日本取引所グループ
JAPAN EXCHANGE GROUP

JPX WORKING PAPER

JPXワーキング・ペーパー

証券流通市場の流動性向上が投資家の効用に与える影響

南雲 将太
一木 信吾

2018年12月11日

Vol. 24

証券流通市場の流動性向上が投資家の効用に与える影響 *

南雲 将太 †　　　一木 信吾 ‡

2018 年 12 月 11 日

概要

証券流通市場において，流動性向上が市場にいる投資家全体にとって是か否かは必ずしも自明ではない．流動性向上により，取引全体においてより有利な価格での約定機会が増える一方，競合となる注文が増えることで既存投資家の取引機会が奪われる可能性もあるからである．

本研究では，証券流通市場の流動性向上が投資家の効用に与える影響について，数学的に分析した．特に板寄せ方式と呼ばれるオークション形式を対象に簡易なモデルを構築し，投資家の効用を約定価格と評価額の差額と定義することで，投資家の効用の期待値を解析的に導出した．

その結果，板寄せ時において，投資家の数が増えるほど市場全体の効用及び一投資家の平均効用が増えることが，数式で明示的に示された．また，板寄せ時において，参加している既存投資家の多い銘柄よりも少ない銘柄の方が，投資家人数が増えたときの効用の伸びが大きいことも同時に示された．

---

* 本稿の作成に当たっては，日本取引所グループ等のスタッフから有益なコメントを頂いた．ここに深く感謝申し上げる．

† 株式会社日本証券クリアリング機構 兼 株式会社日本取引所グループ総合企画部主任研究員（s-nagumo@jpx.co.jp）．

‡ 株式会社日本証券クリアリング機構 兼 東京大学先端科学技術研究センター協力研究員（s-ichiki@jpx.co.jp）．

1　はじめに

1.1　背景

通常，証券市場の制度設計やマーケットマイクロストラクチャーの研究において，流動性向上が是であることは所与の前提とされている．例えば JPX ワーキングペーパーの中だと，草田 et al.(2015) や宮﨑 (2016) は，流動性向上を志向した制度設計を日本取引所グループへ提言している．実際，日本取引所グループは，現物・派生商品ともに流動性の高い市場を提供することを中期経営計画に掲げている[*1]．また，流動性向上が投資家の効用増加に資することを所与の前提としているマーケットマイクロストラクチャーの研究としては，例えば，水田 et al.(2013)，草田 et al.(2014)，草田 et al.(2015) がある．これらは，投資家が流動性の高い市場へ注文を入れるインセンティブがあることを前提に，市場間競争を論じたシミュレーション研究である．また，同前提を保った簡易モデルを解析的に分析することで，南雲 et al.(2017) は水田 et al.(2013) を数学的に説明している．

しかしながら，流動性向上により，取引全体においてより優先価格で約定される機会が増える一方，競合となる注文が増えることで取引機会を奪われる既存投資家も存在することを鑑みると，流動性向上により投資家の平均的な利益が上がるか否かは，必ずしも自明ではない．これは簡単な例 (図 1) を用いることで理解できる．(a) では市場に注文 A と B しか存在せず，注文 A と B が約定する．(b) では (a) よりも 1 注文だけ流動性が向上し，注文 C が新たに加わったものとなる．(b) の場合，注文 A は，注文 B より有利な価格である注文 C と約定されるため，注文 A の効用は (a) の場合よりも大きくなる．しかし (b) の場合，注文 B の約定機会は注文 C によって奪われたという見方もできる．従って，「(a) での注文 A・B の効用の合計」と「(b) での注文 A・B・C の効用の合計」の大小関係，さらには「(a) での注文 A・B の効用の平均」と「(b) での注文 A・B・C の効用の平均」の大小関係は，自明でない．仮に (b) の場合の効用の方が (a) の場合よりも小さくなるのであれば，流動性向上を是とする前提が正しいとは必ずしも言えなくなる．

昨今，ミリ秒単位の頻繁な売買で利ざやを積み上げるような高速かつ高頻度の取引形態 (High Frequency Trade, HFT) が議論の的となることが多い．HFT は流動性供給主体である (保坂 (2014)) が，HFT による既存投資家への影響を理解するためにも，流動性と投資家の利益の関係について分析

(a)

売り	価格	買い
	110	
	100	注文B
注文A	90	

(b)

売り	価格	買い
	110	注文C
	100	注文B
注文A	90	

図 1　(a) 市場に注文 A と B の 2 注文しか存在しない場合．(b) 流動性が向上し注文 C が追加された場合．

[*1] https://www.jpx.co.jp/corporate/investor-relations/management/mid-business-plan/index.html

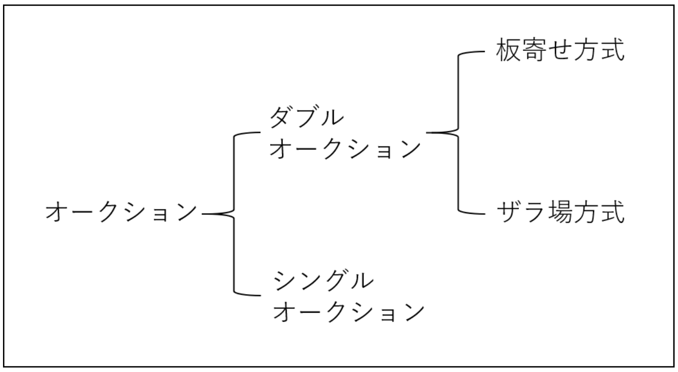

図 2　オークションの分類.

