Orígenes del Cálculo Diferencial e Integral I.

De la matemática griega a los antecedentes del cálculo.

Historia del Análisis Matemático

Problemas de cuadraturas en las matemáticas griegas

Los problemas de cuadraturas son problemas geométricos que consisten en lo siguiente: dada una figura, construir un cuadrado con área igual a la de la figura dada. Esta construcción debía hacerse con regla no graduada y compás, siguiendo unas normas precisas. Según lo establecido en los *Elementos* de Euclides (*c.* 300 a.C.) la construcción debe constar de un número finito de pasos, cada uno de ellos consistente en:

- Trazar una recta que una dos puntos.
- Trazar una circunferencia de centro y radio arbitrarios.
- Intersecar dos de las figuras anteriores.

Son famosos los problemas de la cuadratura del círculo, la trisección de un ángulo, la duplicación del cubo y la inscripción de polígonos regulares en una circunferencia. En la antigua Grecia se sabía cuadrar cualquier polígono.

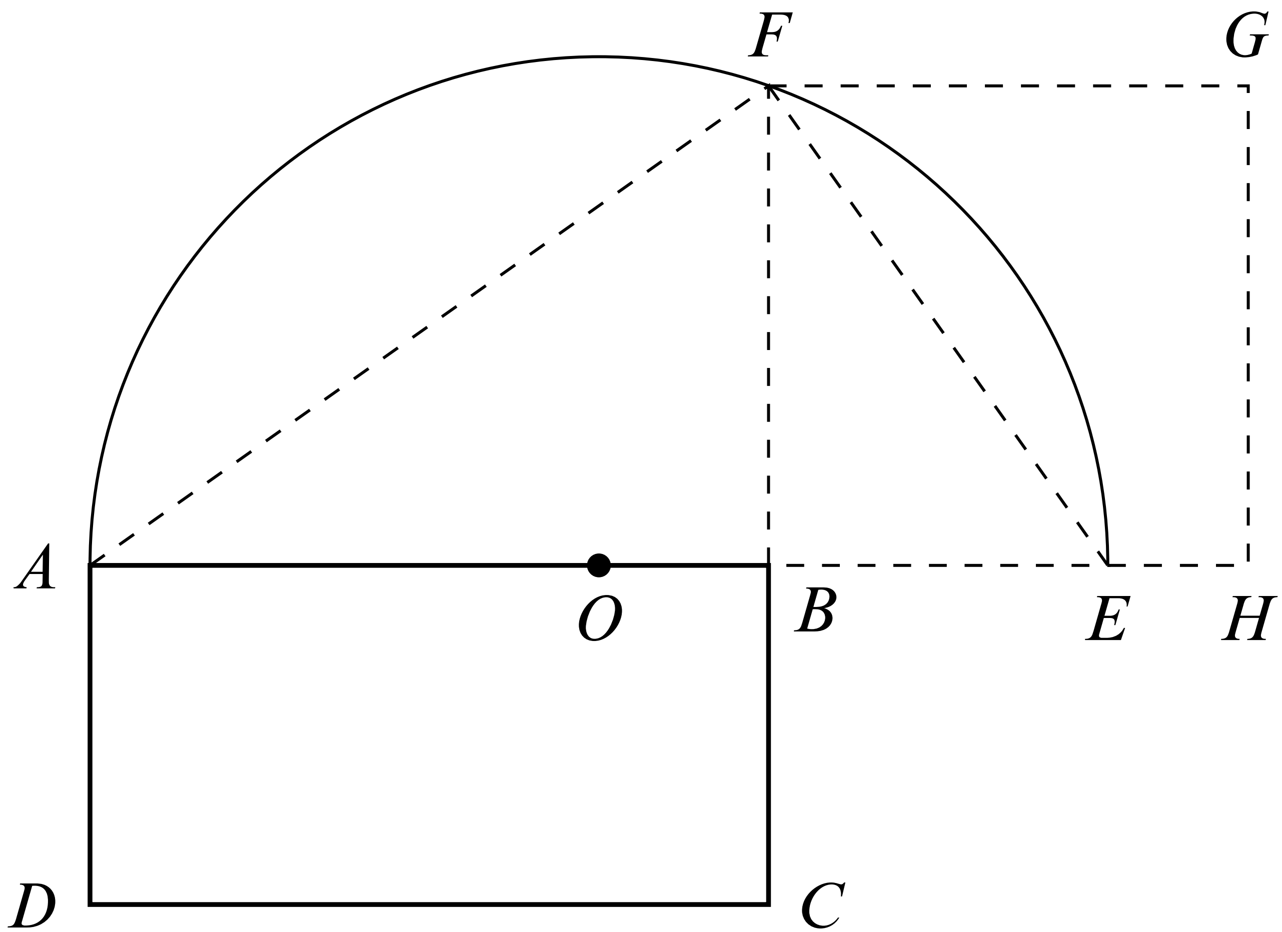


Figura 1. Cuadratura de un rectángulo

Para cuadrar el rectángulo $ABCD$ de la figura 1 se procede de la forma siguiente:

1) Se prolonga el lado AB y se determina sobre él un punto E tal que $BE = BC$.

2) Se traza con centro en el punto medio O de AE una semicircunferencia de radio OE.

3) Se traza por B una perpendicular a AE y se determina su punto de corte F con la semicircunferencia.

4) El segmento FB es el lado de un cuadrado cuya área es igual a la del rectángulo $ABCD$. Esto es consecuencia de que la altura FB de un triángulo rectángulo AFE es media proporcional entre las dos partes en que divide a la hipotenusa, es decir, $FB/AB = BE/FB$, por lo que $FB^2 = AB.BE = AB.BC$.

A partir de aquí es fácil obtener la cuadratura de un triángulo, lo que permite obtener la cuadratura de cualquier polígono descomponiéndolo en triángulos. Los matemáticos griegos inventaron un procedimiento, que se conoce con el nombre de "exhausción", por el cual podían lograr la cuadratura de algunas regiones delimitadas por curvas. Se atribuye a Eudoxo de Cnido (*c.* 400 - 347 a.C.) la invención de este método, que fue perfeccionado posteriormente por Arquímedes (*c.* 287 - 212 a.C.). El siguiente es un notable ejemplo de su aplicación.

Cuadratura de un segmento de parábola por Arquímedes

Arquímedes
(Siracusa, Sicilia, 287 a.C.– 212 a.C.)

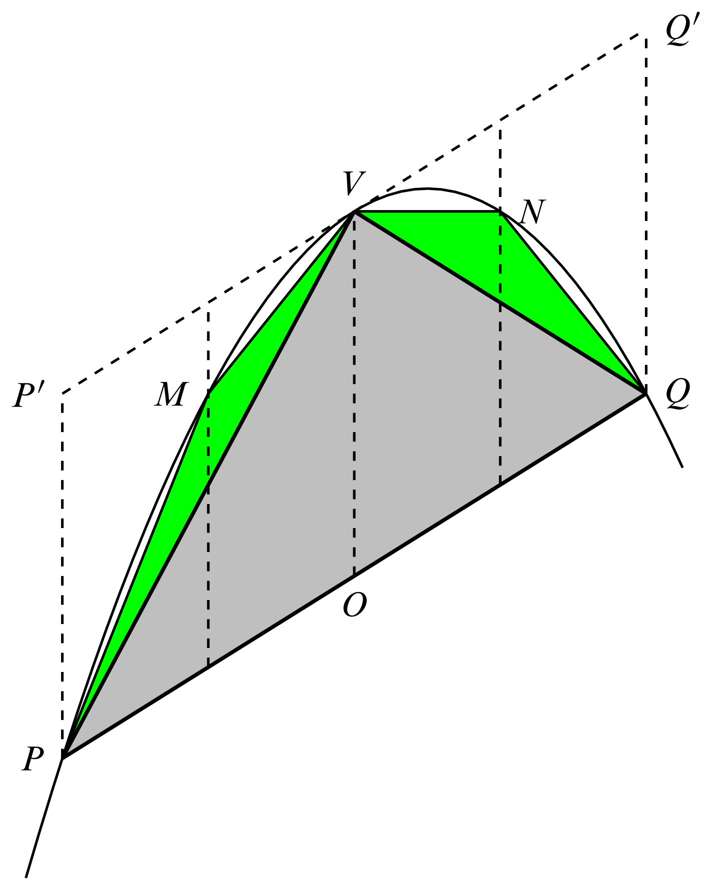


Figura 2. Cuadratura de un segmento de parábola

Teorema. El área del segmento parabólico PVQ es igual a cuatro tercios del área del triángulo inscrito $\triangle PVQ$.

Demostración. Esta demostración aparece en una carta que escribe Arquímedes a su amigo Dositheus, obra que se conoce con el nombre de *Sobre la Cuadratura de la Parábola*. La demostración consiste en hacer una descomposición exhaustiva del segmento parabólico por medio de triángulos de una forma muy ingeniosa. Empezaremos explicando la construcción geométrica de la figura 2.

Una *cuerda* PQ de una parábola es un segmento que une dos de sus puntos. La región plana acotada, cuya frontera está formada por la cuerda PQ y el arco de la parábola comprendido entre los puntos P y Q se llama un *segmento parabólico*. El *vértice* de un segmento parabólico es el punto de la parábola en el cual la tangente es paralela a la cuerda que define el segmento.

Se verifica que el vértice de un segmento parabólico PVQ es el punto intersección con la parábola de la recta paralela al eje de la parábola que pasa por el punto medio $O = \dfrac{1}{2}(P+Q)$ del segmento PQ.

El triángulo $\triangle PVQ$ cuya base es el segmento PQ y cuyo otro vértice es el vértice V del segmento parabólico le llamaremos el triángulo inscrito.

En la figura 2 se han representado también los triángulos $\triangle PMV$ y $\triangle VNQ$ inscritos, respectivamente, en los segmentos parabólicos determinados por las cuerdas PV y VQ.

