Coordenadas polares: curvas maravillosas

Norberto Jaime Chau Pérez | jchau@pucp.edu.pe
Roy Wil Sánchez Gutiérrez | rwsanche@pucp.edu.pe

Introducción

Una forma familiar de localizar un punto en el plano cartesiano es especificando sus coordenadas rectangulares (x; y); es decir, dando su abscisa x y su ordenada y relativos a los ejes perpendiculares dados. En algunos problemas, es más conveniente localizar un punto mediante sus coordenadas polares. Las coordenadas de un punto en coordenadas polares es un par de números reales (r, θ) [2] y [3].

En estos tiempos, con el uso múltiple de las computadoras, se debería enseñar en el colegio las coordenadas polares para poder graficarlas y luego explicar a los alumnos las distintas formas que adopta la naturaleza: la forma de las flores, de los caracoles, etc. Por ejemplo, es posible representar matemáticamente la flor mostrada en la siguiente fotografía (figura 1). Las coordenadas polares ayudan a graficar estos numerosos pétalos [2] y [3]

Figura 1
Representa una flor con varios pétalos
http://www.floresdigitales.com/

La gráfica de la curva $r = 3\cos\left(\frac{7\theta}{2}\right) + 1$ en coordenadas polares representa aproximadamente una flor.

Combinando ángulos con funciones trigonométricas, se puede lograr representar una mariposa [2] (figura 2).

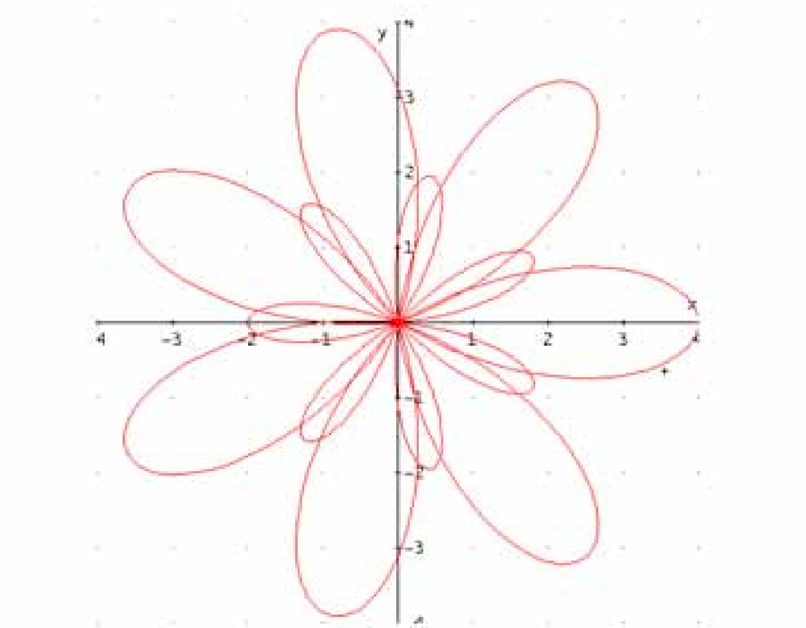


Figura 2
Representa la curva de forma de una mariposa dada por la ecuación

$$r = 3\cos\left(\frac{7\theta}{2}\right) + 1$$

La **mariposa** es el emblema de la transformación, el simbolismo de la libertad en diferentes formas. La sabiduría que nos da la vida a lo largo de las diferentes etapas por las que atravesamos. Todas nos aportan ese granito de arena que se queda en nuestras vidas. Estas hermosas especies se pueden representar matemáticamente usando coordenadas polares.

Figura 3
Una mariposa
Tomado de: www.insectariumvirtual.com

La ecuación $r \leq e^{\cos\theta} - 2\cos(4\theta)$ graficada en coordenadas polares representa la forma de una mariposa [2]. La gráfica es la siguiente (figura 4).