することは重要であると考える．本研究では流動性を市場に参加する投資家数として定義し，各投資家は 1 単位のみの注文を出すというモデルを考える．この前提のもと，投資家数の増加が投資家の利益に資するか否かを数学的に議論する．

1.2　オークションの種類とルール

本研究で扱うオークションの対象を明確化するために，オークションの種類について概説する．オークションは図 2 のように分類される (坂井 (2010)，Parsons et al.(2006))．

まず，オークションはシングルオークションとダブルオークションに大別される．シングルオークションは一人の売り手が出品する財に対して複数の買い手が入札し落札が決定される形式であり，ネットオークションや政府による国債発行が典型例である．ダブルオークションは複数の売り手と複数の買い手の提示価格により取引が決定される形式であり，証券流通市場が典型例である．

ダブルオークションは，ザラ場方式と板寄せ方式に分けられる．

ザラ場方式は，売り手と買い手の提示価格が合致すると直ちに取引が成立する形式である．図 3 の流れに沿って説明する．時刻 t_0 以前には注文 A,B,C が提示されていて，時刻 t_0 に売り注文 D が新たに提示される．このとき売り注文 D は，最も高い買い注文 C の価格 90 よりも高いため，約定しない．時刻 t_1 にさらに価格 80 で売り注文 E が提示されるが，これは最も高い買い注文 C の価格 90 よりも安い

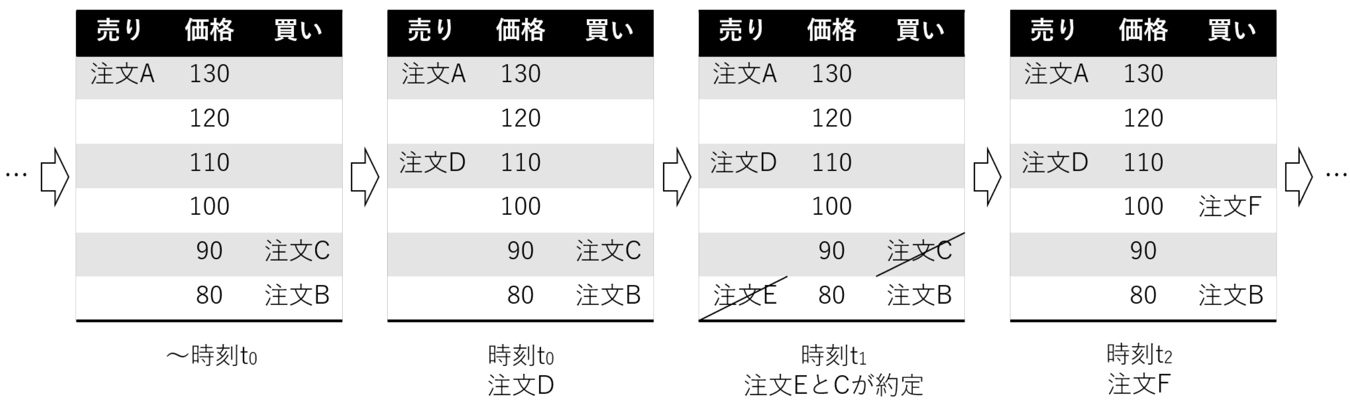

図 3　ザラ場方式.

売り	価格	買い
	130	注文A
	120	注文B
注文C	110	
注文D	100	
注文E	90	
	80	注文F

板寄せ前

板寄せ

売り	価格	買い
	130	
	120	
注文C	110	
	100	
	90	
	80	注文F

板寄せ後

図 4　板寄せ方式.

ため，注文 E と注文 C が即時約定される．その後，時刻 t_2 に買い注文 F が提示されるが，これは，約定されずに残っている注文の中で最も安い売り注文 D の価格 110 よりも安いため約定しない．このようにザラ場方式では，注文の売り買い別・注文価格・注文時刻によって，約定の成否が決定する．

板寄せ方式は，ある期間に注文を成立させず注文の受付のみ行い，集まった売り手と買い手の注文を同時に約定させる形式である．図 4 の場合，板寄せ前に注文 A, B, ⋯, F を受け付けている．板寄せにより，より高い買い注文 A,B とより安い売り注文 D,E が約定され，注文 C,F が約定されず残る．このように板寄せ方式では，注文の売り買い別・注文価格によって，約定の成否が決定する[*2]．なお，各取引所によって約定価格の決め方のルールは異なる[*3]が，本研究では約定価格に依らない一般の場合について示している．