La primera parte de la demostración consiste en calcular el área de los dos triángulos $\triangle PMV$ y $\triangle VNQ$. Arquímedes demuestra que

$$\lambda(\triangle VNQ) = \frac{1}{4}\lambda(\triangle VOQ), \qquad \lambda(\triangle VMP) = \frac{1}{4}\lambda(\triangle VOP)$$

Por tanto

$$\lambda(\triangle VNQ) + \lambda(\triangle VMP) = \frac{1}{4}\lambda(\triangle PVQ) \tag{1}$$

Llamando S al área del triángulo $\triangle PVQ$, el área de los dos nuevos triángulos es $\frac{1}{4}S$. Naturalmente, este proceso se puede repetir ahora con cada uno de los cuatro segmentos parabólicos determinados por las cuerdas PM, MV, VN y NQ inscribiendo en ellos los respectivos triángulos, la suma de cuyas áreas será igual a $\frac{1}{16}S$. Y puede repetirse indefinidamente.

Nosotros ahora acabaríamos calculando el área del segmento parabólico por

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n} S = \frac{4}{3} S$$

Pero Arquímedes, que no sabe de convergencia de series ni falta que le hace, razona de forma muy elegante por medio de la doble reducción al absurdo usual en la matemática griega.

Para ello hace uso de la llamada *propiedad arquimediana* o *axioma de Arquímedes*. Este axioma aparece en el libro de Arquímedes *La Esfera y el Cilindro* así como en *Sobre la Cuadratura de la Parábola* y en *Espirales*. Al parecer, dicho axioma fue ya formulado por Eudoxo. Como sabemos, la propiedad arquimediana establece que:

Dadas magnitudes cualesquiera $a > 0$ y $b > 0$, siempre es posible, por pequeña que sea a y grande que sea b, conseguir que un múltiplo conveniente de a exceda a b, es decir $na > b$ para algún número natural n.

Partiendo de la propiedad arquimediana se deduce fácilmente el siguiente resultado, llamado *principio de convergencia de Eudoxo*, en el que se basa el llamado *método de exhausción* griego:

Si de cualquier magnitud sustraemos una parte no menor que su mitad, y si del resto sustraemos de nuevo una cantidad no menor que su mitad, y si continuamos repitiendo este procesos de sustracción, terminaremos por obtener como resto una magnitud menor que cualquier magnitud del mismo tipo dada de antemano.

Arquímedes razona como sigue. Sea K el área del segmento parabólico PVQ.

(I) Supongamos que $K > \frac{4}{3}S$; es decir, que $K - \frac{4}{3}S > 0$.

Como el área del triángulo inscrito en un segmento parabólico PVQ es la mitad del área del paralelogramo circunscrito $PP'QQ'$, la cual, a su vez, es mayor que el área del segmento, se sigue que el área del triángulo inscrito en un segmento parabólico es mayor que la mitad del área de dicho segmento, lo que permite aplicar el principio de convergencia de Eudoxo.

Por tanto, en la sucesión de áreas

$$K, K - S, K - (S + \frac{1}{4}S), K - (S + \frac{1}{4}S + \frac{1}{16}S), \ldots$$

cada una es menor que la mitad de la que le precede y, por tanto, en virtud del citado principio, podemos concluir que en alguna etapa se tendrá que

$$K - \frac{4}{3}S > K - \left(S + \frac{1}{4}S + \frac{1}{16}S + \cdots + \frac{1}{4^n}S\right)$$

Esto implica que

$$S + \frac{1}{4}S + \frac{1}{16}S + \cdots + \frac{1}{4^n}S > \frac{4}{3}S$$

lo que es contradictorio con la igualdad, conocida por Arquímedes, que dice que:

$$S + \frac{1}{4}S + \frac{1}{16}S + \cdots + \frac{1}{4^n}S = \frac{4}{3}S - \frac{1}{3}\frac{1}{4^n}S \tag{2}$$

la cual implica que $S + \frac{1}{4}S + \frac{1}{16}S + \cdots + \frac{1}{4^n}S < \frac{4}{3}S$. Por tanto, no puede ser $K > \frac{4}{3}S$.

(II) Supongamos que $K < \frac{4}{3}S$; es decir, que $\frac{4}{3}S - K > 0$.

Como cada una de las áreas $S, \frac{1}{4}S, \frac{1}{16}S, \ldots, \frac{1}{4^n}S$ es menor que la mitad de la que le precede y, por tanto, en virtud del principio de convergencia de Eudoxo, podemos concluir que en alguna etapa se tendrá que $\frac{1}{4^n}S < \frac{4}{3}S - K$. Entonces

$$\frac{4}{3}S - K > \frac{1}{4^n}S > \frac{1}{3}\frac{1}{4^n}S = \frac{4}{3}S - \left(S + \frac{1}{4}S + \frac{1}{16}S + \cdots + \frac{1}{4^n}S\right)$$

Lo que implicaría que

$$K < S + \frac{1}{4}S + \frac{1}{16}S + \cdots + \frac{1}{4^n}S$$

Que es absurdo pues la suma de la derecha es el área de un polígono inscrito en el segmento parabólico. Por tanto, no puede ser $K < \dfrac{4}{3}S$.

La única posibilidad es $K = \dfrac{4}{3}S$. $\square$

Área de una espiral

El siguiente ejemplo de cuadratura sigue un procedimiento que, traducido a las notaciones actuales, es prácticamente el mismo de la integral de Riemann.

La espiral de Arquímedes es la curva que describe un punto material que se mueve con velocidad uniforme a lo largo de una semirrecta que gira con velocidad angular uniforme alrededor de su extremo. Es un ejemplo de las llamadas *curvas mecánicas*. La ecuación polar de una espiral de Arquímedes es de la forma $\rho = a\vartheta$, donde $a > 0$ es una constante.

Teorema. El área del primer ciclo de una espiral es igual a una tercera parte del área del círculo circunscrito.

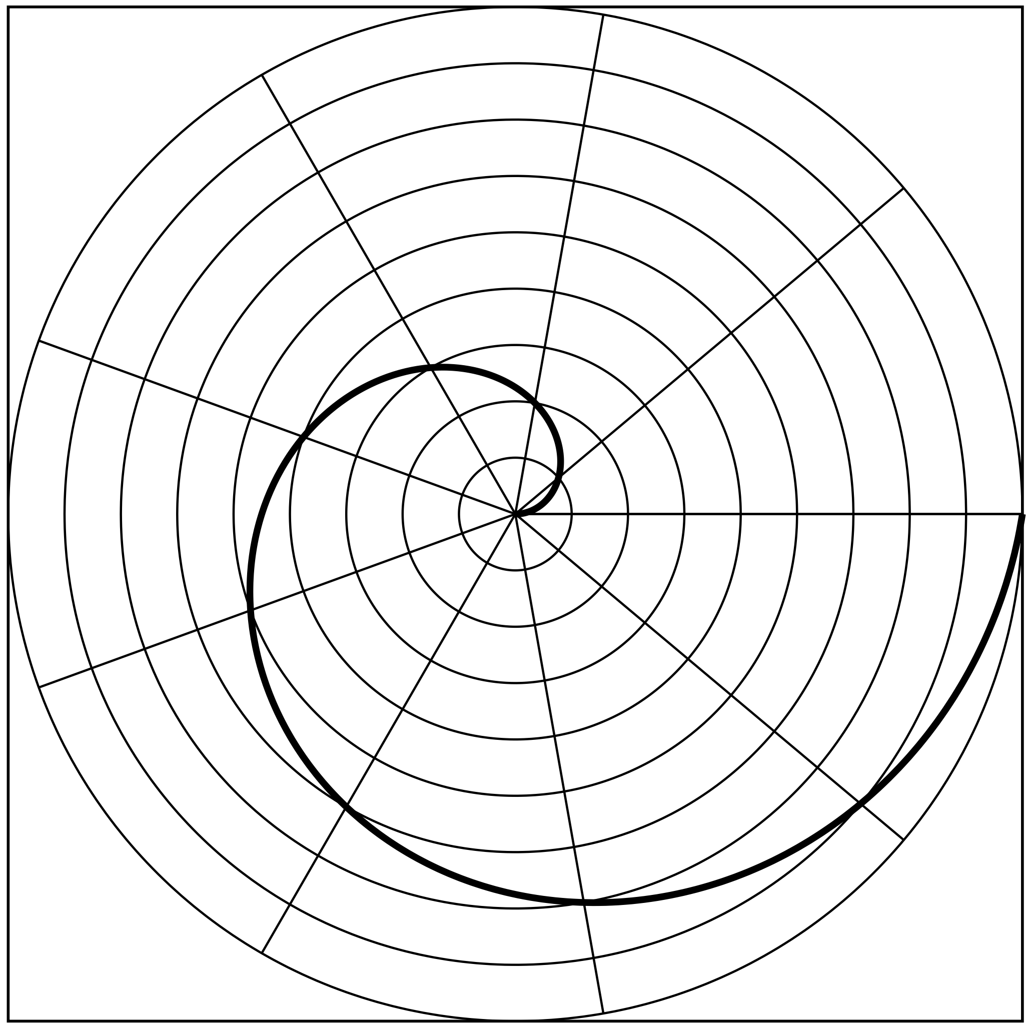


Figura 3. Cuadratura de una espiral

Demostración. Consideremos una espiral de Arquímedes de ecuación polar $\rho = a\vartheta$ y calculemos el área cuando el ángulo polar varía desde 0 a 2π, es decir, de la primera vuelta de la espiral. El radio del círculo circunscrito es $2\pi a$. Para ello dividimos este círculo en sectores de amplitud $\vartheta = 2\pi/n$, desde $\vartheta = 2\pi k/n$ a $\vartheta = 2\pi(k+1)/n$ para $k = 0, 1, \ldots, n-1$. En cada sector examinamos el arco de espiral que queda dentro del mismo y acotamos el área correspondiente a dicho arco de espiral entre las áreas de dos sectores circulares. Teniendo en cuenta que el área de un sector circular de radio r y amplitud φ radianes es $\frac{1}{2}r^2\varphi$, resulta que el área de sector circular más grande inscrito en cada arco de espiral es $\frac{1}{2}(a2\pi k/n)^2(2\pi/n)$, y el área de sector circular más pequeño circunscrito a cada arco de espiral es $\frac{1}{2}(a2\pi(k+1)/n)^2(2\pi/n)$. Deducimos que el área, S, de la espiral verifica que:

$$\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2}\left(\frac{a2\pi k}{n}\right)^2\frac{2\pi}{n} = \frac{4\pi^3a^2}{n^3}\sum_{k=0}^{n-1}k^2 < S < \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\frac{a2\pi k}{n}\right)^2\frac{2\pi}{n} = \frac{4\pi^3a^2}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2$$