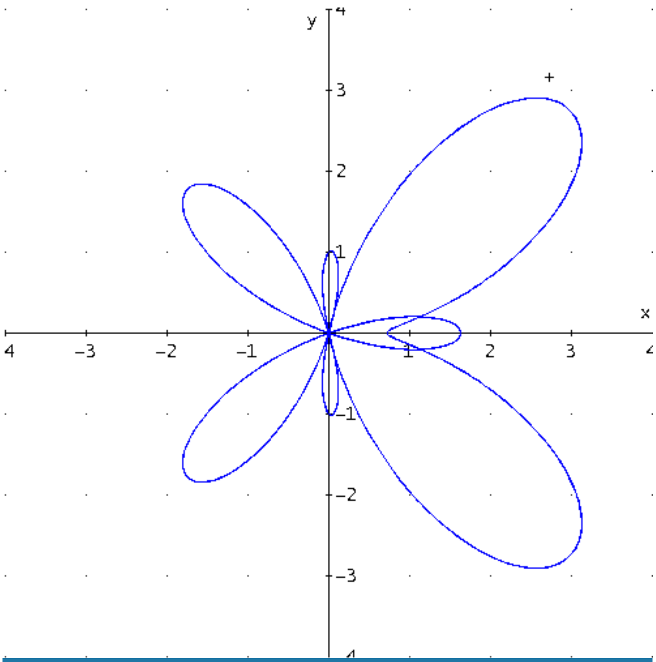


Figura 4
Gráfica de la ecuación $r \le e^{\cos\theta} - 2\cos(4\theta)$

Otra ecuación que representa a una mariposa con mayor aproximación es la ecuación $r = e^{\cos\theta} - 2\cos(4\theta) + \cos^5\left(\frac{\theta}{12}\right)$ para [illegible] (figura 5). Fue descubierta por Temple H. Fay y publicada en el artículo “The Butterfly Curve”, American Mathematical Monthly, mayo de 1989. En esta, se debe tener en cuenta el intervalo donde se encuentra el ángulo para generar las curvas interiores.

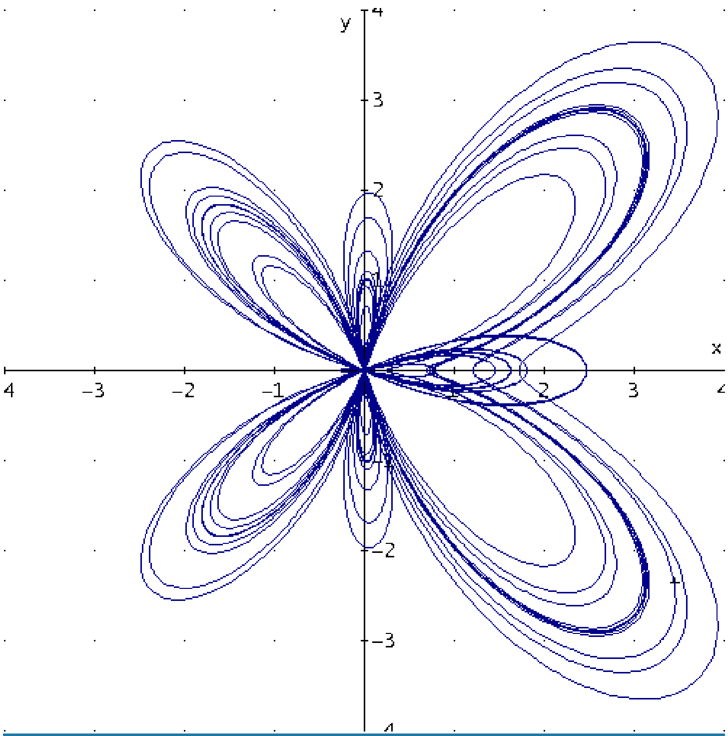


Figura 5
Gráfica de la ecuación $r = e^{\cos\theta} - 2\cos(4\theta) + \cos^5\left(\frac{\theta}{12}\right)$
descubierta por Temple H.Fay

Las coordenadas polares son la base para describir las coordenadas cilíndricas y las coordenadas esféricas en el espacio. Con las coordenadas cilíndricas, podemos describir el tronco, las ramas, los tallos y las flores de las plantas. Por su parte, las coordenadas esféricas permiten describir a las frutas y semillas.