図 3 や図 4 のように，約定しなかった注文はその後の約定待ちリストに提示されることになるが，このリストのことを「板 (オーダーブック)」と呼ぶ．

日本取引所グループにおける現物市場と派生商品市場はともに，取引時間の開始時と終了時に板寄せ方式により取引を成立させ，その間はザラ場方式により取引を成立させるという制度を採用している (東京証券取引所 (2001)，大阪取引所 (2018a)，大阪取引所 (2018b))．日本取引所グループでは採用されていないが，板寄せ方式を連続的に繰り返すバッチオークション方式という制度も存在する (Budish et al. (2015)，水田・和泉 (2016))．

本研究ではダブルオークションのうち板寄せ方式を対象とする．

1.3　先行研究と本研究の位置付け

オークション理論は，実際のオークションを簡易なモデルで表現し効用を定義することで，数学的にオークションを分析する学問である．本研究は，オークション理論で使われる財の評価額の定義や効用の定義を用いるものとする．

[*2] ただし，板寄せ方式であっても，注文の売り買い別と注文価格が他の注文と同じ場合には，ザラ場方式と同様に注文時刻が約定の成否を決める．

[*3] 日本取引所グループにおいては，一回の板寄せで単一の約定価格が設定される．

オークション理論の先駆的研究は Vickrey(1961) であり，シングルオークションにおける収入同値定理[*4]を証明した．それを契機にオークション理論の研究は進展し，1990 年代から各国で実施された周波数オークションにおいては，効率的な周波数割り当てを実現するようなオークションの制度設計に貢献した．こうした経緯から Vickrey は 1996 年にノーベル賞を受賞している (坂井 (2014))．シングルオークションのうち，政府による国債の発行と中央銀行による公開市場操作，新規株式公開といった金融市場の分析にもオークション理論は応用されていて，それらの研究を上田 (2010) がサーベイしている．

ダブルオークションに関するオークション理論の大きな成果は，Myerson and Satterthwaite(1983) である．彼らはダブルオークションにおける不可能性[*5]を証明した．また，ダブルオークションに関するサーベイとしては，Parsons et al.(2006) が存在する．

本研究では, ダブルオークションのうち証券流通市場を対象とする．シングルオークションにおいてプレイヤーの人数と効用の関係に注目したオークション理論の研究としては Bulow and Klemperer(1996) [*6]があるが，筆者の知る限り，ダブルオークションにおいてプレイヤーの数と各プレイヤーの効用の関係について論じた研究は存在せず，この点が本研究の新規性である．

構成は次のとおりである．第 2 章において，本研究で用いるモデルの説明及び効用の定義を行う．第 3 章では，市場全体の効用及び一投資家の平均効用を解析的に導出する．第 4 章において，解析解からの示唆及び日本取引所グループが採るべき施策について考察する．ここまでの本論としては板寄せ方式を分析の対象とするが，最後に補論においてザラ場方式を扱うための指針を示す．

2 モデル

2.1 板寄せ方式のモデル化

1.2 節で述べたとおり，ダブルオークションには大きく分けて板寄せ方式とザラ場方式が存在するが，本モデルでは板寄せ方式を想定する．ある一銘柄の板を考えるが，銘柄固有の情報は本モデルでは持たないものとする．

まず，n 人の投資家が 1 単位ずつ指値注文[*7]を入れていくとする．このとき，各投資家の注文の売り買いは，確率 1/2 でランダムに決まるとする．また，Vickrey(1961) 以降のオークション理論にならい，

---

*4 シングルオークションに関して，一定の仮定のもとでは，売り手の得る期待効用がオークション方式に依存しないこと．オークション理論における最重要成果の一つである．Vickrey(1961) は評価額が一様分布に従うと想定し，封印入札オークションの第一価格方式と第二価格方式の同値性を示した．より一般的なケースに関しては，Myerson(1981) と Riley and Samuelson(1981) によって証明された．

*5 上位落札性・耐戦略性・個人合理性・予算バランスの全てを満たすオークションルールが存在しないこと．Myerson and Satterthwaite(1983) は 1 人の売り手と 1 人の買い手のみが存在するダブルオークションを対象としたが，Wilson(1985) により複数の投資家が存在するダブルオークションへと一般化された．
・上位落札性: プレイヤー内の最良価格で約定される．
・耐戦略性: 他のプレイヤーの注文に係らず，自分の評価額に正直に注文を入れることが最適である．
・個人合理性: 自分の注文価格以下で売る，もしくは注文価格以上で買う，ということがない．
・予算バランス: オークション内で金銭のやりとりが閉じている．

*6 「買い手が n 人のときに最適な留保価格 (これ以上は安く売らないという価格) を設定する売り手の効用よりも，買い手が $n+1$ 人のときの売り手の効用の方が大きい」ことを証明した．

*7 指値注文: 値段を指定する注文．即時約定しない場合には板に残り，その後の約定を待つことになる．
成行注文: 板の中に存在する最良価格 (売りであれば最安値，買いであれば最高値) の注文と約定させる注文．

売り	価格	買い
	高	
	x_A	注文A
	x_B	注文B
注文C	x_C	
注文D	x_D	
注文E	x_E	
	x_F	注文F
	安	

図 5　投資家が $n = 6$ 人であるときの例.

