summationen forstås således:

K betegner en forskrift af typen $k_{1(}\leqq_{)} k_{2(}\leqq_{)} \ldots {}_{(}\leqq_{)} k_q$, hvor der mellem hvert par på hinanden følgende k'er skal stå enten $<$ eller $\leqq$ (men på samme plads i forskriften stadig det samme). Man skal da summere over alle sæt af hele tal $k_1, k_2, \ldots, k_q$, som tilfredsstiller forskriften samt betingelsen $1 \leqq k_i \leqq n$. Dersom der i forskriften forekommer m rene ulighedstegn, må man, for at udtrykket skal have mening, antage $n \geqq m+1$.

Med en bestemt forskrift K afhænger den ovenstående sum af p'erne samt af n; da i det følgende ikke selve p'erne, men kun deres antal q skal variere, vil vi betegne den

(3) $$A(n;q) = \sum_{K}^{n} k_1^{p_1} k_2^{p_2} \ldots k_q^{p_q}.$$

Vi sætter $\sum_{i=1}^{q} p_i = p$. Der gælder da følgende[1]

Sætning 1. *Udtrykket $A(n;q)$ er et polynomium i n af graden $p+q$, med hovedkoefficienten*

$$\prod_{\nu=1}^{q} \left(\nu + \sum_{i=1}^{\nu} p_i\right)^{-1}$$

og med nulpunkter $m, m-1, \ldots, m-q$.

For at vise denne sætning benytter vi induktion efter q og betragter derfor først tilfældet $q = 1$ (og altså $m = 0$). Vi vil her forudsætte kendt, at [2, p. 262], [4]

(4) $$S_p(n) = A(n;1) = \sum_{k=1}^{n} k^p$$

er et polynomium i n af graden $p+1$, med hovedkoefficienten $1/(p+1)$ og nulpunkter 0 og -1. For fuldstændigheds skyld er et bevis anført i 3 under den nærmere omtale af dette særtilfælde.

Sætning 1 er altså rigtig for $q = 1$; lad da $q > 1$. Vi antager først, at der i K gælder $k_{q-1} < k_q$. Lad K_1 være den summationsforskrift, der fremgår af K, når det sidste led ($< k_q$) udelades. Ifølge vor induktionsforudsætning er da

$$A(n;q-1) = \sum_{K_1}^{n} k_1^{p_1} k_2^{p_2} \ldots k_{q-1}^{p_{q-1}}$$

et polynomium i n af graden $p - p_q + q - 1$, med hovedkoefficienten

$$\prod_{\nu=1}^{q-1} \left(\nu + \sum_{i=1}^{\nu} p_i\right)^{-1}$$

og med nulpunkter $m-1, m-2, \ldots, m-q$.

Af (3) ser man, at der for $n > m+1$ gælder ligningen

(5) $$A(n;q) - A(n-1;q) = n^{p_q} A(n-1;q-1),$$

medens man for $n = m+1$ har

(5') $$A(m+1;q) = (m+1)^{p_q} A(m;q-1),$$

hvor i den sidste formel hvert A kun indeholder eet led.

[1] Når vi skriver: »Udtrykket $A(n;q)$ er et polynomium i n af graden $p+q$ o. s. v.«, er dette en kort skrivemåde for: »Udtrykket $A(n;q)$ kan i sit definitionsområde identificeres med et polynomium i n af graden $p+q$ o. s. v., og betegnelsen $A(n;q)$ vil i det følgende blive brugt også om dette polynomium.«

Under forudsætning af, at $\Lambda(n;q)$ er et polynomium, vil vi bestemme dettes form og egenskaber. Man ser, at (5) må gælde for alle n. Indsættes heri $n=m+1$, fås ved sammenligning med (5'), at $\Lambda(m,q)=0$. Indføres derefter i (5) for n efterhånden nulpunkterne $m, m-1, \ldots, m-q+1$ for polynomiet $\Lambda(n-1;q-1)$, ses det, at $\Lambda(n;q)$ har nulpunkter $m, m-1, \ldots, m-q$. Det bemærkes, at blandt disse sidste findes altid 0 og -1.

Ved indsætning af værdierne $1, 2, \ldots, n$ i (5) og addition af de fremkomne ligninger finder man

$$\Lambda(n;q) = \sum_{k=1}^{n} k^{p_q}\Lambda(k-1;q-1). \tag{6}$$

Ifølge induktionsforudsætningen har man

$$\Lambda(k-1;q-1) = \sum_{\nu=0}^{p-p_q+q-1} b_\nu k^\nu$$

med hovedkoefficienten

$$b_{p-p_q+q-1} = \prod_{\nu=1}^{q-1}\left(\nu+\sum_{i=1}^{\nu} p_i\right)^{-1}.$$

Dermed bliver

$$\Lambda(n;q) = \sum_{\nu=0}^{p-p_q+q-1}\sum_{k=1}^{n} b_\nu k^{\nu+p_q} = \sum_{\nu=p_q}^{p+q-1} a_\nu S_\nu(n), \tag{7}$$

hvor $a_\nu = b_{\nu-p_q}$, specielt $a_{p+q-1}=b_{p-p_q+q-1}$. Med S-polynomiernes egenskaber i erindring ser man heraf, at $\Lambda(n;q)$ må have graden $p+q$ og den i sætning 1 nævnte hovedkoefficient.