Arquímedes conocía que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$. Usando este resultado podemos escribir la desigualdad anterior en la forma:

$$4\pi^3 a^2 \frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right) < S < 4\pi^3 a^2 \frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)$$

Pongamos $K = \frac{1}{3}\pi(2\pi a)^2$ que es una tercera parte del área del círculo circunscrito. Restando K en la desigualdad anterior y haciendo operaciones sencillas, obtenemos que:

$$K\left(-\frac{3}{2n}+\frac{1}{2n^2}\right) < S - K < K\left(\frac{3}{2n}+\frac{1}{2n^2}\right);$$

y como $1/n^2 \leq 1/n$, obtenemos que $-2K/n < S - K < 2K/n$. Usando ahora el axioma de Arquímedes se concluye que $S = K$. $\square$

Cálculo de tangentes en la matemática griega

Además de las cuadraturas, otro problema relacionado con curvas como las cónicas (circunferencia, parábolas, elipses, hipérbolas) y algunas pocas más como la cisoide de Diocles y la concoide de Nicomedes, era el trazado de tangentes a las mismas. El concepto de tangencia de los griegos es estático y, naturalmente, geométrico. Inicialmente, la tangente se considera como una recta que toca a la curva sin cortarla. Esta definición resultaba apropiada para la circunferencia pero no lo era para otras curvas. En el siglo III a.C., Apolonio definió la tangente a una sección cónica y procedió a determinarla en cada caso. Las técnicas para el cálculo de tangentes eran, por supuesto, geométricas. Para curvas como la espiral de Arquímedes estas técnicas no eran de gran utilidad. Arquímedes sabía trazar las tangentes a su espiral y se cree que para ello consideró el problema desde un punto de vista cinemático, calculando la dirección del movimiento de un punto que genera la espiral.

Las matemáticas en Europa en el siglo XVII

El período de las matemáticas griegas abarca casi 1000 años, desde los pitagóricos en el siglo VI a.C. hasta los últimos representantes de la Escuela de Alejandría en el siglo V de nuestra era. Suele señalarse el asesinato de Hypatia en marzo del 415 por hordas de fanáticos cristianos como el final de esta época. Es sabido que la civilización Romana, tan excelente en tantos aspectos, no destacó en el estudio de las ciencias puras y, en particular, de las matemáticas. La prueba de ello es que no hay ningún matemático Romano digno de mención. No obstante, el sistema de numeración Romano se impuso extendiéndose por todo el Imperio. Con el triunfo del Cristianismo a finales del siglo IV y la caída del Imperio Romano de Occidente en el año 476, se inicia una larga era de oscurantismo en Europa. La fe y los dogmas no son demostrables lógicamente; disputas teológicas ocupan el lugar de los estudios de la Naturaleza y la Biblia es la fuente de todo conocimiento. Según San Agustín "las palabras de las Escrituras tienen más autoridad que toda la inteligencia humana". El racionalismo científico es sospechoso de paganismo.

La herencia matemática griega pasó a los árabes de donde regresó a Europa ya en el siglo XII. En estos siglos se desarrolló sobre todo la aritmética y los comienzos del álgebra. Pero hay que esperar hasta el siglo XVII para que en Europa empiecen a notarse cambios significativos en la forma de hacer matemáticas y a lograr avances que abren nuevas perspectivas. Las características principales de las matemáticas en el siglo XVII en Europa son las siguientes.

- Asimilación y síntesis de la tradición clásica griega y del legado árabe.
- Se sigue admirando el rigor demostrativo euclidiano pero se buscan procedimientos heurísticos. Se impone la idea de "primero descubrir y luego demostrar".
- Progresos decisivos en el simbolismo algebraico (Viéte, Stevin). Concepto de cantidad abstracta.
- Invención de la geometría analítica por Fermat y Descartes.
- Multitud de nuevas curvas, muchas de ellas curvas mecánicas, como la cicloide, que llevan consigo problemas de tangentes, cuadraturas, centros de gravedad, máximos y mínimos, rectificaciones.
- Invención de métodos infinitesimales para tratar problemas de cuadraturas, tangentes, máximos y mínimos. Libre uso del infinito.
- Inicios del estudio matemático del movimiento. Concepto de cantidad variable.
- La Revolución Científica protagonizada por Copérnico, Galileo y Kepler. Mecanicismo.
- Invención de los logaritmos por Neper. Progresos de la astronomía y de la trigonometría. Desarrollo de la óptica.

- Creación de instituciones científicas como la Royal Society (1660) en Londres y la Académie des Sciences (1666) en París y comienzo de las publicaciones científicas periódicas.

Es conocido que la carencia de una teoría aritmética satisfactoria de las cantidades inconmensurables, hizo que los matemáticos griegos consideraran la Geometría como una ciencia más general que la Aritmética, lo que condujo al desarrollo de un álgebra geométrica que fue usada por Euclides, Arquímedes y Apolonio para realizar sus cálculos. La consecuencia de esta actitud fue que durante casi 2000 años, en Europa, *casi todo razonamiento matemático riguroso se expresó en lenguaje geométrico*.

los matemáticos del siglo XVII se distancian de esta tradición, pero no se produce un corte radical sino que, como es usual, se trata de un proceso lento al que contribuyen muchos estudiosos. Con respecto al Cálculo, podemos destacar una primera etapa empírica, que comprende los dos primeros tercios del siglo XVII, en la que se introducen una serie de conceptos como "indivisibles" e "infinitésimos" que permiten desarrollar técnicas para calcular tangentes o realizar cuadraturas. Dichas técnicas carecen de rigor y son usadas de forma heurística, aunque los matemáticos que las usan afirman que podrían ser justificadas al estilo clásico. A este respecto son significativas las siguientes afirmaciones.

J. Kepler en *Nova stereometria doliorum vinariorum* (1615):

> *Podríamos obtener demostraciones perfectas de los libros de Arquímedes, a nosotros no nos repele la espinosa lectura de ellos.*

P. Fermat en *De acquationum localium. . . in quadratics infinitis parabolis el hiperbolis* (tratado de cuadraturas) (1658):

> *Basta hacer esta observación [sobre las condiciones para poder aplicar el método de Arquímedes] una vez, para no obligarse a recordar y a insistir constantemente sobre un artificio bien conocido de todos los geómetras. . . Así alcanzamos la conclusión que podría ser fácilmente confirmada por una más prolija prueba llevada a cabo a la manera de Arquímedes.*

B. Cavalieri en *Geometria Indivisibilibus continuorum* (1635):

> *Se podría demostrar todo esto utilizando las técnicas arquimedianas, pero supondría un gran esfuerzo.*

J. Wallis en *Arithmetica infinitorum* (1656):

> *Este procedimiento es altamente heterodoxo, pero puede verificarse mediante el bien conocido método apagógico [la doble reducción al absurdo del método de exhausción] de figuras inscritas y circunscritas, lo que es superfluo, porque la frecuente iteración produce náusea en el lector. Cualquiera ducho en Matemáticas puede realizar tal prueba.*

Para hacernos una idea clara de los precedentes que condujeron a la invención del Cálculo, lo mejor es estudiar cómo fueron solucionados algunos de los problemas por los matemáticos de los dos primeros tercios del siglo XVII. Consideraremos problemas de cuadraturas y de cálculo de tangentes.

La integración antes del Cálculo

Los indivisibles de Cavalieri

El método de integración geométrica que se consideraba ideal durante la primera mitad del siglo XVII era el método de exhausción que había sido inventado por Eudoxo y perfeccionado por Arquímedes. El nombre es desafortunado porque la idea central del método es la de evitar el infinito y por lo tanto este método no lleva a un "agotamiento" de la figura a determinar.

Entre los matemáticos del siglo XVII era general el deseo de encontrar un método para obtener resultados y que, a diferencia del método de exhausción, fuera directo. Y mejor que mejor si el nuevo método, aparte de dar resultados, pudiera ser utilizado para demostrarlos.

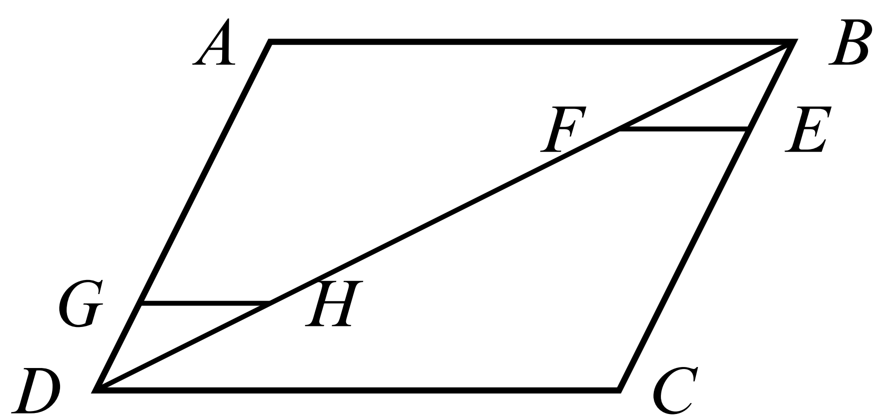
El camino que siguieron fue el que se deriva de una concepción intuitiva inmediata de las magnitudes geométricas. Se imaginaron un área como formada, por ejemplo, por un número infinito de líneas paralelas. Kepler ya había hecho uso de métodos infinitesimales en sus obras; el interés que se tomó en el cálculo de volúmenes de toneles de vino dio como resultado un libro *Nova stereometria doliurum vinariorum* (1615). En él consideraba sólidos de revolución como si estuvieran compuestos de diversas maneras por una cantidad infinita de partes sólidas.

Por ejemplo, consideraba una esfera como formada por un número infinito de conos con vértice común en el centro y base en la superficie de la esfera. Esto le conducía al resultado de que la esfera es igual en volumen al cono que tiene como altura el radio de la esfera y como base un círculo igual al área de la esfera, es decir un círculo con el diámetro de la esfera como radio.

Galileo tenía la intención de escribir un libro sobre indivisibles, pero este libro nunca se publicó.