各投資家の指値価格は一様分布 U(0,1) に従ってランダムに決まるものとする．分布は各々独立であるとし，つまり，各々の投資戦略は他の投資行動に依存しないとしている．

n 人の注文の売り買いの別と価格が決定した後,「最良買い価格≧最良売り価格」である注文の組合せを順次約定させていき,「最良買い価格＜最良売り価格」となった時点で板寄せ完了とする.

現実の板寄せ方式では注文価格が等しい場合，注文時刻の早いものを優先して約定させるが，本モデルでは価格の取りうる値を $(0, 1)$ 区間の実数で考えているため，同じ価格へ複数の指値注文が入る確率は 0 である．従って本モデルでは，時間の要素を取り入れず，価格の要素のみを取り入れていることになる．また，成行注文についても想定しない.

図 5 を用いて説明する．いま投資家が $n = 6$ 人であると仮定し，それぞれの注文を A, B, ⋯,F，それらの価格を $x_{\mathrm{A}}, x_{\mathrm{B}}, \cdots, x_{\mathrm{F}}$ とする $(x_{\mathrm{A}} > x_{\mathrm{B}} > \cdots > x_{\mathrm{F}})$．また，売り買いの状況は図 5 のとおりである．このとき，まず初めに最良買い価格である A と最良売り価格である注文 E が約定する．次に，板に残った注文のうち，最良買い価格である注文 B と最良売り価格である注文 D が約定することになる．注文 C と注文 F は約定しない．つまりこの例での約定回数は 2 回である.

2.2　効用の定義

本モデルでは，買い約定した投資家の効用を「当銘柄に対する評価額-約定価格」，売り約定した投資家の効用を「約定価格-当銘柄に対する評価額」で定義する．約定しなかった投資家の効用は 0 であるとする．投資家の効用を評価額と約定価格の差額とする方法は，Vickrey(1961) 以降のオークション理論でしばしば用いられる一般的な定義である．また，各投資家は欲を出さず，各銘柄に対する評価額でそのまま指値注文を出すと想定する．つまり,「評価額=指値価格」は，前述のとおり一様分布によりランダムで決まる.

図 5 の例に戻ると，約定価格を X として，注文 A による効用は $x_{\mathrm{A}} - X$，注文 B による効用は $x_{\mathrm{B}} - X$，注文 C による効用は 0，注文 D による効用は $X - x_{\mathrm{D}}$，注文 E による効用は $X - x_{\mathrm{E}}$，注文 F による効用は 0 となる．市場全体の効用の合計は $x_{\mathrm{A}} + x_{\mathrm{B}} - x_{\mathrm{D}} - x_{\mathrm{E}}$ となり，この値は約定価格 X に依らない.

3　解析

投資家 i による指値注文の価格を x_i，枚数を d_i とする．ただし，d_i は売り注文の場合には正数，買い注文の場合には負数とする．本モデルでは $d_i = \pm 1$ である．

いま，$i = 1, \cdots, n$ の n 人の注文が $(x_1, \cdots, x_n; d_1, \cdots, d_n)$ となる確率密度を $P(x_1, \cdots, x_n; d_1, \cdots, d_n)$ とすると，

$$\sum_{d_1=\pm 1} \cdots \sum_{d_n=\pm 1} \int_0^1 dx_1 \int_0^1 dx_2 \cdots \int_0^1 dx_n P(x_1, \cdots, x_n; d_1, \cdots, d_n) = 1. \tag{1}$$

よって，

$$P(x_1, \cdots, x_n; d_1, \cdots, d_n) = \frac{1}{2^n}. \tag{2}$$

n 人の注文が $(x_1, \cdots, x_n; d_1, \cdots, d_n)$ となるときの約定回数を $V(x_1, \cdots, x_n; d_1, \cdots, d_n)$ とする．また，そのうち i と j による約定回数を $V_{i,j}(x_1, \cdots, x_n; d_1, \cdots, d_n)$ とする．つまり，$V_{i,j}(x_1, \cdots, x_n; d_1, \cdots, d_n) = 0, 1$ であり，$V(x_1, \cdots, x_n; d_1, \cdots, d_n) = \sum_{i<j} V_{i,j}(x_1, \cdots, x_n; d_1, \cdots, d_n)$ である．

約定回数の期待値 $\langle V \rangle$ は，

$$\begin{aligned}
\langle V \rangle &= \sum_{d_1=\pm 1} \cdots \sum_{d_n=\pm 1} \int_0^1 dx_1 \int_0^1 dx_2 \cdots \int_0^1 dx_n P(x_1, \cdots, x_n; d_1, \cdots, d_n) V(x_1, \cdots, x_n; d_1, \cdots, d_n) \\
&= \frac{1}{2^n} \sum_{d_1=\pm 1} \cdots \sum_{d_n=\pm 1} \int_0^1 dx_1 \int_0^1 dx_2 \cdots \int_0^1 dx_n V(x_1, \cdots, x_n; d_1, \cdots, d_n) \\
&= \frac{n!}{2^n} \sum_{d_1=\pm 1} \cdots \sum_{d_n=\pm 1} \int_0^1 dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \cdots \int_0^{x_{n-1}} dx_n V(x_1, \cdots, x_n; d_1, \cdots, d_n) \\
&= \frac{n!}{2^n} \int_0^1 dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \cdots \int_0^{x_{n-1}} dx_n \sum_{i<j} \sum_{d_1=\pm 1} \cdots \sum_{d_n=\pm 1} V_{i,j}(x_1, \cdots, x_n; d_1, \cdots, d_n) \\
&= \frac{n!}{2^n} \int_0^1 dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \cdots \int_0^{x_{n-1}} dx_n \sum_{i<j} v_{i,j} \\
&= \frac{1}{2^n} \sum_{i<j} v_{i,j}.
\end{aligned} \tag{3}$$