Vi kan nu omvendt indse, at det ved (7) bestemte polynomium $\Lambda(n;q)$ virkelig tilfredsstiller (3) for alle hele $n \geqq m+1$. For disse n-værdier kan man nemlig fra (7) over (6) slutte tilbage til (5') og (5) og derfra til (3).

Hvad ovenfor er sagt, kan på analog måde gennemføres, dersom K slutter med $k_{q-1} \leqq k_q$. Svarende til (5) og (5') får man her

$$\Lambda(n;q) - \Lambda(n-1;q) = n^{p_q}\Lambda(n;q-1) \tag{5a}$$

og

$$\Lambda(m+1;q) = (m+1)^{p_q}\Lambda(m+1;q-1), \tag{5'a}$$

hvorefter fremgangsmåden er den samme som før. Beviset for sætning 1 er dermed færdigt.

Med K^* betegnes den »komplementære« summationsforskrift til K, d. v. s. den, som fremkommer af K ved gensidig ombytning af tegnene $<$ og $\leqq$. Betegner altså K f. eks. $k_1 \leqq k_2 < k_3$, har K^* betydningen $k_1 < k_2 \leqq k_3$. Når som foran det til K svarende polynomium kaldes $\Lambda(n;q)$, betegner vi det til K^* svarende polynomium $\Lambda^*(n,q)$. Indeholder K som for m rene ulighedstegn, vil der i K^* forekomme $q-m-1$ sådanne, og vi har for $n \geqq q-m$:

$$\Lambda^*(n;q) = \sum_{K^*}^{n} k_1^{p_1}k_2^{p_2}\ldots k_q^{p_q}. \tag{3a}$$

Vi vil nu godtgøre, at den her anvendte betydning af en stjerne er i overensstemmelse med den i **1** benyttede. Der gælder nemlig

Sætning 2. *Polynomierne $\Lambda(n;q)$ og $\Lambda^*(n;q)$ er sammenknyttet ved relationen*

$$\Lambda(n-1;q) = (-1)^{p+q}\Lambda^*(-n;q). \tag{8}$$

Beviset føres som før ved induktion. På dette sted forudsættes kendt, at polynomierne $S_p(n)=S_p^*(n)$ tilfredsstiller den til (8) svarende relation

$$S_p(n-1) = (-1)^{p+1}S_p(-n). \tag{9}$$

Et bevis herfor er medtaget i **3**.

Sætning 2 er altså rigtig for $q=1$, og vi går over til $q>1$. Vi kan uden indskrænkning af bevisførelsen antage, at K slutter med $k_{q-1}<k_q$, og K^* altså med $k_{q-1}\leqq k_q$. Polynomierne $\Lambda(n;q)$ tilfredsstiller da (5) og (5'), medens polynomierne $\Lambda^*(n,q)$ tilfredsstiller (5a) og (5'a).

I identiteten (5) indsættes for n efter hinanden værdierne $1, 2, \ldots, n-1$, hvorefter man ved addition finder

$$\Lambda(n-1;q) = \sum_{k=1}^{n-1} k^{p_q}\Lambda(k-1;q-1), \tag{10}$$

der også fremgår af (6), når man erstatter n med $n-1$. Af (5a) fås på lignende måde for polynomierne $\Lambda^*(n;q)$, når man for n indsætter værdierne $-1, -2, \ldots, -n+1$:

$$-\Lambda^*(-n;q) = \sum_{k=1}^{n-1}(-k)^{p_q}\Lambda^*(-k;q-1),$$

d. v. s.

$$\Lambda^*(-n;q) = (-1)^{p_q+1}\sum_{k=1}^{n-1} k^{p_q}\Lambda^*(-k;q-1). \tag{11}$$

Efter induktionsforudsætningen gælder

$$\Lambda(k-1;q-1) = (-1)^{p-p_q+q-1}\Lambda^*(-k;q-1);$$

indføres dette i højre side af (10), så får man

$$\Lambda(n-1;q) = (-1)^{p-p_q+q-1}\sum_{k=1}^{n-1} k^{p_q}\Lambda^*(-k;q-1),$$

der ifølge (11) kan skrives

$$A(n-1;q) = (-1)^{p+q}A^*(-n;q),$$

altså formel (8).