Espiral Logarítmica

Descubierta por Jacob Bernouilli. Tiene importantes propiedades para describir figuras que se desarrollan en forma creciente y girando en torno a un punto fijo, el polo, en uno o en otro sentido, horario o antihorario, $\beta \leq r = 2$ [3].

Figura 6
Curva que describe los caracoles de ecuación $\beta \leq r = 2$
http://es.wikipedia.org/wiki/Caracol

Espiral de Arquímedes

La espiral uniforme $n \in Z^+$, donde *a* es un número real. Por ejemplo, para *a*=2 se tiene la ecuación $(x^2 + y^2)^3 = 4.10y^2$, la cual representa una espiral desarrollada en sentido contrario al de las manecillas del reloj [2] y [3]. Esto se debe a que el ángulo toma valores positivos [2] y [3].

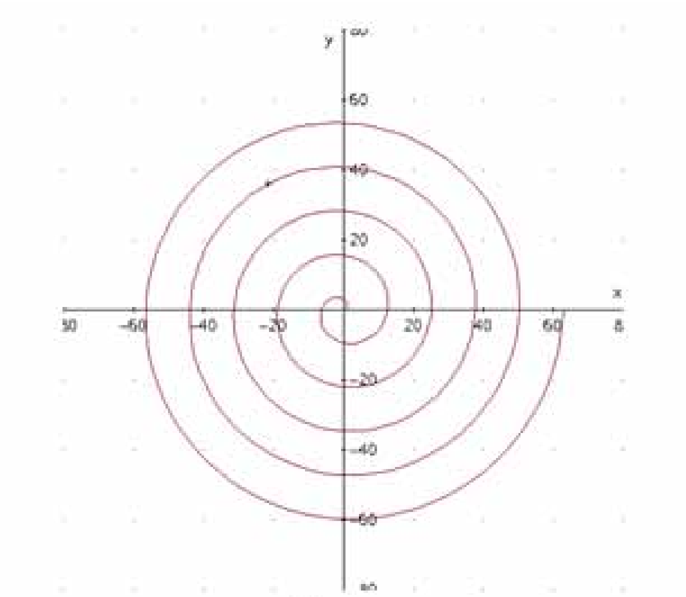


Figura 7
Representa un espiral

Si comparamos el animal de la fotografía (figura 8), la concha de Nautilus, con la curva mostrada, se puede ver que esta curva describe aproximadamente el desarrollo de su cuerpo.

Figura 8
La espiral de la concha de Nautilus
http://geometriadinamica.es/Geometria/Superficies/Concha-Nautilus.html

La curva también describe la cola del animal mostrado en la figura 9.

Figura 9
Camaleón
La cola describe una curva espiral
http://www.revistadini.com/noticia/430/el-camaleon.html

El sistema de coordenadas polares

Un sistema de coordenadas polares se representa en el plano con un punto O, el polo, y un rayo que parte de O, el eje polar como se muestra en la figura 10 [2] y [3].

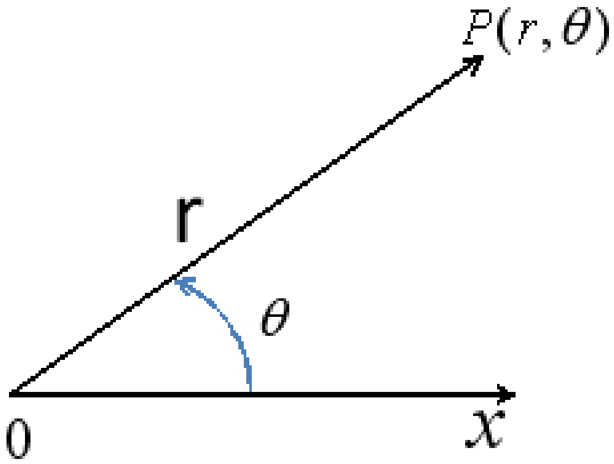


Figura 10
Representación polar

Este sistema permite a los estudiantes de educación secundaria y universitaria encontrar y descubrir el increíble potencial de las matemáticas para interpretar el mundo real, no el mundo reducido de los textos escolares.