ここで，$v_{i,j} = \sum_{d_1=\pm 1} \cdots \sum_{d_n=\pm 1} V_{i,j}(x_1, \cdots, x_n; d_1, \cdots, d_n)$ と定義した．

同様に，n 人の注文が $(x_1, \cdots, x_n; d_1, \cdots, d_n)$ となるときの効用を $U(x_1, \cdots, x_n; d_1, \cdots, d_n)$，そのうち投資家 i と j の約定による効用の合計を $U_{i,j}(x_1, \cdots, x_n; d_1, \cdots, d_n)$ とする．つまり，$U(x_1, \cdots, x_n; d_1, \cdots, d_n) = \sum_{i<j} U_{i,j}(x_1, \cdots, x_n; d_1, \cdots, d_n)$ である．また，投資家 i(買い手) と投資家 j(売り手) の約定価格を $x_{i,j}$ とすると，投資家 i の効用は $x_i - x_{i,j}$，投資家 j の効用は $x_{i,j} - x_j$ となるので，$U_{i,j}(x_1, \cdots, x_n; d_1, \cdots, d_n) = x_i - x_j$ となり，二者の効用の合計は約定価格に依存しない．

効用の期待値 $\langle U \rangle$ は，

$$\begin{aligned}
\langle U \rangle &= \sum_{d_1=\pm 1} \cdots \sum_{d_n=\pm 1} \int_0^1 dx_1 \int_0^1 dx_2 \cdots \int_0^1 dx_n P(x_1, \cdots, x_n; d_1, \cdots, d_n) U(x_1, \cdots, x_n; d_1, \cdots, d_n) \\
&= \frac{1}{2^n} \sum_{d_1=\pm 1} \cdots \sum_{d_n=\pm 1} \int_0^1 dx_1 \int_0^1 dx_2 \cdots \int_0^1 dx_n U(x_1, \cdots, x_n; d_1, \cdots, d_n) \\
&= \frac{n!}{2^n} \sum_{d_1=\pm 1} \cdots \sum_{d_n=\pm 1} \int_0^1 dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \cdots \int_0^{x_{n-1}} dx_n U(x_1, \cdots, x_n; d_1, \cdots, d_n) \\
&= \frac{n!}{2^n} \int_0^1 dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \cdots \int_0^{x_{n-1}} dx_n \sum_{i<j} \sum_{d_1=\pm 1} \cdots \sum_{d_n=\pm 1} U_{i,j}(x_1, \cdots, x_n; d_1, \cdots, d_n) \\
&= \frac{n!}{2^n} \int_0^1 dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \cdots \int_0^{x_{n-1}} dx_n \sum_{i<j} v_{i,j}(x_i - x_j) \\
&= \frac{1}{(n+1)2^n} \sum_{i<j} v_{i,j}(j-i). \qquad (4)
\end{aligned}$$

$\langle V \rangle$ と $\langle U \rangle$ に含まれる $v_{i,j}$ を求めたい．$v_{i,j}$ は，注文 $x_1 > \cdots > x_i > \cdots > x_j > \cdots > x_n$ のときに投資家 i と j が約定すような $\{d_1, \cdots, d_i, \cdots, d_j, \cdots, d_n\}$ の組合せ数である．

投資家 i と j が約定するためには，以下の 3 条件が必要である．

1. 「投資家 i は買い手である」：$d_i = -1$.
2. 「投資家 j は売り手である」：$d_j = 1$.
3. 「投資家 i の注文よりも優先する買い注文の個数と，投資家 j の注文よりも優先する売り注文の個数が等しい」：$l = 1, \cdots, i-1$ について $d_l = -1$ となる l の個数と，$l = j+1, \cdots, n$ について $d_l = 1$ となる l の個数が等しい．

また，$l = i+1, \cdots, j-1$ について d_l の値は任意である．従って $v_{i,j}$ は，

$$v_{i,j} = 2^{j-i-1} \sum_{k=0}^{\min\{i-1, n-j\}} {}_{i-1}\mathrm{C}_k \cdot {}_{n-j}\mathrm{C}_k = 2^{j-i-1} {}_{n+i-j-1}\mathrm{C}_{i-1}. \qquad (5)$$