Hertil vil vi endnu føje

SÆTNING 3. *$m, m-1, \ldots, m-q$ er samtlige heltallige nulpunkter i $A(n;q)$.*

Vi har allerede set, at $A(n;q)$ har de nævnte nulpunkter. På grund af (3) er $A(n;q)>0$ for alle hele $n>m$. Tilsvarende fås ved (8) og (3a), at $A(-n;q)=(-1)^{p+q}A^*(n-1;q)\neq 0$ for alle hele $n>q-m$, d. v. s. $-n<m-q$. Sammenfattes dette, ses sætning 3.

Vi vil derefter udtrykke polynomierne $A(n;q)$ og $A^*(n;q)$ ved hjælp af systemet (1). Af det i 1 fundne i forbindelse med sætning 1 følger, at vi på entydig måde kan udtrykke $A(n;q)$ og $A^*(n;q)$ ved

(12) $$A(n;q) = \sum_{i=q-m}^{p+q-m-1} \lambda_i \binom{n+i}{p+q}$$

og

(12a) $$A^*(n;q) = \sum_{i=m+1}^{p+m} \lambda_{p+q-i} \binom{n+i}{p+q}.$$

Rækken af koefficienter i (12a), læst fra højre mod venstre, er den samme som koefficientrækken i (12), læst fra venstre mod højre:

(12b) $$A^*(n;q) = \sum_{i=q-m}^{p+q-m-1} \lambda_i \binom{n+p+q-i}{p+q}.$$

Man bemærker, at antallet af koefficienter altid er lig p.

Lad os slutte dette afsnit med at omtale et konkret eksempel: For $K: k_1<k_2\leqq k_3$ finder vi for $p_1=p_2=p_3=1$:

(12c) $$A(n;3) = \lambda_2\binom{n+2}{6} + \lambda_3\binom{n+3}{6} + \lambda_4\binom{n+4}{6};$$

her er

$$\lambda_4 = A(2;3) = 4,\ \lambda_2 = A^*(2;3) = 2.$$

$A(n;3)$ har hovedkoefficienten $1/2\cdot4\cdot6=1/48$; multiplikation af identiteten (12c) med $6!=720$ og sammenligning af koefficienterne til leddene af højeste grad giver $\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4=15$. Vi må da have $\lambda_3=9$, hvormed

$$A(n;3) = 2\binom{n+2}{6} + 9\binom{n+3}{6} + 4\binom{n+4}{6}$$

og

$$A^*(n;3) = 4\binom{n+2}{6} + 9\binom{n+3}{6} + 2\binom{n+4}{6}.$$

Vi forlader her den almindelige teori og går over til at betragte nogle specielle tilfælde. Først skal $S_p(n)$-polynomierne omtales, og da 2 hviler på nogle af disse polynomiers egenskaber, vil vi i 3 give en fremstilling, der er logisk uafhængig af 2.

3. Potenssummerne $S_p(n)$.

Man kender formlen

$$S_1(n) = \sum_{a=1}^{n} a = \binom{n+1}{2},$$

og en simpel omskrivning af

$$S_2(n) = \sum_{a=1}^{n} a^2 = \tfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

giver

$$S_2(n) = \binom{n+1}{3} + \binom{n+2}{3}.$$

Vi vil finde tilsvarende formler for større p.[2]

Lad i det følgende k_i^p betegne talkoefficienter med $i=1,2,\ldots,p$. Vi betragter formelt

(13) $$S_p(n) = \sum_{i=1}^{p} k_i^p \binom{n+i}{p+1}.$$

Vor første opgave er da at vise, at skrivemåden (13) er mulig og entydig.

Af (13) fås

(14) $$\sum_{i=1}^{p} k_i^p \binom{n+i}{p+1} - \sum_{i=1}^{p} k_i^p \binom{n-1+i}{p+1} = n^p.$$

Da

$$\binom{n+i}{p+1} - \binom{n-1+i}{p+1} = \binom{n-1+i}{p},$$

giver (14)

(15) $$\sum_{i=1}^{p} k_i^p \binom{n-1+i}{p} = n^p;$$

indsættes heri efter hinanden værdierne $n=1,2,\ldots,p$, fås ligningssystemet

(15*) $$\left\{\begin{array}{ll} k_p^p\binom{p}{p} & = 1^p \\ k_p^p\binom{p+1}{p} + k_{p-1}^p\binom{p}{p} & = 2^p \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ k_p^p\binom{2p-1}{p} + k_{p-1}^p\binom{2p-2}{p} + k_{p-2}^p\binom{2p-3}{p} + \ldots + k_1^p\binom{p}{p} & = p^p. \end{array}\right.$$

---

[2] Disse formler er først angivet af Worpitzky [7]. De er også bevist af Piza [5]. Andre formler for potenssummerne er nylig angivet af J. Lohne i dette tidsskrift [3].

Her er p ligninger med p ubekendte; koefficientdeterminantens værdi er 1, hvorfor ligningssystemet har netop eet sæt løsninger. Dette viser, at udtryksmåden (13) er entydig, ifald den er mulig. Lad derfor k_i^p, $i = 1, 2, \ldots, p$, i det følgende være de ved (15*) bestemte tal.