Sistema polar gráfico

Cada punto P en el plano se asigna a coordenadas polares de la siguiente forma: r es la distancia de O a P, y πes el ángulo dirigido cuyo lado inicial está en el eje polar y cuyo lado terminal está en la recta que pasa por los puntos O y P.

Como en trigonometría, medimos πcomo positivo cuando se mueve en sentido contrario a las manecillas del reloj y negativo cuando se mueve como las manecillas del reloj. Si r>0, entonces P está en el lado terminal de π. Si r<0, entonces P está en el lado terminal de π+ π[3] y [4].

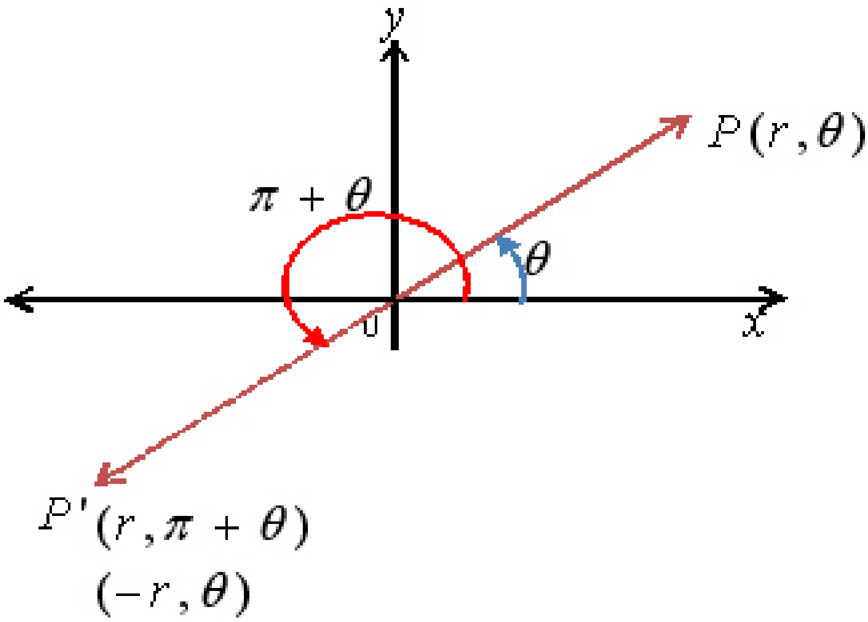


Figura 11
Ubicación del punto en su forma polar

Determinación de todas las coordenadas polares de un punto

Sean las coordenadas polares de un punto P son (r, π). Cualquier otra coordenada polar debe ser de la forma (r, $\pi+2n\pi$) o ($-r$, $\pi+(2n+1)\pi$), donde n es un número entero. En particular, las coordenadas del polo no dependen del ángulo [2] y [3].

La gráfica de una ecuación polar, $r = f(\theta)$, o más general, $F(r, \pi - \theta)$ consta de todos los puntos P que tienen al menos una representación polar (r, θ) cuyas coordenadas satisfacen la ecuación.

Objetivos
Tenemos dos objetivos fundamentales:

1. Representar algunas curvas y regiones que se exponen en la naturaleza a través de las plantas, flores, animales y los objetos que el hombre creó y diseñó en su vida, como ventiladores y otros objetos

2. Incorporar el uso de software para representar gráficamente curvas polares

Objetivos de aprendizaje involucrados en la actividad

Objetivos generales

1. Adquirir habilidades en el razonamiento matemático y en la comunicación oral y escrita
2. Trabajar y aprender tanto de forma independiente como cooperativa
3. Integrar el conocimiento académico con las experiencias adquiridas fuera del aula. Aprender a pensar críticamente para resolver problemas
4. Analizar, deducir, descubrir y resolver el problema planteado en cada etapa de trabajo, en la etapa de pareja y en la etapa grupal
5. Compartir los conocimientos adquiridos con todos los integrantes del grupo

Objetivos específicos

1. Identificar las condiciones que determinan el lugar geométrico
2. Deducir las relaciones que existen entre las variables del problema y los datos
3. Determinar la ecuación que determina el lugar geométrico
4. Graficar la curva descrita por el lugar geométrico