以上より，約定回数の期待値 $\langle V \rangle$ と効用の期待値 $\langle U \rangle$ は，

$$\langle V \rangle = \frac{n}{4}(1 - \frac{1}{n}), \qquad (6)$$

$$\langle U \rangle = \frac{n}{8}(1 - \frac{2}{n+1}) \qquad (7)$$

と求まる．これらの一投資家平均 $\langle v \rangle$, $\langle u \rangle$ は，

$$\langle v \rangle = \frac{1}{4}(1 - \frac{1}{n}), \qquad (8)$$

$$\langle u \rangle = \frac{1}{8}(1 - \frac{2}{n+1}) \qquad (9)$$

となる[*8]．

---

*8 $n \to \infty$ では，価格 1/2 よりも優先価格に指値が入った場合 (確率 1/2) に約定する．一つの売り買いの組合せで約定回

4　結論

本研究では，ダブルオークションである証券流通市場のうち板寄せ方式をモデル化することで，板寄せ時において，投資家の人数が増加すると，市場全体だけでなく一投資家当たりの平均約定回数及び平均効用の期待値も増加することが示された．これは，市場に参加する投資家の人数が増えることで，より優先する価格で約定される機会が市場全体で増えることに伴う効用の増加が，競合となる投資家に既存投資家の約定機会が奪われることに伴う効用の減少を上回ることを示す．このことから，全体効用及び一投資家の効用を増加させるため，板寄せ方式を採用する取引所は板寄せ時の流動性向上を目指した施策を積極的に提供するべきであると言える．

また，板寄せ時において，既に投資家の人数が多い銘柄よりも少ない銘柄の方が，投資家が 1 人増えたときの一投資家の平均効用の伸びが大きいことも，同時に示された．そのため板寄せ方式を採用する取引所は，板寄せ時における注文数量の比較的少ない板の活性化に注力するとともに，新たな商品を上場し、板寄せ時の流動性を少しでも向上させることができれば、投資家の効用増加に資するだろう。

本研究では板寄せ方式をモデル化したが，今後の課題としてザラ場方式を扱うことが考えられる．ダブルオークションに関するサーベイ Parsons et al.(2006) において，ダブルオークションのうちザラ場方式を解析的に扱うことへの悲観論が取り上げられているが，筆者が唯一知っているオークション理論として，Ruijgrok(2012) はザラ場方式を解析的に扱っている．しかし，一度約定が成立するとオークションが全て終了し，その後は一切の取引を行わないという限定的なモデル化に留まっている点で，ザラ場方式のオークション理論は未完成である．1.2 節で述べたとおり，ザラ場方式と板寄せ方式の本質的な違いは，時間の要素の有無にある．板寄せ方式は注文価格が約定の成否を決めるのに対し，ザラ場方式では注文価格と注文時刻が約定の成否を決めるという点で，ザラ場方式の方が板寄せ方式よりも複雑であり，扱いが難しい．

ザラ場方式に関する研究が進展し，板寄せ方式とザラ場方式を比較できるようになれば，例えば，バッチオークション方式に関するシミュレーション研究 (水田・和泉 (2016)) の理論面からの検証といったことも可能になる．また，さらなる応用として，HFT の特性についてもモデル化できれば，ザラ場方式において HFT が非 HFT の効用に与える影響についても分析することが可能となり，市場のあり方に資する理論的な知見を得ることを期待できる．

本研究では，証券流通市場において採用されるダブルオークション方式を数理的に扱うことで，市場構造から見える普遍的構造を明らかにした．これは，オークションに関するより発展的な理論及び応用研究を行う上で，基礎となる成果である．今後も，ザラ場方式の分析を含め，効率的な市場設計に資するような数理的研究の発展が望まれる．

数を 1 と定義しているので，約定した場合の一投資家当たりの約定回数は 1/2 であることに注意すると，$n \to \infty$ で一投資家当たりの約定回数の期待値は 1/4 となる．これは，$\lim_{n\to\infty}\langle v\rangle = 1/4$ という結果と整合的である．

補論

本論では，注文時刻の要素を持たず注文価格の要素のみを持つ板寄せ方式を扱った．今後の研究で注文価格と注文時刻の要素を持つザラ場方式を扱うため，次のステップとして，注文価格の要素を持たず注文時刻の要素のみを持つ仮想の執行ルール（時間優先約定方式と呼ぶことにする.）を補論にて議論する．

時間優先約定方式は以下のような状況を想定した執行ルールである．ある財を売りたい人と買いたい人が，集合した順に一列に並ぶ．先頭の人から順次，その後ろに最も早く並んでいる人と取引を行っていく．売り買いが成立した場合には両者は列から抜ける．このとき，各人が評価する財の価格 (注文価格) は任意に決まり，約定の成否に影響しない．また約定価格も任意に決まる．

モデルは以下のとおりとする．まず，n 人の投資家の注文時刻を独立な一様分布 U(0,1) に従ってランダムに決め，各投資家が 1 単位ずつ注文を入れていく．また，各投資家の注文の売り買いは，確率 1/2 でランダムに決まるものとし，各投資家の注文価格は任意に決まるものとする．市場に売り注文と買い注文のペアが存在した場合には，注文価格に依らず，一番注文時刻の早い売り注文と一番注文時刻の早い買い注文について約定させる．市場に売り注文と買い注文のペアが存在する限り，上記を繰り返す．