Ifølge (15*) gælder (15) for $n = 1, 2, \ldots, p$; ved direkte indsætning ses den også at være rigtig for $n = 0$. Da begge sider af (15) er polynomier i n af højst p'te grad, må denne ligning derfor være en identitet. Nu er (15) ensbetydende med (14); endvidere fører addition af ligningerne (14) for det benyttede n og alle mindre, hele positive værdier tilbage til (13), således at også denne sidste ligning må være gyldig for alle hele, positive n.

Hermed er muligheden og entydigheden af (13) bevist. Tilbage står at beregne koefficienterne; inden dette sker, vil vi dog vise to egenskaber ved disse.

Efter det netop sagte er begge sider af (15) polynomier i n af netop p'te grad; multiplikation af denne identitet med $p!$ og sammenligning af koefficienterne til leddene af højeste grad giver

(16) $$\sum_{i=1}^{p} k_i^p = p!\,.$$

Endvidere gælder

(17) $$k_i^p = k_{p+1-i}^p\,.$$

Efter det i **1** sagte er (17) en følge af den allerede nævnte relation

(9) $$S_p(n-1) = (-1)^{p+1} S_p(-n)\,,$$

som vi derfor vil bevise nu. Af (14) findes

$$S_p(n) - S_p(n-1) = n^p\,,$$

og denne ligning må gælde for alle n. Sættes specielt $n = 1$, fås $S_p(0) = 0$, og $n = 0$ giver derpå, at også $S_p(-1) = 0$. Indsættes efter hinanden værdierne $-1, -2, \ldots, -n+1$, og adderes de fremkomne ligninger, findes

$$-S_p(-n) = \sum_{k=1}^{n-1} (-k)^p = (-1)^p \sum_{k=1}^{n-1} k^p = (-1)^p S_p(n-1)\,,$$

der er ensbetydende med (9).

Da $S_p(n) > 0$ for alle hele, positive n, så følger af (9), at $S_p(n)$ ikke kan have andre heltallige nulpunkter end 0 og -1, hvilket allerede er indeholdt som et specielt resultat i sætning 3.

Vi vil nu bevise, at koefficienten k_i^p bestemmes ved formlen

(18) $$k_i^p = \sum_{j=1}^{i} (-1)^{i-j} j^p \binom{p+1}{i-j}\,.$$

Dette sker ved direkte indsættelse i systemet (15*). Den i'te ligning i dette system kan skrives

$$k_1^p \binom{p+i-1}{i-1} + k_2^p \binom{p+i-2}{i-2} + \ldots + k_{i-1}^p \binom{p+1}{1} + k_i^p \binom{p}{0} = i^p\,,$$

eller, på kortere form:

$$\sum_{r=0}^{i-1} k_{i-r}^p \binom{p+r}{r} = i^p\,.$$

Indføres her k_{i-r}^p fra (18), fås

$$\sum_{r=0}^{i-1} \sum_{j=1}^{i-r} (-1)^{i-r-j} j^p \binom{p+1}{i-r-j} \binom{p+r}{r} = i^p\,.$$

Denne ligning skal altså vises at være rigtig. Ombytning af summationernes rækkefølge giver

(19) $$\sum_{j=1}^{i} (-1)^{i-j} j^p \sum_{r=0}^{i-j} (-1)^r \binom{p+1}{i-j-r} \binom{p+r}{r} = i^p\,.$$

For at godtgøre dette betragter vi identiteten

$$(1+x)^{p+1}(1+x)^{-p-1} = 1\,,$$

der (for $|x| < 1$) kan skrives

$$\sum_{q=0}^{\infty} \binom{p+1}{q} x^q \cdot \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \binom{p+r}{r} x^r = 1\,.$$

Søges her koefficienten til x^n på begge sider af lighedstegnet, fås

$$\sum_{r=0}^{n} (-1)^r \binom{p+1}{n-r} \binom{p+r}{r} = \begin{cases} 0 \text{ for } n > 0 \\ 1 \text{ for } n = 0\,. \end{cases}$$

Med benyttelse heraf er rigtigheden af (19) — og dermed også af (18) — klar.

Af (18) kan alle koefficienter k_i^p beregnes. Specielt ses — med benyttelse af (17) —, at for alle p er $k_1^p = k_p^p = 1$. For de øvrige værdier af i gælder relationen

(20) $$k_i^p = (p+1-i)\,k_{i-1}^{p-1} + i k_i^{p-1}, \quad 2 \leq i \leq p-1\,.$$

Dette indses, når man for de to k'er på højre side indsætter de ved (18) bestemte værdier og reducerer; man får da netop udtrykket (18) for k_i^p. Reduktionens detaljer forbigås her.

Det ses, at (20) medfører, at alle koefficienterne k_i^p er positive. Det bemærkes iøvrigt, at hvis vi definitionsmæssigt sætter $k_0^p = k_p^{p-1} = 0$, så gælder (20) også for $i = 1$ og $i = p$.