Tiempo	Procedimiento	Materiales
15 min.	Prueba individual. Cada alumno resolverá una pregunta relativa al tema sin apuntes. Esta prueba permite conocer quiénes vienen estudiando previamente el tema.	Pregunta Hoja con sistema de coordenadas polares
50 min.	Trabajo en parejas. Una parte de la actividad la resuelven las parejas. De los resultados y conclusiones de las parejas, el grupo aprende sobre lugares geométricos.	Pregunta Calculadora con graficadora Apuntes de clase
50 min.	Trabajo grupal. Será resuelto con los aportes de las parejas. Es el momento cuando comparten y elaboran el informe final. Todos son solidarios e interactúan.	Pregunta Calculadora con graficadora Apuntes de clase

ISSN: 2221-8874 (En línea)

Conocimientos previos necesarios para la actividad

Para desarrollar la actividad sobre coordenadas polares, se requiere que los estudiantes conozcan los siguientes temas:

1. Uso del transportador, compás y calculadoras
2. Gráficas de curvas en el plano, cónicas y rectas en el plano
3. Lugares geométricos
4. La representación múltiple de los puntos en coordenadas polares
5. Relación entre las coordenadas cartesianas y coordenadas polares
6. El concepto de simetría en el sistema polar, en el eje normal y el polo
7. Uso de algún software matemático que permita graficar estas curvas como por ejemplo derive 6.0, cabri geometre, winplot o geogebra.

Posibles dificultades

1. No poder representar los puntos en coordenadas polares
2. No saber aplicar la simetría de las curvas en el sistema polar (este paso facilita mucho en la construcción de la curva)
3. No poder determinar los puntos de intersección con los ejes y el polo
4. No dominar el uso del software matemático en el proceso de la graficación de las curvas
5. Dificultades para sombrear las regiones indicadas
   Nota: Existen dos dificultades que requieren mayor análisis (anexo para la guía del profesor):
   - Algunos puntos de la curva no satisfacen la ecuación dada, sino a la ecuación equivalente de dicha curva.
   - Algunos puntos de intersección de dos curvas dadas por sus ecuaciones, no se determinan resolviendo el sistema sino graficando las curvas.

Recomendaciones para una posterior aplicación

1. Utilizar una idea, una fotografía o un fenómeno físico como punto de partida para elaborar los problemas
2. Propiciar un ambiente de análisis que les permita validar geométricamente estas situaciones y comprenderlas con profundidad
3. Utilizar con mayor frecuencia los recursos con que se cuenta, calculadoras, laptop, sistemas de información vía Internet, foros, blogs y bibliotecas
4. Seleccionar a los asistentes de docencia de entre los jefes de práctica que orientan a los alumnos y que estén familiarizados con el curso.
5. Acondicionar el aula para grupos de 4 alumnos cada uno.

Observaciones

En los siguientes ejemplos, se ilustran dos peculiaridades de las gráficas de las ecuaciones polares, causadas por el hecho de que un solo punto tiene muchas representaciones en coordenadas polares:

1. Las graficas de las ecuaciones C1: $r = 2sen\theta$ y C2: $r = 2sen\theta$ son circunferencias. C1 es tangente al eje X y C2 es tangente al eje Y. Ambas se intersecan en el origen.
   Al tratar de resolver las ecuaciones, no encontramos como solución al origen de coordenadas. La razón por la cual el origen no aparece como solución del sistema es que las curvas no pasan por el origen "simultáneamente"; es decir, no pasan por el origen para los mismos valores de π.

   La curva $r = 2sen\theta$ pasa por el polo cuando $F(r,\theta)$, mientras que la curva $r = 2sen\theta$ cuando $(0,(2n+1)\frac{\pi}{2})$.

   En otras palabras, el polo es punto común a las gráficas. Sin embargo, no hay representación común para el polo que satisfaga simultáneamente a las ecuaciones. En consecuencia, este punto no puede obtenerse resolviendo el sistema de ecuaciones.

