Identities and approximations inspired from Ramanujan notebooks, III

Simon Plouffe, juin 2009

Je présente ici une série d'identités inspirées des Notebooks de S. Ramanujan. C'est le 3ème article de cette série, des résultats avaient été publiés en 1998 et 2006. Une nouvelle série pour la constante de Catalan a été trouvée impliquant la fonction cosh(kπn) avec k variant de 1 à 4, et qui permet de calculer rapidement cette constante.

Un motif général peut être dégagé de ces identités. En effet, le motif (1,2,4) revient constamment. Une autre remarque concerne un changement de variable avec $e^{\pi n}$, G.H. Hardy (collected papers) remarquait que si $F(x) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^n}$ alors en posant $x=e^{\pi}$ on retrouve plusieurs identités sous forme de produit infini plutôt que de somme, le log d'un produit infini est une somme infinie. La fonction F(x) n'est autre que la fonction partages de n, largement étudiée par Hardy et Ramanujan.

I present here a series of identities inspired from Ramanujan notebooks, third of a series from 1998 and 2006. A new identity for the Catalan constant involving cosh (πn) is given, giving a relatively rapid convergent series for that number. A general motif with exponents 1,2,4 always occur. A new series of approximations is also presented with incredible precision.

$$\frac{1}{\pi} = 8\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{e^{\pi n}-1} - 40\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{e^{2\pi n}-1} + 32\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{e^{4\pi n}-1}$$

$$\pi = 72\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{-1}}{e^{\pi n}-1} - 96\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{-1}}{e^{2\pi n}-1} + 24\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{-1}}{e^{4\pi n}-1}$$

$$\frac{\pi}{24} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{3}{q^n-1} - \frac{4}{q^{2n}-1} + \frac{1}{q^{4n}-1}\right), q = e^{\pi}$$

$$\frac{1}{\pi^2} = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{cosh(\pi n)-1} - 32\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{cosh(2\pi n)-1} + 32\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{cosh(4\pi n)-1}$$

$$\pi^2 = 120\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{-2}}{cosh(\pi n)-1} - 420\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{-2}}{cosh(2\pi n)-1} + 120\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{-2}}{cosh(4\pi n)-1}$$

$$2K = 22\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{-2}}{cosh(\pi n)-1} - 71\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{-2}}{cosh(2\pi n)-1} + 22\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{-2}}{cosh(4\pi n)-1}\ , avec\ K = Cte\ de\ Catalan$$

$$1 = 24\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{e^{\pi n}-1} - 96\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{e^{2\pi n}-1} + 96\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{e^{4\pi n}-1}$$

$$1 = 24\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{e^{\pi n}-1} - 264\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{e^{2\pi n}-1}$$

$$1 = 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^7}{e^{\pi n}-1} - 484\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^7}{e^{2\pi n}-1}$$

$$1 = \frac{63}{1382}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{11}}{e^{\pi n}-1} + \frac{131103}{1382}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{11}}{e^{2\pi n}-1}$$

$$1 = \frac{1}{7234}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{15}}{e^{\pi n}-1} - \frac{32641}{7234}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{15}}{e^{2\pi n}-1}$$

$$\zeta(4) = 14\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{-4}}{cosh(\pi n)-1} - \frac{259}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{-4}}{cosh(2\pi n)-1} + \frac{7}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{-4}}{cosh(4\pi n)-1}$$

$$\zeta(5) = 24\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{-5}}{e^{\pi n}-1} - \frac{259}{10}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{-5}}{e^{2\pi n}-1} - \frac{1}{10}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{-5}}{e^{4\pi n}-1}$$

$$log(2) = 16\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{-1}}{e^{\pi n}-1} - 24\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{-1}}{e^{2\pi n}-1} + 8\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{-1}}{e^{4\pi n}-1}$$

$$log(3) = \frac{76}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{-1}}{e^{\pi n}-1} - \frac{112}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{-1}}{e^{2\pi n}-1} - \frac{4}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{-1}}{e^{3\pi n}-1} + \frac{28}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{-1}}{e^{4\pi n}-1} + \frac{16}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{-1}}{e^{6\pi n}-1} - \frac{4}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{-1}}{e^{12\pi n}-1}$$

$$log(\emptyset) = 11\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{-1}}{e^{\pi n}-1} - 14\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{-1}}{e^{2\pi n}-1} + 3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{-1}}{e^{4\pi n}-1} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{-1}}{e^{5\pi n}-1} - 10\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{-1}}{e^{10\pi n}-1} + 20\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{-1}}{e^{20\pi n}-1}$$

$$1 - \frac{1}{\pi} = 16\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{e^{\pi n}-1} - 56\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{e^{2\pi n}-1} + 56\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{e^{4\pi n}-1}$$