Ved hjælp af (20) kan man angive en simplere beregningsmåde for koefficienterne k_i^p, idet disse stilles op i et skema analogt med Pascals trekant; tallene i enhver række svarer til en bestemt p-værdi, som er anført helt ude til højre. Det i'te tal i den p'te række er k_i^p. Skemaet betyder således for eksempel for $p=5$, at

$$\sum_{a=1}^{n} a^5 = \binom{n+1}{6} + 26\binom{n+2}{6} + 66\binom{n+3}{6} + 26\binom{n+4}{6} + \binom{n+5}{6}.$$

Eulerian
now A8292

A460

										p
1									1	
2	1								2	1
3	1	1							3	2
4	1	4	1						4	3
5	1	11	11	1					5	4
6	1	26	66	26	1				6	5
7	1	57	302	302	57	1			7	6
8	1	120	1191	2416	1191	120	1		8	7
	1	247	4293	15619	15619	4293	247	1		8

Umiddelbart uden for selve koefficienttrekanten er til begge sider anbragt tal 1, 2, . . . ; disse tal skal være koordinater for de søjler, der udgående fra ethvert tal går skråt nedad til højre, resp. venstre. Koordinaten til en sådan søjle er p-værdien for det ettal, der står øverst i søjlen. Hvert tal i skemaet får derved to koordinater; tallet k_i^p står i den p'te række som nr. i fra venstre og får derfor koordinaterne $(p+1-i, i)$. F. eks. har $k_2^7=120$ (i skemaets venstre halvdel) koordinaterne (6,2), medens $k_6^7=120$ (i skemaets højre halvdel) har koordinaterne (2,6).

Formel (20) giver en simpel opbygningsregel for tabellen: hvert indre k_i^p kan findes ud fra de to nærmeste tal i rækken ovenfor, idet hvert af disse tal ganges med den fælles koordinat til tallet selv og k_i^p, hvorefter de to produkter adderes. Til eks. er

$$k_4^8 = 15619 = 5\cdot 1191 + 4\cdot 2416.$$

Metoden giver således ret nemt koefficienterne for selv forholdsvis store værdier af p.[3]

[3] Ifølge [6] og [7] har allerede Euler betragtet de tal, der her er betegnet k_i^p. Ifølge [5] har prof. Øystein Ore foreslået betegnelsen »Kummer-tal« for disse koefficienter, fordi Kummer har arbejdet en del med dem. Både Worpitzky og Piza angiver den her gengivne rekursionsformel (20).

4. Polynomiet $\prod_{k=1}^{n}(x+k)$. Vi betragter polynomiet

$$\prod_{k=1}^{n}(x+k) = \sum_{q=0}^{n} L_q(n)x^{n-q};$$

da er for $q \geq 1$

$$L_q(n) = \sum_{K}^{n} k_1 k_2 \ldots k_q, \tag{21}$$

hvor der i K kun forekommer rene ulighedstegn. Det følger da af den almindelige teori i **2**, at $L_q(n)$ er et polynomium i n, og at dette polynomium har graden $2q$ og hovedkoefficienten $1/(2q)!!$.[4]

Antallet m af ulighedstegn i summationsforskriften K er lig $q-1$; vi ved da, at $q-1, q-2, \ldots, 0, -1$ er samtlige heltallige nulpunkter i $L_q(n)$.

Af den almindelige teori følger endvidere, at der findes entydigt bestemte koefficienter h_i^q, således at der gælder identiteten

$$L_q(n) = \sum_{i=1}^{q} h_i^q \binom{n+i}{2q}. \tag{22}$$

Indsættes nu efter hinanden værdierne $q, q+1, \ldots, 2q-1$ for n i (22), fremkommer følgende ligningssystem:

$$\left\{\begin{array}{ll} h_q^q\binom{2q}{2q} & = L_q(q) \\ h_q^q\binom{2q+1}{2q} + h_{q-1}^q\binom{2q}{2q} & = L_q(q+1) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ h_q^q\binom{3q-1}{2q} + h_{q-1}^q\binom{3q-2}{2q} + \ldots + h_1^q\binom{2q}{2q} & = L_q(2q-1). \end{array}\right. \tag{22*}$$

Ved sammenligning af (22*) med ligningssystemet (15*) og dettes løsning ser man, at der må gælde

$$h_{q-i}^q = \sum_{j=0}^{i} (-1)^{i-j}\binom{2q+1}{i-j} L_q(q+j). \tag{23}$$

Vi kan også her skrive koefficienterne op i et skema analogt med Pascals trekant; det i'te tal i den q'te række er h_i^q.

[4] Man har definitionsmæssigt $(2n)!! = 2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot(2n-2)\cdot 2n$ og $(2n-1)!! = 1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot(2n-3)(2n-1)$. (Se f. eks. I. P. Natanson: Konstruktive Funktionentheorie, p. 9, Berlin 1955.)