Los problemas de intersección pueden analizarse habitualmente dibujando las gráficas. Pero hay situaciones en las que tales problemas se tratan con más facilidad pasando primero a coordenadas rectangulares.

Si transformamos las ecuaciones C1: $r = 2sen\theta$ y C2: $r = 2sen\theta$ a coordenadas rectangulares se tiene:

$$C_1 : \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{2x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, C_2 : \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{2y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Al igualar ambas ecuaciones, llegamos a la conclusión de que tiene dos puntos de intersección: $(1,1)$ y $(1,1)$.

2. Al tratar de hallar todos los puntos de intersección de las ecuaciones $C_4 : r^2 = 4sen\theta$ y $C_4 : r^2 = 4sen\theta$, solo se halla un punto de intersección; sin embargo, si graficamos ambas curvas vemos que tienen 4 puntos de intersección. En este ejemplo, se muestra que la geometría es más poderosa que el álgebra.

Bibliografía

Duch, B. Groh, S.
2006 El Poder del Aprendizaje Basado en Problemas. Lima: PUCP

Edwards, C. y D. Penney
1996 Cálculo con Geometría analítica. Editorial Prentice Hall.

Lehmann, Ch.
1986 Geometría analítica. México: Editorial Limusa

Sobel, M. Lerner, N.
2006 Precálculo. Sexta edición. México D. F.: Pearson Prentice Hall.

Stewart, J.
2006 Cálculo. Conceptos y contextos. Valencia: Editorial Thompson,
Links para Derive con su respectivo manual. http://www.upv.es/derive/parche

ANEXO 1: MATERIAL PARA EL ALUMNO *

Actividad Cooperativa “Curvas Polares”

Parte I: INDIVIDUAL Tiempo: 15 minutos

Preguntas

1. Sea la curva *E* descrita por la ecuación $r^2 = \frac{9}{1+sen^2\theta}$ .Exprese dicha ecuación en coordenadas cartesianas; luego, trace su gráfica de la curva *E*.
2. Dada la curva *F* descrita por la ecuación $r^2 = 9$, exprese dicha ecuación en coordenadas cartesianas; luego, trace su gráfica de la curva *F*.
3. Muestre que $r = 8\ sen(4\theta + \frac{\pi}{2})$ y $r = 3\cos 4\theta$ son iguales; luego, halle su ecuación equivalente.

Parte II: PAREJA 1 (2 puntos) Tiempo: 50 minutos

Siguiendo los pasos para graficar curvas en coordenadas polares, grafique las siguientes curvas.

1. La curva *G* descrita por la ecuación $r = -3\cos 3\theta$. Previamente analice intersecciones con los ejes y el polo, simetrías con respecto al eje polar, al eje normal y al polo.
2. La curva *H* descrita por la ecuación $r = 1 + c\sin(\theta)$. Previamente, analice intersecciones con los ejes y el polo, simetrías con respecto al eje polar, al eje normal y al polo.

3. Dada la curva *E* descrita por la ecuación $r = (a + b\cos m\theta)(c + dsenn\theta)$, exprese dicha ecuación en coordenadas cartesiana; luego, trace su gráfica. de la curva *E*.
4. En el gráfico anterior, sombree la región que se encuentra dentro de la gráfica de G y fuera de la gráfica de *E*.

5. Determine los máximos valores que pueden tomar π y *a* para que las curvas C1 y C2, $C_5 : r = 2\ \cos(3\theta)$ y $C_2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ con, $b < a$ puedan ser dibujadas en un cuadrado de 40cm por 40cm.

Parte II: PAREJA 2 (2 puntos) Tiempo: 50 minutos

Siga los pasos para graficar curvas en coordenadas polares y responda las siguientes preguntas:

1. Grafique la curva *I* descrita por la ecuación $r = -3\cos 3\theta$, analizando previamente intersecciones con los ejes y el polo, simetrías con respecto al eje polar, eje normal y polo.
2. Grafique la curva *J* descrita por la ecuación $r = -3\cos 3\theta$, analizando previamente intersecciones con los ejes y el polo, simetrías con respecto al eje polar, eje normal y polo.
3. Dada la curva *F*, descrita por la ecuación $r = f(\theta)$, encuentre la ecuación cartesiana correspon diente y con dicha información, trace la gráfica de la curva *F*.
4. Trace las gráficas de las curvas *J* y *F* en un mismo plano y sombree la región que se encuentra fuera de la gráfica de *J* y dentro de la gráfica de *F*.