$0 = [1, 2^{k-1} + 2^{k/2} + 2^2, 2^k\,] \equiv [a, b, c]$ *with k = 4,6,8,...*

$$0 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^k}{cosh\,(\pi n)-1} - (2^{k-1} + 2^{k/2} + 4)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^k}{cosh\,(2\pi n)-1} + 2^k\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^k}{cosh\,(4\pi n)-1}$$

$$\pi^3 = 360\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{-3}}{sinh(\pi n)} - 90\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{-3}}{sinh(2\pi n)}$$

$$\pi^5 = 3528\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{-5}}{sinh(\pi n)} - \frac{63}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{-5}}{sinh(2\pi n)}$$

$$2K - \zeta(2) = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{-2}}{cosh(\pi n)-1} - 1\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{-2}}{cosh(2\pi n)-1} + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{-2}}{cosh(4\pi n)-1} \quad avec\ K = Cte\ de\ Catalan$$

Approximations

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3\sigma_{-3}(n)}{e^{\frac{\pi n}{5}}}\simeq\frac{3333}{80}\qquad \epsilon=10^{-23}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sigma_3(n)}{e^{\frac{2\pi n}{5}}}\simeq\frac{13}{5}\qquad \epsilon=10^{-10}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sigma_3(n)}{e^{\frac{\pi n}{6}}}\simeq\frac{4147}{48}\qquad \epsilon=10^{-26}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sigma_3(n)}{e^{\frac{\pi n}{8}}}\simeq\frac{4369}{16}\qquad \epsilon=10^{-34}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sigma_3(n)}{e^{\frac{\pi n}{64}}}\simeq\frac{17895697}{16}\qquad \epsilon=10^{-340}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sigma_5(n)}{e^{\frac{\pi n}{8}}}\simeq\frac{2^{24}+1}{504}\qquad \epsilon=10^{-33}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sigma_{11}(n)}{e^{\frac{\pi n}{8}}}\simeq\frac{47496754311859}{16}\qquad \epsilon=10^{-29}$$

$$\frac{1}{\pi}\simeq-\frac{1}{2^7}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sigma_1(n)}{e^{\frac{\pi n}{256}}}+\frac{2^{18}+1}{2^{11}+2^{10}}\qquad \epsilon=10^{-526}$$

$$\frac{1}{\pi^3}\simeq\frac{1}{2^{31}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sigma_3(n)n^3}{e^{\frac{\pi n}{16}}}\qquad \epsilon=10^{-80}$$

$$\frac{1}{\pi^3}\simeq\frac{1}{2^{45}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sigma_3(n)n^3}{e^{\frac{\pi n}{64}}}\qquad \epsilon=10^{-202}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sigma_5(n)}{n^5e^{\frac{\pi n}{8}}}\simeq\frac{2^{16}-1}{2^{17}}\zeta(5)-\frac{161959}{2^{24}+2^{21}}\pi^5\qquad \epsilon=10^{-48}$$

$$256\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sigma_1(n)}{ne^{\frac{\pi n}{32}}}\simeq 1365\,\pi-768\log(2)\qquad \epsilon=10^{-172}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sigma_3(n)}{n^3e^{\frac{\pi n}{8}}}\simeq\frac{257}{512}\zeta(3)-\frac{668617}{2^{19}+2^{17}+2^{16}+2^{14}}\pi^3\qquad \epsilon=10^{-40}$$

$$\pi\simeq-\frac{2^8+2^6}{257}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sigma_1(n)}{ne^{\frac{\pi n}{8}}}-\frac{256}{257}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sigma_1(n)}{ne^{\frac{\pi n}{16}}}\qquad \epsilon=10^{-45}$$

$$\pi\simeq-\frac{256}{87}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sigma_1(n)}{ne^{\frac{\pi n}{4}}}-\frac{192}{87}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sigma_1(n)}{ne^{\frac{\pi n}{8}}}\qquad \epsilon=10^{-21}$$

$$16\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sigma_3(n)}{e^{\left(\frac{\pi n}{2^7}\right)}} \simeq 17\cdot 257\cdot 65537 \qquad \epsilon = 10^{-688}$$

$$16\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sigma_3(n)}{e^{\frac{\pi n}{2^{10}}}} \simeq 1172812402961 \qquad \epsilon = very, very\ small$$

$$16\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sigma_3(n)}{e^{\frac{\pi n}{2^k}}} \simeq \mathrm{M(k)}, \qquad \mathrm{k} > 2 \text{ and } \epsilon = very, very\ small \ , \ \mathrm{M(k)} = A131865 \text{ from the OEIS}$$

A131865 = [1, 17 ,273 ,4269 , 69905, 1118481, 17895697, 286331153, 4581298449, 73300775185, 1172812402961, 18764998447377, 300239975158033, 4803839602528529, 76861433640456465, 1229782938247303441, 19676527011956855057,...]