16 Please enter 2.

2538
2539

Δ = 8517

q								
1	1							
2	1	2						
3	1	8	6					
4	1	22	58	24				
5	1	52	328	444	120			
6	1	114	2436	4400	3708	720		
7	1	240	8562	68360	58140	33976	5040	
8	1	494	28806	376184	1042660	785256	341064	40320

Vi vil vise nogle egenskaber ved disse koefficienter. Af $L_q(q) = q!$ følger $h_q^q = q!$; endvidere er $h_1^q = 1$ for alle q. For at vise dette sidste bemærker vi, at ligningen (8), der her bliver

$$L_q(n-1) = L_q^*(-n),$$

sammenholdt med (22) giver, i overensstemmelse med (12) og (12b),

$$L_q^*(n) = \sum_{i=1}^{q} h_i^q \binom{n+2q-i}{2q}. \tag{22a}$$

Da nu $L_q^*(1) = 1$, så findes $h_1^q = 1$ ved indsættelse af værdien $n = 1$ i (22a).

Multiplikation af ligningen (22) med $(2q)!$ og sammenligning af koefficienterne til leddene af højeste grad giver

$$\sum_{i=1}^{q} h_i^q = (2q-1)!!; \tag{24}$$

den samme ligning (24) følger også ved induktion ud fra den nedenfor beviste, for $1 < i < q$ gyldige ligning

$$h_{q-i}^q = (q+i)h_{q-i-1}^{q-1} + (q-i)h_{q-i}^{q-1}. \tag{25}$$

Ved hjælp af (25) kan man også vise, at der gælder $h_2^q = 2k_2^q$, hvor k_2^q er den i **2** definerede koefficient.

I beviset for relationen (25) benytter vi, at dersom for $0 \leq j \leq i$

$$A(j) = (q+i)\binom{2q-1}{i-j} - (q-i)\binom{2q-1}{i-1-j},$$

idet specielt $\binom{2q-1}{-1}$ regnes for at være 0, så gælder for $0 \leq j \leq i-1$

$$\frac{A(j)}{q+j} + \frac{A(j+1)}{q+j+1} = \binom{2q+1}{i-j}.$$

Dette kan godtgøres ved en direkte indsættelse og reduktion, som forbigås.

Af (23) fås

$$h_{q-i-1}^{q-1} = \sum_{j=0}^{i} (-1)^{i-j}\binom{2q-1}{i-j} L_{q-1}(q-1+j)$$

$$h_{q-i}^{q-1} = \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^{i-1-j}\binom{2q-1}{i-1-j} L_{q-1}(q-1+j),$$

hvor man i sidste ligning gerne kan summere helt til i. Vi vil, ved at benytte højresiderne af disse to ligninger, vise, at udtrykket

$$S = (q+i)h_{q-i-1}^{q-1} + (q-i)h_{q-i}^{q-1}$$

er lig højre side af (23). Vi finder straks

$$S = \sum_{j=0}^{i} (-1)^{i-j} A(j) L_{q-1}(q-1+j).$$

Da imidlertid

$$L_q(q+j) = L_q(q+j-1) + (q+j)L_{q-1}(q+j-1)$$

og altså

$$L_{q-1}(q+j-1) = \frac{1}{q+j}\big(L_q(q+j) - L_q(q+j-1)\big),$$

så bliver

$$S = \sum_{j=0}^{i} (-1)^{i-j} \frac{A(j)}{q+j}\big(L_q(q+j) - L_q(q+j-1)\big)$$

$$= \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^{i-j}\left(\frac{A(j)}{q+j} + \frac{A(j+1)}{q+j+1}\right) L_q(q+j) + L_q(q+i)$$

$$= \sum_{j=0}^{i} (-1)^{i-j}\binom{2q+1}{i-j} L_q(q+j) = h_{q-i}^q.$$

Hermed er ligningen (25) bevist; det tilføjes, at dersom vi ind[…] $h_0^q = h_{q+1}^q = 0$, så gælder (25) også for $i = 1$ og $i = q$. Ligningen kan, når går ud fra $h_1^1 = 1$, benyttes til beregning af koefficienterne. Man bemæ[…] at det af (25) følger, at alle koefficienter h_i^q er positive.

Vi kan nu udtrykke polynomiet $\prod_{k=1}^{n}(x+k)$ ved

$$\prod_{k=1}^{n}(x+k) = x^n + \binom{n+1}{2}x^{n-1}$$

$$+ \left[\binom{n+1}{4} + 2\binom{n+2}{4}\right]x^{n-2} + \ldots + \sum_{i=1}^{q} h_i^q \binom{n+i}{2q} x^{n-q} + \ldots +$$

hvor koefficienterne h_i^q er tallene i den q'te række i den anførte koefficienttrekant.[5]

5. Bernoullis tal. De foran anførte eksempler på forskellige klasser af polynomier kan suppleres med flere; jeg skal dog afstå derfra, da disse eksempler, skønt interessante i sig selv, i deres behandling ikke afviger ret meget fra det allerede sagte.