図 6 を用いて説明する．いま投資家が $n=6$ 人であると仮定し，それぞれの注文を A, B, ⋯,F，それらの注文時刻を $t_{\mathrm{A}}, t_{\mathrm{B}}, \cdots, t_{\mathrm{F}}$ とする ($t_{\mathrm{A}} < t_{\mathrm{B}} < \cdots < t_{\mathrm{F}}$)．また，売り買いの状況や注文価格は図 6 のとおりである．このとき，時刻 t_{C} において売り注文 C が発注され，売り注文 C と，買い注文の中で最も早く発注された注文 A が約定する (買い注文 A は買い注文 B や売り注文 C より安いが，ここでは時間優先のみを考えた約定方式であるため，注文 A と C が約定することになる．)．次に時刻 t_{D} において売り注文 D が発注され，売り注文 D と，買い注文の中で残っている注文 B が約定する．時刻 t_{E} に

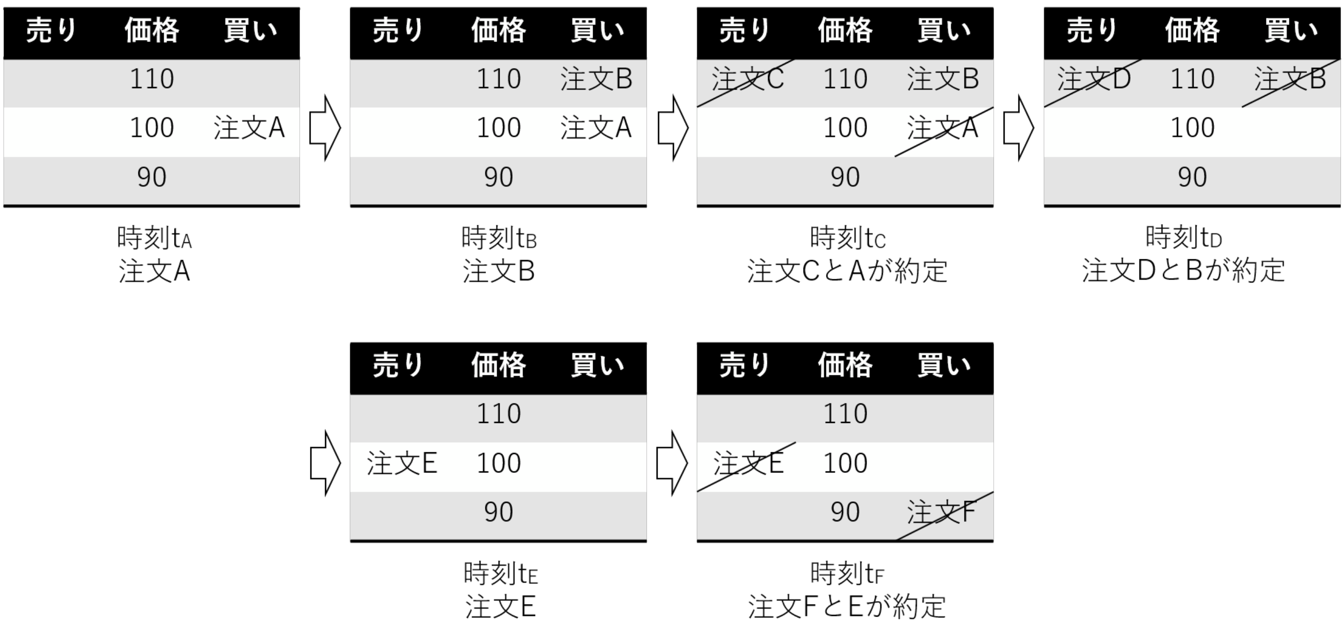

図 6　投資家が $n=6$ 人であるときの例 (時間優先約定方式).

売り	時刻	買い
	早	
	t_A	注文A
	t_B	注文B
注文C	t_C	
注文D	t_D	
注文E	t_E	
	t_F	注文F
	遅	

図 7　時間優先約定方式における時間板.

おいて売り注文 E が発注された後，最後に時刻 t_{F} において買い注文 F が発注され，買い注文 F と，売り注文の中で残っている注文 E が約定する.

次に，本モデルにおける約定回数の期待値を導出する.

まず，n 人の投資家のうち，売り注文を選択した投資家が k 人，買い注文を選択した投資家が $n-k$ 人いたとする．このとき，市場全体における約定回数は $\min\{k, n-k\}$，当事象の実現確率は ${}_n\mathrm{C}_k/2^n$ と表せる．従って，市場全体における約定回数の期待値 $\langle V \rangle$ は,

$$\langle V \rangle = \sum_{k=0}^{n} \min\{k, n-k\} \cdot \frac{{}_n\mathrm{C}_k}{2^n} \tag{10}$$

と書ける．これを計算すると,

$$\langle V \rangle = \begin{cases} \dfrac{n}{2}(1 - \dfrac{{}_{n-1}\mathrm{C}_{\frac{n-1}{2}}}{2^{n-1}}) & (n : odd) \\ \dfrac{n}{2}(1 - \dfrac{{}_n\mathrm{C}_{\frac{n}{2}}}{2^n}) & (n : even). \end{cases} \tag{11}$$