Bonaventura Cavalieri
(Milán, 1598 – Bolonia, 1647)

Bonaventura Cavalieri (1598 - 1647), discípulo de Galileo y profesor en la Universidad de Bolonia, publicó en 1635 un tratado *Geometria Indivisibilibus Continuorum Nova quadam Ratione Promota* en el que, siguiendo ideas de Kepler y Galileo, desarrolló una técnica geométrica para calcular cuadraturas, llamada *método de los indivisibles*. En este método, un área de una región plana se considera formada por un número infinito de segmentos paralelos, cada uno de ellos se interpreta como un rectángulo infinitamente estrecho; un volumen se considera compuesto por un número infinito de áreas planas paralelas. A estos elementos los llama los *indivisibles* de área y volumen respectivamente. En líneas generales los "indivisibilistas" mantenían, como expresa Cavalieri en sus *Exercitationes Geometricae Sex* (1647), que *una línea está hecha de puntos como una sarta de cuentas; el plano está hecho de líneas, como un tejido de hebras y un sólido de áreas planas como un libro de hojas*.



La forma en que se aplicaba el método o principio de Cavalieri puede ilustrarse como sigue. Para demostrar que el paralelogramo $ABCD$ tiene área doble que cualquiera de los triángulos ABD o BCD, hace notar que cuando $GD = BE$, se tiene que $GH = FE$. Por tanto los triángulos ABD y BCD están constituidos por igual número de líneas iguales, tales como GH y EF, y por tanto sus áreas deben ser iguales.

Cuadratura de la cicloide por Roberval

Gilles de Roberval
(Noël-Saint-Martin, Francia, 1602 – París, 1675)

En 1630, Mersenne, propuso a sus amigos matemáticos hacer la cuadratura de la cicloide. Esta fue llevada a cabo por Gilles Personne de Roberval en 1634, utilizando esencialmente el método de los indivisibles de Cavalieri. Recuerda que la cicloide es la curva que describe un punto de una circunferencia que rueda sin deslizar.

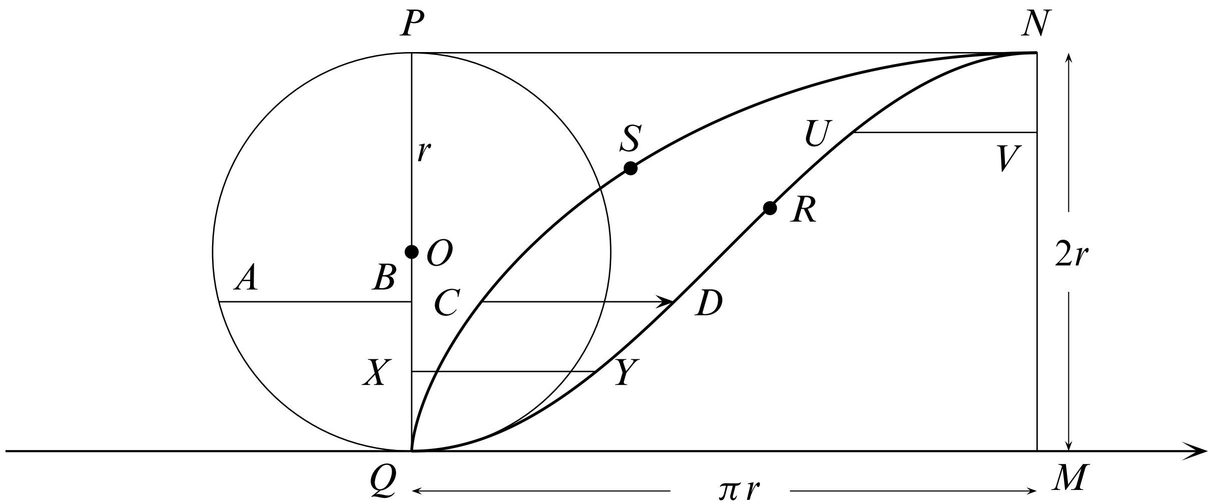


Figura 4. Cuadratura de la cicloide

En la figura 4, sea $QMNS$ la mitad de un arco de la cicloide generada por el círculo de radio r centrado en O. El área del rectángulo $QMNP$ es el doble del área del círculo. Construimos segmentos de línea infinitesimales horizontales, AB, con longitud determinada por la distancia horizontal entre el diámetro PQ y la circunferencia. Cada punto C de la cicloide lo sometemos a una traslación horizontal hasta el punto D, según el correspondiente segmento $AB = CD$, y así obtenemos la curva QRN, llamada compañera de la cicloide. Por la construcción realizada, las secciones horizontales del semicírculo y de la región comprendida entre la cicloide y su curva compañera son segmentos de igual longitud, por lo que dicha región tiene área igual a la mitad del circulo. Por otra parte, la curva compañera de la cicloide divide en dos partes iguales al rectángulo $QMNP$, pues, como Roberval demostró, las secciones horizontales de altura a y $2r - a$ dan en cada una de las partes en que dicha curva divide al rectángulo, segmentos iguales XY y UV. Deducimos así que el área encerrada por la mitad de un arco de cicloide es $\pi r^2 + \frac{1}{2}\pi r^2 = \frac{3}{2}\pi r^2$. Por tanto, concluimos que el área encerrada por un arco de la cicloide es tres veces el área del círculo que la genera.

Los matemáticos no se mostraban de acuerdo acerca del valor que había que dar al método de los indivisibles. La mayoría consideraba este método sólo como un método heurístico y creían que era aún necesaria una demostración por exhausción.

Parábolas e hipérbolas de Fermat

Pierre de Fermat

(Beaumont-de-Lomagne, Francia, 1601 – Castres, Francia, 1665)

La cuadratura de las curvas definidas por $y = x^n$ donde n es un número natural o bien un entero negativo $n \neq -1$, había sido realizada para $n = 1, 2 \ldots, 9$ por Cavalieri, aunque podemos remontarnos hasta Arquímedes que había resuelto geométricamente los casos correspondientes a $n = 1, 2, 3$. Fermat, con una ingeniosa idea, logró obtener la cuadratura de áreas limitadas por arcos de hipérbolas generalizadas $x^n y^m = 1$ $(m, n \in \mathbb{N})$.

Fermat seguía un método clásico de exhausción, pero con una idea feliz que consistió en considerar rectángulos infinitesimales inscritos en la figura a cuadrar cuyas bases estaban en progresión geométrica. Fermat considera al principio las hipérbolas $yx^n = k$ y manifiesta:

> *Digo que todas estas infinitas hipérbolas, excepto la de Apolonio, que es la primera, pueden ser cuadradas por el método de la progresión geométrica, de acuerdo a un procedimiento uniforme general.*

Vamos a hacernos una idea de cómo calculaba Fermat la cuadratura de la hipérbola generalizada $y = x^{-2}$ para $x \geq a$. Usaremos notación y terminología actuales.

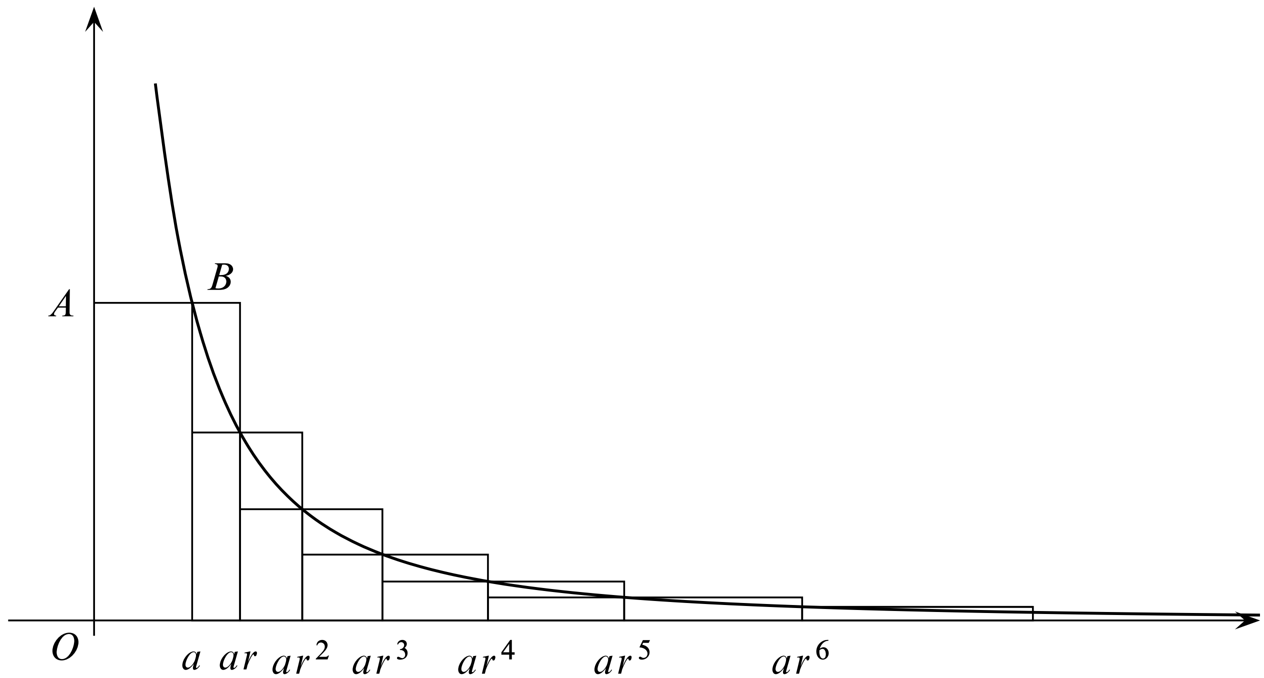


Figura 5. Cuadratura de la hipérbola de Fermat $y = x^{-2}$

Elegimos un número $r > 1$ y consideremos los puntos de abscisas $a, ar, ar^2, ar^3, \ldots$. Los rectángulos inscritos (ver figura 5) tienen área

$$(ar-a)\frac{1}{(ar)^2}+(ar^2-ar)\frac{1}{(ar^2)^2}+(ar^3-ar^2)\frac{1}{(ar^3)^2}+\cdots=\frac{r-1}{ar^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{r^k}=\frac{1}{ar}$$

El área de los rectángulos circunscritos viene dada por

$$(ar-a)\frac{1}{a^2}+(ar^2-ar)\frac{1}{(ar)^2}+(ar^3-ar^2)\frac{1}{(ar^2)^2}+\cdots=\frac{r-1}{a}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{r^k}=\frac{r}{a}$$

Por tanto, llamando S al área bajo la curva, tenemos que

$$\frac{1}{ar}<S<\frac{r}{a}$$

Como esta desigualdad es válida para todo $r>1$, concluimos que $S=\dfrac{1}{a}$. Observa que dicho valor es precisamente el área del rectángulo $OABa$.