The sequence in binary is : 1, 10001, 100010001, 1000100010001, 10001000100010001, ...

$$\pi \simeq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sigma_1(n)}{n}\left(\frac{1}{e^{\frac{\pi n}{8}}} - \frac{4}{e^{\frac{\pi n}{16}}} + \frac{5}{e^{\frac{\pi n}{32}}} - \frac{2}{e^{\frac{\pi n}{64}}}\right) \qquad \epsilon = 10^{-45}$$

$$\pi \simeq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sigma_1(n)}{n}\frac{2^{13}}{152919}\left(-\frac{1+2^{10}}{e^{\frac{\pi n}{128}}} + \frac{1}{e^{\frac{\pi n}{256}}}\right) \qquad \epsilon = very\ small$$

$$\pi \simeq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sigma_1(n)}{n}\left(\frac{3}{(2^8+2^6)e^{\frac{\pi n}{256}}} - \frac{7}{2^8 e^{\frac{\pi n}{512}}} + \frac{11}{(2^9+2^7)e^{\frac{\pi n}{1024}}}\right) \qquad \epsilon = very\ small$$

$$\pi \simeq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sigma_1(n)}{n}\left(-\frac{12}{e^{\frac{\pi n}{12}}} + \frac{30}{e^{\frac{\pi n}{15}}} + \frac{12}{e^{\frac{\pi n}{16}}} - \frac{18}{e^{\frac{\pi n}{18}}} - \frac{30}{e^{\frac{\pi n}{20}}} + \frac{18}{e^{\frac{\pi n}{24}}}\right) \qquad \epsilon = 10^{-64}$$

$$240\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sigma_3(n)}{e^{\frac{\pi n}{k}}} \simeq 16k^4 - 1$$

$$504\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sigma_5(n)}{e^{\frac{\pi n}{k}}} \simeq 64k^6 + 1$$

$x\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^n)^{24} = \sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)x^n$ is sequence A000594 from the OEIS

$E_4\left(e^{-\pi/32}\right) \simeq 2^{24}$

$\tau(e^{-48\pi}) \simeq e^{-2\pi}$, $\tau(e^{-24\pi}) \simeq e^{-\pi}$, $\tau(e^{-12\pi}) \simeq e^{-\pi/2}$, $\tau(e^{-6\pi}) \simeq e^{-\pi/4}$ are precise to 62, 31, 17 and 8 digits.

$$F(x) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - e^{-\pi n x}}$$

$$\frac{F(\frac{1}{12})^4 F(\frac{1}{36})^2}{F(\frac{1}{9})^2 F(\frac{1}{24})^4} \simeq e^{\pi}$$

$F(\frac{1}{8})^{64} \simeq \frac{e^{85\pi}}{2^{128}}$ $\quad \epsilon = 10^{-36}$ and $85 = 1010101_2$

$F(\frac{1}{32})^{256} \simeq \frac{e^{\pi 1365}}{2^{768}}$ $\quad \epsilon = 10^{-173}$ and $1365 = 10101010101_2$

$F(e^{-\pi}) = \frac{2^{3/8}\,\Gamma(3/4)}{e^{\pi/24}\,\pi^{1/4}}$ exactly

$F(e^{-2\pi}) = \frac{2^{1/2}\,\Gamma(3/4)}{e^{\pi/12}\,\pi^{1/4}}$ exactly

$F(e^{-4\pi}) = \frac{2^{7/8}\,\Gamma(3/4)}{e^{\pi/6}\,\pi^{1/4}}$ exactly

Bibliography

[GH5] G.H. Hardy, Collected Papers, vol 5.

[RAM1,2,3,4,5], Ramanujan Notebooks, volumes 1 to 5, by Bruce Berndt, Springer-Verlag.

[HW] G.H. Hardy and Wright, An introduction to the theory of numbers.

http://en.wikipedia.org/wiki/Eisenstein_series

http://mathworld.wolfram.com/JacobiThetaFunctions.html

http://mathworld.wolfram.com/EisensteinSeries.html