* Los profesores Norberto Chau y Edwin Villogas colaboraron en la elaboración del diseño inicial de los ejercicios en la actividad colaborativa del curso Matemática Básica. En el anexo 1 se tomó como referencia dicha actividad.

5. Considere las curvas

C_1 : $r = \eta \cos(2\theta)$ $\eta > 0$

C_3 : $r = \beta \cos(4\theta)$ $\beta > 0$

C_4 : $x^2 + y^2 = \xi$, $\xi > 0$

¿Es posible hallar una relación entre los coeficientes πy π para que las curvas *C*1 y *C*4 se corten solo en cuatro puntos? Justifique su respuesta.

6. Determine el máximo valor de π (en término de π) para que la distancia de la curva *C*3 a la curva *C*4 sea 3 unidades.

Parte III: TRABAJO GRUPAL (2 puntos) Tiempo: 50 minutos

Una diseñadora de interiores remodela un departamento en la playa teniendo en cuenta las siguientes características:

Los pisos y las paredes usan baldosas, mayólicas y cerámicos, cuyos diseños tienen las formas de curvas polares conocidas, tal como se muestra en la figura 12.

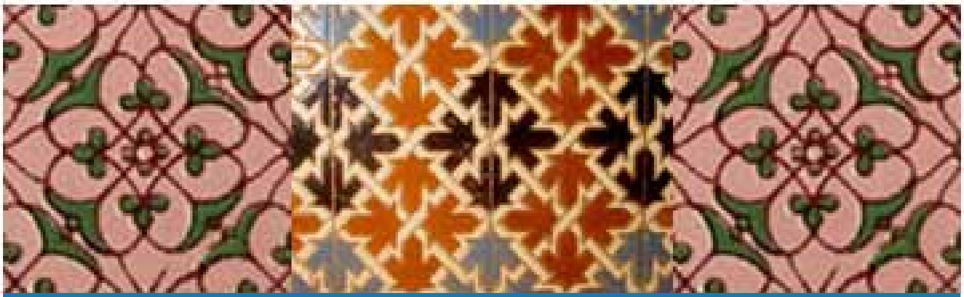


Figura 12
Diseños de, mayólicas y cerámicos
http://www.arteyfotografia.com.ar/system/grupos_fotos.php?grupo=342

Para mantener un ambiente fresco y confortable, usan ventiladores, cuya hélice tiene la forma de curva polar como se muestra en la figura 13.

Figura 13
Modelos de ventiladores
www.motociclo.com.uy/imagenes

Las curvas que se han considerados para obtener los diseños de las baldosas, mayólicas y cerámicos, así como de las hélices de los ventiladores son las siguientes:

$C_1: \quad r = \eta\cos(2\theta) \quad \eta > 0$

$C_2: \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

$C_3: \quad r = \beta\cos(4\theta) \quad \beta > 0$

$C_1: \quad r = \eta\cos(2\theta) \quad \eta > 0$

$C_3: \quad r = \beta\cos(4\theta) \quad \beta > 0$

$C_4: \quad x^2 + y^2 = \xi, \quad \xi > 0$

Preguntas

1. Para los diseños de las baldosas, mayólicas y cerámicos, considere como polo (el origen de coordenadas) el punto de intersección de las diagonales de una mayólica y como eje polar la recta horizontal que pasa por el polo.