El razonamiento de Fermat tiene detalles muy interesantes que se pierden usando la terminología y símbolos actuales. Vamos a reproducir parte de su razonamiento. Fermat se apoya en una propiedad de las progresiones geométricas de razón menor que la unidad, que enuncia como sigue:

> *Dada una progresión geométrica cuyos términos decrecen indefinidamente, la diferencia entre dos términos consecutivos es al más pequeño de ellos, como el mayor es a la suma de los términos restantes.*

Llamemos $R_1, R_2, R_3, \ldots$ a las áreas de los sucesivos rectángulos y S a la suma de todas ellas. Como se trata de una progresión geométrica decreciente, se tiene que:

$$\frac{R_1 - R_2}{R_2} = \frac{R_1}{S - R_1}$$

Simplificando, resulta

$$S - R_1 = \frac{1}{a} = OA.AB$$

Dice Fermat:

> [. . .] *si ahora añadimos* [a ambos miembros de esta igualdad] *el rectángulo* R_1 *que a causa de las infinitas subdivisiones, se desvanece y queda reducido a nada, alcanzamos*

> *la conclusión, que podría ser fácilmente confirmada por una más prolija prueba llevada a cabo a la manera de Arquímedes. . . No es difícil extender esta idea a todas las hipérbolas definidas anteriormente excepto la que ha sido indicada* [la hipérbola de Apolonio].

Vemos cómo en las cuadraturas de Fermat de hipérbolas y parábolas generalizadas, subyacen los aspectos esenciales de la integral definida:

- La división del área bajo la curva en elementos de área infinitamente pequeños.
- Aproximación de la suma de esos elementos de área por medio de rectángulos infinitesimales de altura dada por la ecuación analítica de la curva.
- Un intento de expresar algo parecido a un límite de dicha suma cuando el número de elementos crece indefinidamente mientras se hacen infinitamente pequeños.

La integración aritmética de Wallis

John Wallis
(Ashford, Reino Unido, 1616 – Oxford, 1703)

John Wallis (1616 - 1703) publicó en 1655 un tratado *Arithmetica infinitorum* ("La Aritmética de los infinitos") en el que aritmetizaba el método de los indivisibles de Cavalieri. Para ilustrar el método de Wallis consideremos el problema de calcular el área bajo la curva $y = x^k$ $(k = 1, 2, \dots)$ y sobre el segmento $[0, a]$ (ver figura (6)). Siguiendo a Cavalieri, Wallis considera la región PQR formada por un número infinito de líneas verticales paralelas, cada una de ellas con longitud igual a x^k. Por tanto, si dividimos el segmento $PQ = AB = a$ en n partes de longitud $h = a/n$, donde n es infinito, entonces la suma de estas infinitas líneas es del tipo

$$0^k + h^k + (2h)^k + (3h)^k + \cdots + (nh)^k \tag{3}$$

Análogamente, el área del rectángulo $ABCD$ es

$$a^k + a^k + a^k + \cdots + a^k = (nh)^k + (nh)^k + (nh)^k + \cdots + (nh)^k \tag{4}$$

La razón entre el área de la región PQR y el rectángulo $ABCD$ es

$$\frac{\text{Área } PQR}{\text{Área } ABCD} = \frac{0^k + 1^k + 2^k + 3^k + \cdots + n^k}{n^k + n^k + n^k + n^k + \cdots + n^k} \tag{5}$$

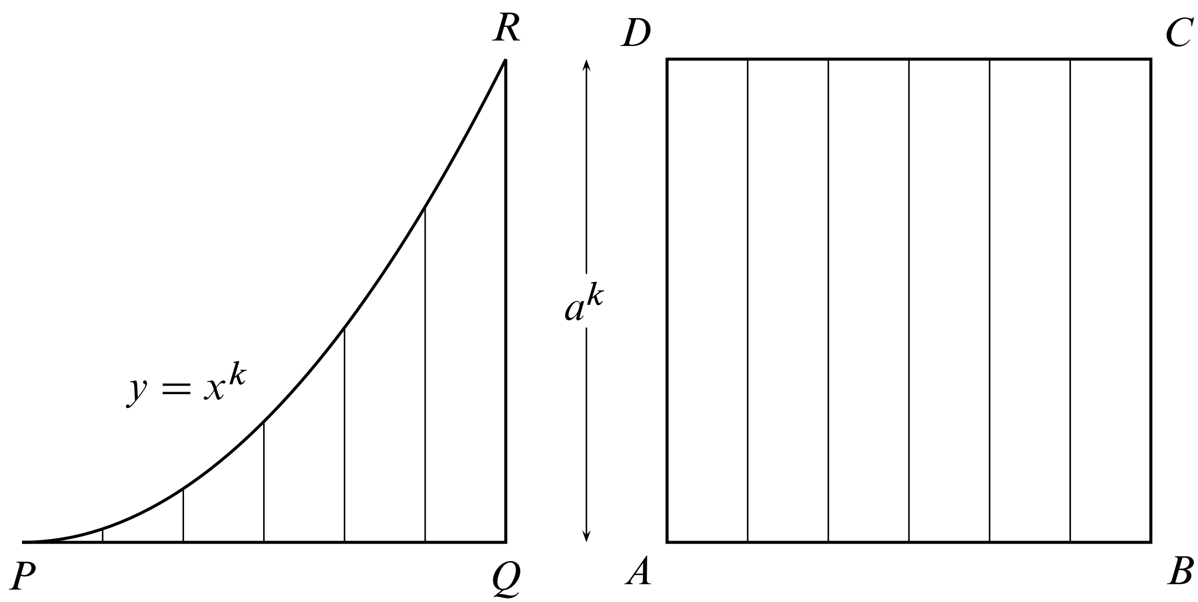


Figura 6. Comparando indivisibles

Esto lleva a Wallis a estudiar el valor de la expresión (5) para $n = \infty$[1]. Después de estudiar varios casos para valores de $k = 1, 2, 3$ haciendo, en cada caso, sumas para distintos valores de $n = 1, 2, 3, 4$, Wallis observa ciertas regularidades en las mismas y, con tan débil base, acaba

[1] Fue precisamente Wallis quien introdujo en 1655 en la obra *De Sectionibus Conicis*, el símbolo del "lazo del amor", ∞, con el significado de "infinito".

afirmando que para $n = \infty$ y para todo $k = 1, 2, \ldots$, se verifica que:

$$\frac{0^k + 1^k + 2^k + 3^k + \cdots + n^k}{n^k + n^k + n^k + n^k + \cdots + n^k} = \frac{1}{k+1} \tag{6}$$

Naturalmente, de aquí deduce el valor del área de la región PQR:

$$\frac{\text{Área } PQR}{\text{Área } ABCD} = \frac{\text{Área } PQR}{a^{k+1}} = \frac{1}{k+1} \Rightarrow \text{Área } PQR = \frac{a^{k+1}}{k+1} \quad k = 1, 2, 3 \ldots \tag{7}$$

Este resultado ya era conocido anteriormente, pero Wallis no se paraba aquí y extendía la validez de la igualdad (6) a todos los exponentes racionales positivos. Su peculiar razonamiento tiene interés pues en él se basó Newton para obtener la serie binomial. Lo esencial del mismo puede resumirse, en términos actuales, como sigue.

Definamos el índice, $\sigma(f)$, de una función f mediante la igualdad

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(0) + f(1) + f(2) + \cdots + f(n)}{f(n) + f(n) + f(n) + \cdots + f(n)} = \frac{1}{\sigma(f) + 1} \tag{8}$$

suponiendo que dicho límite tenga sentido. Por ejemplo, (6) nos dice que el índice de la función $f_k(x) = x^k$ es $\sigma(f_k) = k$ para $k = 1, 2, \ldots$.

Wallis observó que, dada una progresión geométrica de potencias de x como, por ejemplo $1, x^3, x^5, x^7, \ldots$, la correspondiente sucesión de índices $0, 3, 5, 7, \ldots$ forman una progresión aritmética. Como $\sigma(f_k) = k$, esta observación es trivial, pero le permite dar un atrevido salto adelante, de manera que mediante una audaz interpolación establece (sin demostración) que una conclusión análoga puede deducirse para la progresión geométrica

$$1, \sqrt[q]{x}, (\sqrt[q]{x})^2, \ldots, (\sqrt[q]{x})^{q-1}, x$$

de manera que la sucesión de sus índices debe formar una progresión aritmética, de donde se sigue que debe ser $\sigma\big((\sqrt[q]{x})^p\big) = p/q$ para $p = 1, 2, \ldots, q$. De esta forma obtiene que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{0})^p + (\sqrt{1})^p + (\sqrt{2})^p + (\sqrt{3})^p + \cdots + (\sqrt{n})^p}{(\sqrt{n})^p + (\sqrt{n})^p + (\sqrt{n})^p + (\sqrt{n})^p + \cdots + (\sqrt{n})^p} = \frac{1}{p/q + 1}$$

Wallis estaba convencido de la validez de su método, conocido posteriormente como *interpolación de Wallis*, que tuvo importancia en el siglo XVIII. Puede considerarse como un intento de resolver el siguiente problema:

> *Dada una sucesión P_k, definida para valores enteros de k, encontrar el significado de P_α cuando α no es un número entero.*

Además, Wallis deduce que *necesariamente debe ser* $(\sqrt[q]{x})^p = x^{p/q}$. Será Newton, poco más tarde, quien siguiendo los pasos de Wallis, introducirá el uso de potencias fraccionarias y negativas.

Wallis, incluso llega a afirmar que la igualdad

$$\int_0^a x^r \, \mathrm{d}x = \frac{a^{r+1}}{r+1} \tag{9}$$

no es válida solamente para exponentes r racionales, sino también para otros como $r = \sqrt{3}$ pero, naturalmente, no puede dar ninguna justificación.