Imidlertid kan de metoder, der er anvendt i det foregående, også benyttes til at finde formler af helt andre typer. Man kan således finde adskillige eksplicite formler for Bernoullis tal B_ν på den måde, at man udtrykker Bernoullis polynomium $B_\nu(n)$ ved et passende system af lineært uafhængige polynomier, hvorefter det konstante led opsøges.

Vi vil her nøjes med at vise, hvorledes B_ν kan udtrykkes ved koefficienterne k_i^ν; med principielt samme metoder kan man imidlertid udtrykke B_ν ved polynomierne $L_q(n)$ eller ved tallene h_i^ν.

$B_\nu(n)$ er entydigt bestemt ved at skulle have graden ν og tilfredsstille betingelserne [1, p. 173]

$$B_\nu(x+1) - B_\nu(x) = \nu x^{\nu-1}, \quad \nu = 0, 1, 2, \ldots,$$

og

$$B'_\nu(x) = \nu B_{\nu-1}(x) \qquad , \quad \nu = 1, 2, \ldots .$$

B_ν defineres som det konstante led i $B_\nu(n)$.

Som følge af de opstillede betingelser for $B_\nu(n)$ må der gælde

$$B_{\nu+1}(n+1) = (\nu+1) S_\nu(n) + B_{\nu+1} ;$$

ved differentiation heraf finder man

$$B'_{\nu+1}(n+1) = (\nu+1) S'_\nu(n) ,$$

hvoraf

$$(\nu+1) B_\nu(0) = (\nu+1) S'_\nu(-1) ,$$

d. v. s.

$$B_\nu = S'_\nu(-1) .$$

Nu er

$$S'_\nu(n) = \sum_{i=1}^{\nu} k_i^\nu \frac{d}{dn} \binom{n+i}{\nu+1}$$

og derfor

$$S'_\nu(-1) = \sum_{i=1}^{\nu} k_i^\nu \frac{(i-1)!\,(\nu+1-i)!}{(\nu+1)!} (-1)^{\nu+1-i} = \frac{1}{\nu+1} \sum_{i=1}^{\nu} (-1)^{\nu+1-i} \frac{k_i^\nu}{\binom{\nu}{i-1}}$$

eller, når i ombyttes med $\nu+1-i$:

$$B_\nu = \frac{1}{\nu+1} \sum_{i=1}^{\nu} (-1)^i \frac{k_i^\nu}{\binom{\nu}{i}} .^{6}$$

Indføres heri udtrykket (18) for k_i^ν, finder man

$$B_\nu = \frac{1}{\nu+1} \sum_{i=1}^{\nu} \sum_{j=1}^{i} (-1)^j j^\nu \frac{\binom{\nu+1}{i-j}}{\binom{\nu}{i}} .$$

LITTERATUR

[1] Andersen—Bohr—Petersen: *Lærebog i matematisk analyse, IV.* København 194

[2] C. Caratheodory: *Funktionentheorie.* Basel 1950.

[3] J. Lohne: *Potenssummer av de naturlige tall.* NMT 6 (1958), pp. 155–158. Smlgn. og det følgende tillæg af R. Tambs Lyche, pp. 159–161.

[4] N. E. Nørlund: *Om Bernoulli-polynomierne.* Mat. Tidsskr. B, 1919, pp. 33–48.

[5] P. A. Piza: *Kummer numbers.* Mathematics Magazine 21 (1948), pp. 257–261. (Pacoim Calif.)

[6] L. Saalschütz: *Vorlesungen über die Bernoullischen Zahlen.* Berlin 1893.

[7] J. Worpitzky: *Studien über die Bernoullischen und Eulerschen Zahlen.* Journal f die r. u. a. Math. 94 (1883), pp. 203–231 (Crelles Journal).

[5] Worpitzky har også betragtet tallene h_i^q; han angiver ikke rekursionsformlen for dem, men siger blot, at en sådan kan findes.

[6] Denne formel er angivet af Worpitzky, som også viser andre formler for B_ν af lignen karakter.

ETT NORDISKT SYMPOSIUM

över användningen av matematikmaskiner (operationsanalys, databehandling, tekniska problem) med huvudvikt på siffermaskiner anordnas i Karlskrona av Matematikmaskinnämnden och Kungl. Örlogsmannasällskapet den 14–15 maj 1959. Ett antal föreläsare har inbjudits att hålla föredrag av översiktskaraktär. Symposiet omfattar även en avdelning föredrag inriktade på speciella problem.

I samband med symposiet arrangeras en utställning av utrustning på matematikmaskinområdet. Utfärder samt särskilt damprogram kommer också att anordnas. Program med anmälningsblankett utsändes omkring den 10 mars. Närmare informationer lämnas av byråchef G. Hävermark, Matematikmaskinnämnden, Box 6131, Stockholm 6, tel. 23 55 90, eller kommendörkapten Y. Rollof, Örlogsvarvet, Karlskrona, tel. 19440.