よって，一投資家当たりの平均約定回数 $\langle v \rangle$ は,

$$\langle v \rangle = \begin{cases} \dfrac{1}{2}(1 - \dfrac{{}_{n-1}\mathrm{C}_{\frac{n-1}{2}}}{2^{n-1}}) & (n : odd) \\ \dfrac{1}{2}(1 - \dfrac{{}_n\mathrm{C}_{\frac{n}{2}}}{2^n}) & (n : even). \end{cases} \tag{12}$$

従って，時間優先約定方式においても，板寄せ方式同様に，投資家の人数が増加すると市場全体だけでなく一投資家当たりの平均約定回数の期待値も増加することが示された.

時間優先約定方式は時間に依存し，価格に依存しない．このことを際立たせるために，図 6 の板から価格の要素を取り除きかつ時間軸を縦に取ってみると，図 7 のように，時間優先約定方式における注文をあたかも板のように表現することができる (時間板と呼ぶことにする．)．このようなアナロジーから，価格と時間にはなんらかの対称性が存在する可能性がある．価格と時間に対称性が存在するとすれば，数理構造的に興味深い.

参考文献

Budish, E., Cramton, P. and Shim, J. (2015) "The High-Frequency Trading Arms Race: Frequent Batch Auctions as a Market Design Response," *The Quarterly Journal of Economics*, Vol. 130 (4), pp. 1547-1621.

Bulow, J. and P. Klemperer. (1996) "Auctions Versus Negotiations," *American Economic Review*, Vol. 86, pp. 180-194.

Myerson, R. (1981) "Optimal Auction Design," *Mathematics of Operations Research*, Vol.6 (1), pp. 58–73.

Myerson, R. and M. Satterthwaite. (1983) "Efficient Mechanisms for Bilateral Trading," *Journal of Economic Theory*, Vol. 29, pp. 265-281.

Parsons, S., Marcinkiewicz, M., Niu, J., and Phelps, S. (2006) "Everything you wanted to know about double auctions, but were afraid to (bid or) ask," *Department of Computer and Information Science, Brooklyn College.*

Riley, J. and W. Samuelson. (1981) "Optimal Auctions,"*American Economic Review*, Vol.71 (3), pp. 381–392.

Ruijgrok, M. (2012) "A single-item continuous double auction game," Internet: https://arxiv.org/abs/1210.554.

S. Nagumo, T. Shimada, N. Yoshioka and N. Ito. (2017) "The effect of tick size on trading volume share in two competing stock markets," *Journal of Physics Social of Japan*, Vol. 86, 014801.

Vicrey, W. (1961) "Counterspeculation, Auctions, and Competitive Sealed Tenders," *Journal of Finance*, Vol. 16, pp. 8-37.

Wilson, R. (1985) "Incentive Efficiency of Double Auctions," *Econometrica*, Vol. 53, 1101-15.

V. クリシュナ. (2018) 「オークション理論」, 中央経済社.

上田晃三. (2010) 「ミネルヴァ書房オークションの理論と実際：金融市場への応用」, 金融研究第 29 巻第 1 号, pp. 47-90.

株式会社大阪取引所. (2018a) 「先物取引のすべて」, 株式会社大阪取引所.

株式会社大阪取引所. (2018b) 「オプション取引のすべて」, 株式会社大阪取引所.

株式会社東京証券取引所株式総務グループ. (2001) 「東証公式 株式サポーター 株式取引編」, 株式会社東京証券取引所.

草田裕紀, 水田孝信, 早川聡, 和泉潔, 吉村忍. (2014) 「人工市場シミュレーションを用いたマーケットメイカーのスプレッドが市場出来高に与える影響の分析」, JPX ワーキングペーパー, Vol. 5.

草田裕紀, 水田孝信, 早川聡, 和泉潔. (2015) 「保有資産を考慮したマーケットメイク戦略が市場間競争に与える影響: 人工市場アプローチによる分析」, JPX ワーキングペーパー, Vol. 8.

坂井豊貴. (2010) 「マーケットデザイン入門」, ミネルヴァ書房.

坂井豊貴. (2014) 「政府や自治体によるオークション理論の活用へ」, 「効果的な政策ツールに関する研究会」報告書, 財務総合政策研究所.

保坂豪. (2014) 「東京証券取引所における High-Frequency Trading の分析」, JPX ワーキングペーパー, Vol. 4.

水田孝信, 早川聡, 和泉潔, 吉村忍. (2013) 「人工市場シミュレーションを用いた取引市場間におけるティックサイズと取引量の関係性分析」, JPX ワーキングペーパー, Vol. 2.

水田孝信, 和泉潔. (2016) 「人工市場シミュレーションを用いたバッチオークションの分析」, JPX ワーキングペーパー, Vol. 17.

宮﨑保明. (2016) 「日経 225 先物の夜間立会と日中立会の取引行動の差異分析」, JPX ワーキングペーパー, Vol. 14.