Obtenida, a su manera, la cuadratura fundamental (9), Wallis intenta calcular la integral

$$\int_0^1 \sqrt{x - x^2}\,\mathrm{d}x$$

Dicha integral representa el área bajo la semicircunferencia de centro $(1/2, 0)$ y radio $1/2$, su valor es, por tanto, $\pi/8$. Wallis quería obtener dicho resultado evaluando directamente la integral. No tuvo éxito en este empeño que Newton habría de resolver posteriormente, pero sus resultados le llevaron a obtener la llamada *fórmula de Wallis*

$$\frac{2}{\pi} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \cdots}{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 8 \cdots}$$

Orígenes y desarrollo del concepto de derivada

El concepto de derivada presupone los de función y de límite funcional, los cuales tuvieron una larga evolución hasta alcanzar su significado actual, por eso la definición de derivada es relativamente reciente. No obstante, técnicas en las que podemos reconocer el uso, más o menos explícito, de derivadas, se han venido usando desde el siglo XVII, incluso antes de que Newton y Leibnitz, en el último tercio de dicho siglo, las formularan en términos de *fluxiones* y de *cocientes diferenciales* respectivamente. Durante los siglos XVIII y XIX las derivadas fueron ampliamente desarrolladas y aplicadas a campos muy diversos y no fueron definidas en los términos actuales hasta el último tercio del siglo XIX. Todo este proceso lo resume la historiadora de las matemáticas Judith V. Grabiner en una frase feliz: *"Primero, la derivada fue usada, después descubierta, explorada y desarrollada y, finalmente, definida"*.

Cálculo de tangentes y de valores extremos

Los matemáticos de la antigüedad sabían cómo trazar tangentes a diversos tipos de curvas. El concepto de tangencia de los griegos es estático y, naturalmente, geométrico. Inicialmente, la tangente se considera como una recta que toca a la curva sin cortarla. Esta definición resultaba apropiada para la circunferencia pero no lo era para otras curvas. En el siglo III a.C., Apolonio definió la tangente a una sección cónica y procedió a determinarla en cada caso. Las técnicas para el cálculo de tangentes eran, por supuesto, geométricas. Para curvas como la espiral de Arquímedes o la concoide de Nicomedes estas técnicas no eran de gran utilidad.

Con la invención de la geometría analítica, había una enorme variedad de nuevas curvas para cuyo estudio no servían los métodos tradicionales. Los matemáticos del siglo XVII se vieron en la necesidad de inventar nuevas técnicas para calcular tangentes.

En el periodo de 1630 a 1660 empiezan a usarse técnicas en las que podemos apreciar el uso de derivadas. Suelen ser técnicas específicas para resolver problemas concretos de forma empírica, con frecuencia dichas técnicas no se justifican sino que, simplemente, se comprueba que proporcionan soluciones correctas. Los matemáticos de la época se interesaban por problemas de óptica, por ejemplo, determinar la forma de una lente que hace que todos los rayos luminosos paralelos entre sí o los que parten de un único foco, después de atravesar la lente, converjan en un único punto. Problemas físicos, como la determinación de la trayectoria de un cuerpo que se mueve alrededor de un centro y que cae al mismo tiempo hacia ese centro con aceleración constante. Otros problemas consistían en el cálculo de tangentes y de valores máximos o mínimos.

Vamos a considerar algunas de las aportaciones más significativas.

El método de máximos y mínimos de Fermat

Pierre de Fermat
(Beaumont-de-Lomagne, Francia, 1601 – Castres, Francia, 1665)

En 1637 Fermat escribió una memoria titulada *Methodus ad disquirendam maximan et minimam* ("Método para la investigación de máximos y mínimos"). En ella se establecía el primer procedimiento general conocido para calcular máximos y mínimos. Fermat se expresa como sigue.

> Toda la teoría de la investigación de máximos y mínimos supone la consideración de dos incógnitas y la única regla siguiente:
>
> **1.** Sea a una incógnita cualquiera del problema (que tenga una, dos o tres dimensiones, según convenga al enunciado).
> **2.** Se expresará la cantidad máxima o mínima por medio de a en términos de cualquier grado.
> **3.** Se sustituirá a continuación la incógnita original a por $a+e$, y se expresará la cantidad máxima o mínima por medio de a y e, en términos de cualquier grado.
> **4.** Se "*adigualará*" para hablar como Diofanto, las dos expresiones de la cantidad máxima o mínima.
> **5.** Se eliminarán los términos comunes de ambos lados, tras lo cual resultará que a ambos lados habrá términos afectados de e o de una de sus potencias.
> **6.** Se dividirán todos los términos por e, o por alguna potencia superior de e, de modo que desaparecerá la e, de al menos uno de los términos de uno cualquiera de los dos miembros.
> **7.** Se suprimirán, a continuación, todos los términos donde todavía aparece la e o una de sus potencias, y se iguala lo que queda, o bien si en uno de los miembros no queda nada, se igualará, lo que viene a ser lo mismo, los términos afectados con signo positivo a los afectados con signo negativo.
> **8.** La resolución de esta última ecuación dará el valor de a, que conducirá al máximo o mínimo, utilizando la expresión original.

Fermat ilustraba su método hallando el punto E de un segmento AC que hace máxima el área del rectángulo $AE.EC$.

Pongamos $AC = b$.

1. Sea a uno de los segmentos, el otro será $b - a$.
2. El producto del que se debe encontrar el máximo es $ba - a^2$.
3. Sea ahora $a + e$ el primer segmento de b, el segundo segmento será $b - a - e$, y el producto de segmentos: $ba - a^2 + be - 2ae - e^2$.
4. Se debe "*adigualar*" al precedente: $ba - a^2 + be - 2ae - e^2 \sim ba - a^2$.
5. Suprimiendo términos comunes: $be \sim 2ae + e^2$.
6. Dividiendo todos los términos por e: $b \sim 2a + e$.
7. Se suprime la e: $b = 2a$.
8. Para resolver el problema se debe tomar por tanto la mitad de b.

El recurso de hacer $e = 0$ es equivalente a lo indicado en la instrucción 7 de Fermat. Esto era precisamente lo que se hacía al aplicar el método, a pesar de que antes era necesario dividir por e, lo que resultaba algo contradictorio.

Debemos observar que el método de Fermat da una condición necesaria para los máximos y mínimos, pero esa condición no es suficiente y tampoco distingue máximos de mínimos. Es un método puramente algebraico y algorítmico, no geométrico.

Es tentador reproducir este razonamiento en términos actuales. Hagamos $a = x$, $e = \triangle x$, y pongamos $f(x) = x(b - x)$.

1 – 5 $f(x + \triangle x) - f(x) \sim 0.$

6 $\dfrac{f(x + \triangle x) - f(x)}{\triangle x} \sim 0.$

7, 8 $\left(\dfrac{f(x + \triangle x) - f(x)}{\triangle x}\right)_{\triangle x = 0} = 0$

Para funciones derivables podemos interpretar todo esto como que el valor de x que hace máximo o mínimo a $f(x)$ es la solución de resolver la ecuación

$$f'(x) = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{f(x + \triangle x) - f(x)}{\triangle x} = 0$$

Sin embargo, esto significa extrapolar demasiado el contenido estricto del método. Lo que estamos haciendo es interpretar con nuestra mirada de hoy lo que hizo Fermat. En primer lugar, Fermat no pensaba en una cantidad como una función, y por eso habla de "cantidad máxima o mínima", no de una función que alcance un máximo o un mínimo. Fermat no tiene clara la noción de variable independiente. Él está pensando en una ecuación algebraica con dos incógnitas que interpreta como segmentos, es decir, magnitudes lineales dadas. Fermat no decía nada acerca de que e fuese un infinitesimal, ni siquiera una magnitud muy pequeña, y el método no implica ningún concepto de límite, sino que es puramente algebraico. Además, la condición 6 no tiene sentido en esta interpretación. Los problemas a los que Fermat aplicó su método son problemas de construcciones geométricas más que de optimización de cantidades.

El método de las tangentes de Fermat

Fermat, determina la subtangente a una parábola haciendo uso de su método para máximos y mínimos.

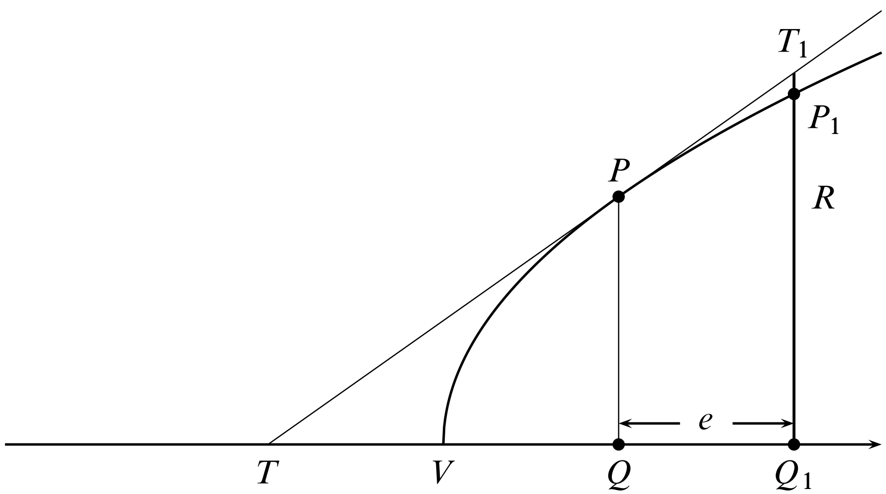


Figura 7. Cálculo de la subtangente

En la figura (7), el segmento TQ es la subtangente a la parábola en un punto dado P.