INTERNATIONELLA MATEMATIKERKONGRESSEN 1962

Svenska Nationalkommitten för matematik och Svenska Matematikersamfundet har utsänt detta upprop:

To mathematicians of all countries.

The Swedish National Committee of Mathematics and the Swedish Mathematical Society have the honour of inviting you to the next international congress of mathematicians, to be held in Stockholm during the summer of 1962.

We will do our best to make the congress scientifically successful and enjoyable, hoping that it will stimulate the interaction between mathematicians in different fields and countries.

SUMMARY IN ENGLISH

Ove J. Munch: *Sums of products of powers.* (Danish.)

The author considers sums of the form

$$\Lambda(n;q) = \sum_K^n k_1^{p_1} k_2^{p_2} \cdots k_q^{p_q}, \qquad p_1 + p_2 + \cdots + p_q = p,$$

where always $1 \leqq k_i \leqq n$, and where K denotes a rule of summation of the type $k_1 {}_{(\leqq)} k_2 {}_{(\leqq)} \cdots {}_{(\leqq)} k_q$, including m pure inequalities. It is shown that $\Lambda(n;q)$ is a polynomial in n of degree $p+q$, with zeros $m, m-1, \ldots, m-q$ (and only these integer zeros), and with the leading coefficient

$$\prod_{\nu=1}^{q} \left(\nu + \sum_{i=1}^{\nu} p_i\right)^{-1}.$$

If K^* denotes the rule of summation resulting from K by interchanging the signs $<$ and $\leqq$, and if $\Lambda^*(n;q)$ is the corresponding sum, then

$$\Lambda(n-1;q) = (-1)^{p+q} \Lambda^*(-n;q).$$

The two sums can be represented in terms of binomial coefficients:

$$A(n;q) = \sum_{i=q-m}^{p+q-m-1} \lambda_i \binom{n+i}{p+q}, \quad A^*(n;q) = \sum_{i=m+1}^{p+m} \lambda_{p+q-i} \binom{n+i}{p+q},$$

where each sum contains p terms.

As applications of the general theory, the author gives new proofs of some results of Worpitzky concerning the sums

$$S_p(n) = \sum_{k=1}^{n} k^p = \sum_{i=1}^{p} k_i^p \binom{n+i}{p+1}, \quad L_p(n) = \sum_{K}^{n} k_1 k_2 \ldots k_q = \sum_{i=1}^{q} h_i^q \binom{n+i}{2q},$$

where K contains only pure inequalities. The coefficients satisfy the following relations:

$$k_i^p = k_{p+1-i}^p; \; k_1^p = k_p^p = 1; \quad k_i^p = (p+1-i)k_{i-1}^{p-1} + ik_i^{p-1}, \quad 2 \leqq i \leqq p-1$$
$$h_1^q = 1, \; h_q^q = q!; \quad h_{q-i}^q = (q+i)h_{q-i-1}^{q-1} + (q-i)h_{q-i}^{q-1}, \quad 2 \leqq i \leqq q-1 .$$

The recurrence formulas give rise to a simple calculation of the coefficients, in analogy with Pascal's triangle.

It is finally shown that the Bernoulli numbers B_ν can be expressed as

$$B_\nu = \frac{1}{\nu+1} \sum_{i=1}^{\nu} \sum_{j=1}^{i} (-1)^j j^\nu \frac{\binom{\nu+1}{i-j}}{\binom{\nu}{i}} .$$

VIGGO BRUN: *An application of a "carpenter's curve" to Simpson formulas.* (English.)

A "carpenter's curve" is defined by cutting off corners of a polygon in a suitable manner, cf. figs. 1–2 p. 21. A simple formula for the area enclosed in such a curve is derived. The result is used for approximate integration by three and four *non-equidistant* ordinates, leading to new proofs of formulas given earlier by the author and by Selmer.—A "carpenter's surface" resulting from a polyhedron is also defined.

ERNST S. SELMER: *A note on the preceding paper by V. Brun.* (English.)

It is shown that two of Brun's approximate integration formulas are immediate consequences of another method which has earlier been used by the author.

FR. FABRICIUS-BJERRE: *On linearly-monotone elementary curves.* (Danish.)

Given an oriented plane curve AB and a line l, which have the points $P_1, P_2, \ldots, P_m$ in common. The curve AB is called linearly-monotone if, for every line l, the points $P_1, P_2, \ldots, P_m$ are placed in the same order on the curve as on the line. A linearly-monotone curve has no double point but there may be inflectional and cuspidal points. No part of the curve may be a spiral.

M. Barner has called a curve strongly-convex at a point P if there exists a line through P, different from the tangent, which has no other point than P in common with the curve.

The main theorem of the article says that a curve which is composed of a finite number of convex arcs (an elementary curve), is linearly-monotone if and only if the curve is strongly-convex at every ordinary point.