El vértice de la parábola es V. Teniendo en cuenta que los triángulos TQP y TQ_1P_1 son semejantes, resulta

$$\frac{T_1Q_1}{PQ} = \frac{TQ_1}{TQ} \tag{10}$$

Teniendo en cuenta ahora la propiedad de la parábola

$$\frac{VQ_1}{VQ} = \frac{P_1Q_1^2}{PQ^2}$$

y que $P_1Q_1 < T_1Q_1$, deducimos que:

$$\frac{VQ_1}{VQ} < \frac{TQ_1^2}{TQ^2} \tag{11}$$

Pongamos ahora $VQ = a$, que es la abscisa de la parábola en P, conocida porque se conoce P. Hagamos también $TQ = x$ que es la subtangente que queremos calcular, y $QQ_1 = e$. La igualdad (11) se expresa por:

$$\frac{a+e}{a} < \frac{(x+e)^2}{x^2} \Longleftrightarrow ax^2 + ex^2 < ax^2 + 2aex + ae^2$$

Fermat aplica su método de máximos y mínimos y sustituye esta desigualdad por la *adigualdad*

$$ax^2 + ex^2 \sim ax^2 + 2aex + ae^2$$

Cancelando términos y dividiendo por e obtenemos

$$x^2 \sim 2ax + ae$$

Eliminando ahora el término que queda en e, igualando y simplificando por x, se obtienes que $x = 2a$, resultado ya conocido de la Antigüedad y que expresa que la subtangente es el doble de la abscisa.

Realmente no se entiende bien la razón de por qué Fermat usa su método de máximos y mínimos para calcular tangentes y Descartes hizo una dura crítica de esta forma de proceder. Para responder a estas críticas, Fermat desarrolló, en una memoria de 1638, un procedimiento bastante general para calcular tangentes que, con notación actual, podemos resumir como sigue. Sea $P = (x, y)$ un punto de una curva $f(x, y) = 0$ y sea $P_1 = (x + e, y_1)$ otro punto de la curva próximo a P como en la figura (8). Llamemos $b = TQ$, la subtangente en P. Teniendo en cuenta que $PQ = y$, la igualdad (10) se escribe como

$$T_1Q_1 = \frac{y(b+e)}{b}$$

Como T_1Q_1 es casi igual a $y_1 = P_1Q_1$, Fermat escribe

$$f\left(x+e, \frac{y(b+e)}{b}\right) \sim 0$$

y a esta *adigualdad* le aplica su método para máximos y mínimos. Es fácil ver que ello conducirá a una expresión para b dada por

$$b = -\frac{y\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)}{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)}$$

Que, usando que la tangente viene dada por y/b, podemos escribir, viendo y como función (implícita) de x, en la forma familiar

$$y' = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)}{\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)}$$

La idea de "*adigualdad*" en Fermat puede interpretarse algo así como "cantidades infinitamente próximas". De alguna forma Fermat está considerando cantidades infinitesimales.

Es tentador expresar en términos actuales las ideas de Fermat para calcular tangentes. Esencialmente, dado un punto $P = (a, f(a))$ en una curva $y = f(x)$, se trata de calcular la pendiente de la curva en P. Sea QQ_1 un incremento de TQ en una cantidad E. Ya que los triángulos TQP y PRT_1 son semejantes, se tiene

$$\frac{PQ}{TQ} = \frac{T_1R}{E}$$

Pero, dice Fermat, T_1R es casi igual a P_1R; por tanto tenemos la *adigualdad*

$$\frac{PQ}{TQ} \sim \frac{P_1Q_1 - QP}{E}$$

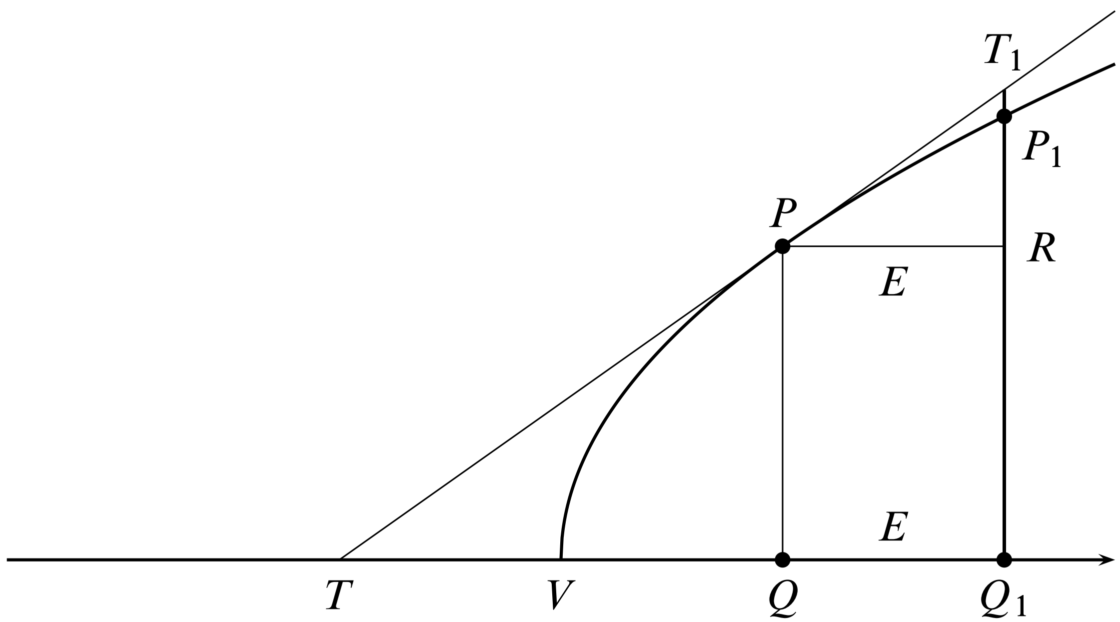


Figura 8. Cálculo de la tangente

Poniendo $PQ = f(a)$, la igualdad anterior puede escribirse como:

$$\frac{f(a)}{TQ} \sim \frac{f(a+E) - f(a)}{E}$$

Ahora, dice Fermat, se cancelan términos iguales en $f(a+E) - f(a)$, se divide por E y finalmente, se ignoran los términos que aún contengan E (lo que equivale a hacer $E = 0$), y el resultado es la pendiente de la tangente en P. Está claro que el procedimiento que indica Fermat es equivalente a calcular

$$\lim_{E \to 0} \frac{f(a+E) - f(a)}{E}$$

Naturalmente, a esta interpretación se le pueden hacer las mismas observaciones que hicimos a la interpretación análoga del método para máximos y mínimos.

• **Ejemplo.** Sea $f(x) = x^2 - 2x + 3$ y $a = 2$. Entonces $f(2) = 3$. Pongamos $c = TQ$ la longitud de la subtangente. Tenemos la *adigualdad*:

$$\frac{3}{c} = \frac{f(2+E) - f(2)}{E} = \frac{2E + E^2}{E} = 2 + E$$

Haciendo $E = 0$ se obtiene $3/c = 2$, por la que la subtangente es $c = 3/2$ y el valor de la pendiente de la tangente es $3/c = 2$ que, efectivamente es igual a la derivada de f en $x = 2$.

El método de Roberval y de Torricelli para las tangentes

Roberval (1602–1675) y Torricelli (1608 – 1647)

En 1630 Roberval y Torricelli descubrieron independientemente un método para calcular tangentes por medio de consideraciones cinemáticas. Este método se apoya en dos ideas básicas: la primera es la de considerar una curva como la trayectoria de un punto móvil que obedece a dos movimientos simultáneamente, y la segunda es la de considerar la tangente en un punto de la curva como la dirección del movimiento en ese mismo punto. Si la razón entre las velocidades de los dos movimientos es conocida, la dirección del movimiento resultante se puede hallar mediante la ley del paralelogramo. Ya en la antigüedad, Arquímedes había usado un método análogo para trazar la tangente a su espiral.

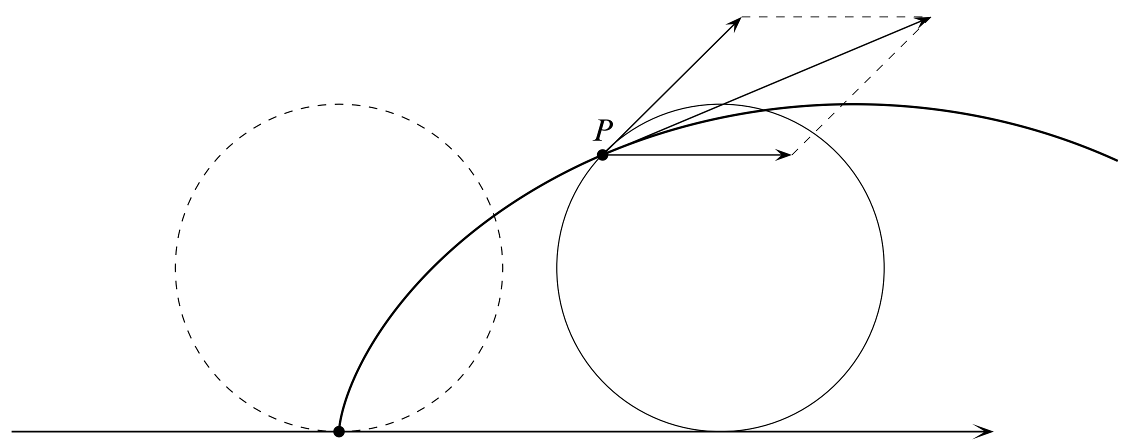


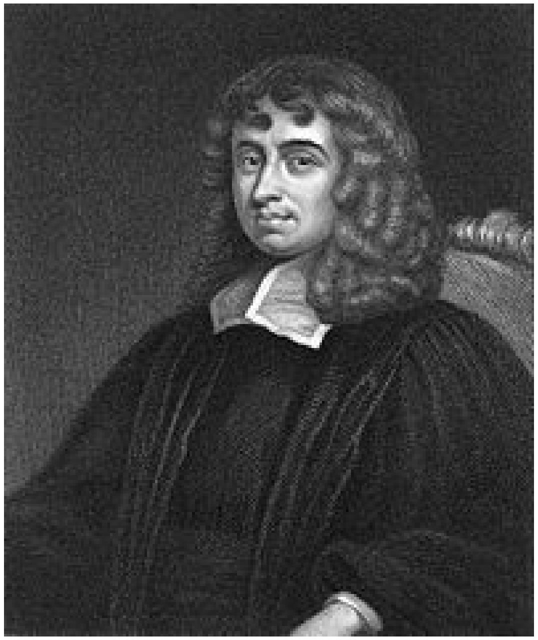
Figura 9. Tangente a la cicloide

Consideremos una cicloide, esto es la curva que describe un punto de una circunferencia que rueda sin deslizar. El punto que genera la cicloide tiene una velocidad angular igual a la velocidad de avance horizontal, por tanto, su tangente en un punto P se obtiene sumando el vector tangente a la circunferencia generadora en P y un vector horizontal en P, y ambos vectores tienen igual módulo.

Naturalmente, esta idea de la tangente solamente podía aplicarse a curvas mecánicas, si bien tenía la virtud de relacionar geometría y dinámica siguiendo las ideas de Galileo.

El triángulo diferencial de Barrow

Isaac Barrow
(Londres, 1630 – id., 1677)



Isaac Barrow (1630 - 1677) también dio un método para calcular tangentes. Barrow era un admirador de los geómetras antiguos y editó las obras de Euclides, Apolonio y de Arquímedes, a la vez que publicaba sus propias obras *Lectiones Opticae* (1669) y *Lectiones Geometricae* (1670) en la edición de las cuales colaboró Newton. El tratado *Lectiones Geometricae* se considera una de las principales aportaciones al Cálculo. En él Barrow quiso hacer una puesta al día de todos los últimos descubrimientos, principalmente de problemas de tangentes y cuadraturas. Barrow hace un tratamiento detallado de todos estos problemas incluyendo conceptos como tiempo y movimiento y usando métodos infinitesimales y métodos de indivisibles.

Una de las herramientas a las que saca gran partido es al triángulo característico o triángulo diferencial.

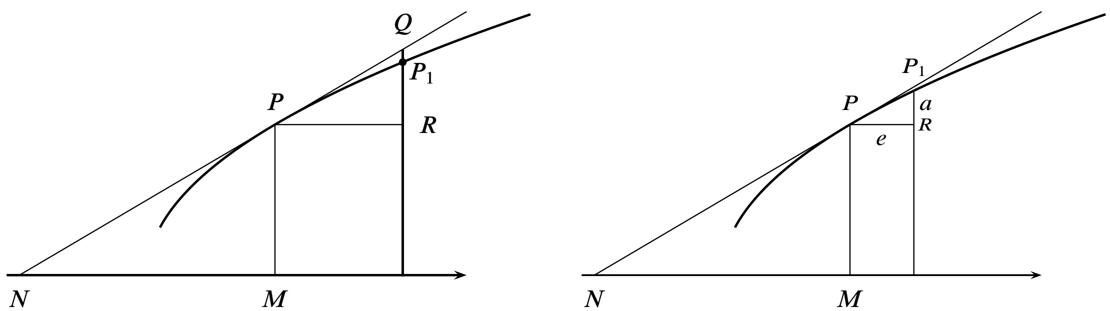


Figura 10. Triángulo diferencial

Partiendo del triángulo PRQ, que resulta de un incremento PR, como este triángulo es semejante al PNM, resulta que la pendiente de la tangente PM/MN es igual a QR/PR. Barrow afirma que cuando el arco PP_1 es muy pequeño podemos identificarlo con el segmento PQ de la tangente en P. El triángulo PRP_1 de la figura de la derecha, en el cual PP_1 es considerado a la vez como un arco de la curva y como parte de la tangente, es el *triángulo característico o diferencial*. Ya había sido usado mucho antes por Pascal y otros en problemas de cuadraturas.

En la Lección X de *Lectiones*, Barrow calcula la tangente a una curva, dada por una ecuación polinómica $f(x,y) = 0$, en un punto de la misma $P = (x,y)$ de la forma siguiente. Pongamos $P_1 = (x+e, y+a)$ un punto de la curva próximo a P y sustituyamos estas coordenadas en la ecuación $f(x,y) = 0$. En palabras de Barrow:

> Rechacemos todos los términos en los que no hay a o e (porque se anulan unos a otros por la naturaleza de la curva); rechacemos todos los términos en los que a o e están por encima de la primera potencia, o están multiplicados ambos (porque, siendo infinitamente pequeños, no tienen valor en comparación con el resto).

Después de estas operaciones se puede calcular el cociente a/e que es la pendiente de la curva en el punto P.

• **Ejemplo.** Consideremos la curva $x^3 + y^3 = r^3$ y sigamos el método de Barrow para calcular su pendiente en un punto $P = (x, y)$ de la misma. Como el punto $P_1 = (x + e, y + a)$ está en la curva se tiene:

$$(x+e)^3 + (y+a)^3 = r^3$$

Esto es

$$x^3 + 3x^2e + 3xe^2 + e^3 + y^3 + y^3 + 3y^2a + 3ya^2 + a^3 = r^3$$

Simplificamos usando que $x^3 + y^3 = r^3$ y eliminando las potencias de a y e de grado mayor que uno, y obtenemos

$$3x^2e + 3y^2a = 0$$

de donde resulta la pendiente:

$$\frac{a}{e} = -\frac{x^2}{y^2}$$

Observa que este procedimiento equivale a quedarse con la aproximación lineal de la función en el punto P y eso es como reemplazar el triángulo PRP_1 en la figura de la izquierda por el triángulo diferencial.

El método de Barrow es parecido al de Fermat, la diferencia es que Barrow considera incrementos independientes de las dos variables con el propósito de calcular el cociente a/e. Parece que Barrow no conocía directamente la obra de Fermat.

El resultado fundamental de Barrow

Barrow estuvo muy cerca de descubrir la relación inversa entre problemas de tangentes y de cuadraturas, pero su conservadora adhesión a los métodos geométricos le impidió hacer uso efectivo de esta relación. Veamos cómo aparece esa relación tal como se expone en la Lección X, Proposición 11 de las *Lectiones Geometricae*.

En la figura (11) se han representado dos curva $y = f(x)$ e $y = g(x)$. El segmento AD representa el eje de abscisas donde toma valores x. La cantidad $g(x)$ representa el valor del área bajo la gráfica de f comprendida entre el punto A y x. Dado un punto de abscisa D, se trata de probar que la pendiente de la tangente a $y = g(x)$ en el punto F, es decir en el punto $(D, g(D))$, es igual a $f(D) = DE$. La demostración de Barrow es geométrica.

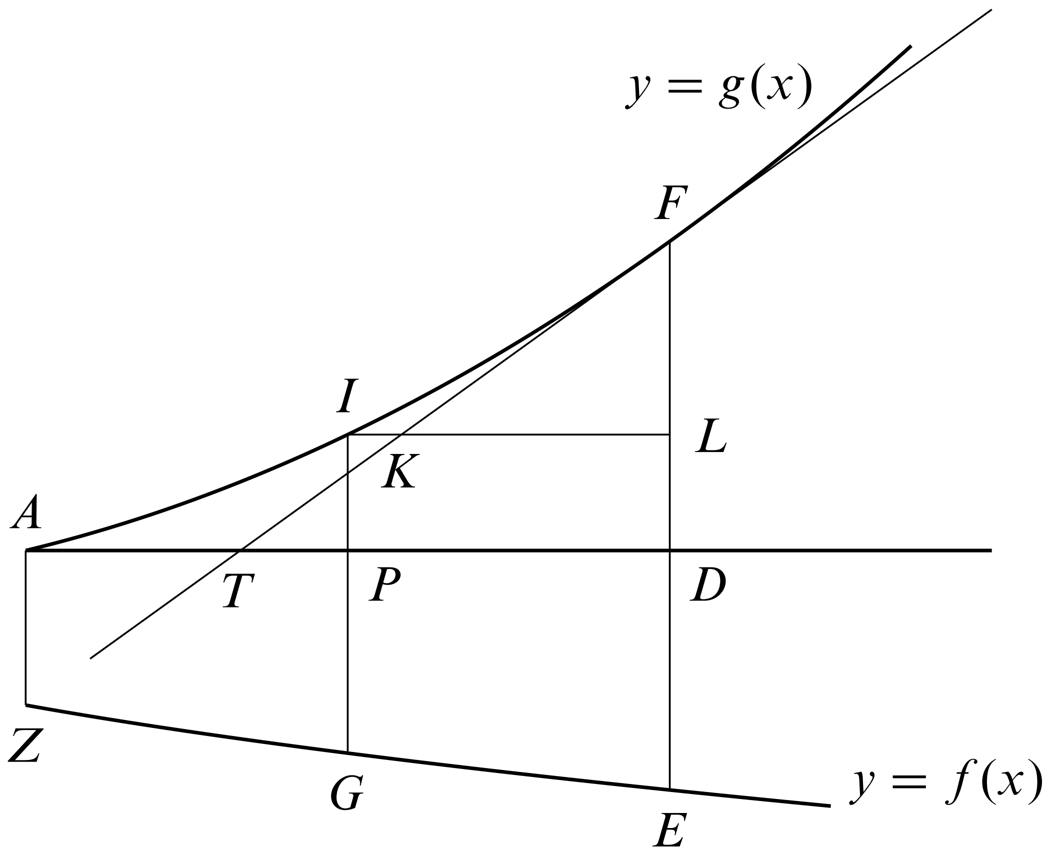


Figura 11. Teorema Fundamental

Tracemos una línea recta FT por F que corta en T a la recta AD y tal que

$$DF/TD = f(D) = DE$$

Queremos probar que FT es la tangente a $y = g(x)$ en el punto F. Para ello vamos a ver que la distancia horizontal, KL, de cualquier punto L de la recta EF a la recta FT es menor que la distancia, IL, de dicho punto L a la curva $y = g(x)$. Esto probará que la recta FT queda siempre por debajo de $y = g(x)$.

Tenemos que:

$$FL/KL = DF/TD = DE$$

Por otra parte:

$$\begin{aligned}
\text{área } ADEZ &= FD \\
\text{área } APGZ &= PI = LD \\
\text{área } PDEG &= FD - LD = FL
\end{aligned}$$

Ya que

$$\text{área } PDEG < \text{rectángulo } PD.DE \tag{12}$$

Se sigue que

$$FL < PD.DE \Longrightarrow DE > FL/PD$$

y por tanto

$$FL/KL > FL/PD \Longrightarrow KL < PD = IL$$

Deducimos que el punto K queda debajo de la curva $y = g(x)$ y por tanto la recta FT queda a un lado de la curva. Para completar la demostración es necesario repetir el razonamiento tomando puntos a la derecha de EF. Esto prueba que TF es tangente a $y = g(x)$ en D y su pendiente es $DE = f(D)$. En términos actuales, lo que Barrow ha probado es que:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \int_a^x f(t)\mathrm{d}t = f(x)$$