Resuelve detalladamente cada pregunta.

a. El diseño de un tipo de las baldosas y mayólicas se hace considerando la curva C_5, para *p*=20 y la curva C_4, para π=400, donde la región que se encuentra limitada por las anteriores tendrá un color más oscuro. Muestre cómo queda dicho diseño sombreando la región que tendrá un color más oscuro.

b. El diseño del cerámico se realizará considerando el exterior de la curva C_5 para *p*=20 e interior de la curva C_6, para π=20 o el exterior de la curva C_6 para π =20 e interior de la curva C_5, para *p*=20. Muestre cómo queda dicho diseño sombreando la región con un color más oscuro.

c. Considere uno de los diseños anteriores y muestre cómo queda un piso de 80cm x 80cm, enlosado con dichas baldosas, mayólicas y cerámicos si se quiere que haya un buen estilo.

d. Considere uno de los diseños anteriores y muestre cómo queda una pared de 400cm x 400cm, enlosado con cerámicos si se quiere que haya buen estilo.

2. Los ventiladores son de dos tipos, uno de ellas con hélices que tienen forma de rosas de 8 pétalos y la otra de 4 pétalos, y sobre el centro de cada una de ellas se superpone un círculo pequeño. En ambos tipos, el protector (estructura metálica de protección de hélice) de forma circular tiene un diámetro de 42 cm.
Tomando como el centro de la hélice el centro del círculo y como eje polar la recta horizontal que pasa por el polo.

a. El diseño de la hélice del ventilador "rosa de 8 pétalos" (vista frontalmente) se obtiene superponiendo el centro del círculo $F(-r,\theta)$ sobre el centro de la curva C_3 .
   i. ¿Podría tomar π el valor de 24 cm? ¿Por qué?
   ii. ¿Qué pasaría si π tomara el valor de 21 cm?
   iii. Si para la fabricación de esta hélice se decidiera que diste 3 cm del protector, ¿cuál debería ser el valor de π?
b. El diseño de la hélice del ventilador, vista frontalmente, se obtiene superponiendo el centro del círculo $F(-r,\theta)$ sobre el centro de la curva C*1* .
   i. ¿Podría tomar π3 el valor de 64 cm? ¿Por qué?
   ii. ¿Podría tomar π2 el valor de 41 cm?
   iii. Si para la fabricación de esta hélice se decidiera que diste 4 cm del protector, ¿cuál debería ser el valor de π?
c. Grafique un diseño de ventilador, de tal manera que la hélice tenga las siguientes características :
   i. El centro de la hélice coincide con el polo.
   ii. En el eje normal, se considera la región interior a la rosa de 8 pétalos dada por la ecuación

$$r = 18\, sen(4\theta + \frac{\pi}{2})$$

   iii. En el eje polar, se considera la región comprendida en el exterior de la rosa de 8 pétalos e interior de la región de la rosa de 4 pétalos, dadas por las ecuaciones $r = 18\, sen(4\theta + \frac{\pi}{2})$ y $r = 18\, sen(4\theta + \frac{\pi}{2})$, respectivamente.
   iv. Se superpone el círculo $F(-r,\theta)$ sobre el centro de la hélice.

Además, considera el protector que diste 2cm de la hélice.
v. Considere la región comprendida entre el protector y la circunferencia que toca a los puntos máximos de la hélice.

d. Grafique un diseño de ventilador, de tal manera que la hélice tenga las siguientes características :
i. El centro de la hélice coincide con el polo.
ii. Considere la región comprendida en el exterior de la rosa de 8 pétalos e interior de la región de la rosa de 4 pétalos, dadas por las ecuación $r = 183\cos 3\theta$, $r = 183\cos 3\theta$ respectivamente.
iii. El círculo $F(-r,\theta)$ se superpone sobre el centro de la hélice. Además, considere el protector que diste 2cm de la hélice.
iv. Considere la región comprendida entre el protector y la circunferencia que toca a los puntos máximos de la hélice.

ANEXO 2: Material para el profesor

Parte I: INDIVIDUAL Tiempo: 15 minutos

Solución

1. Dada la curva *E* descrita por la ecuación $r = (a + b\cos m\theta)(c + dsenn\theta)$.

Usando las transformaciones de coordenadas $x = r\cos\theta, y = rsen\theta$, se tiene:

$$C_5 : r = 2 \ \cos(3\theta)$$

$$x^2 + y^2 + y^2 = 9$$

$$x^2 + 2y^2 = 9 \Rightarrow E : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{\frac{9}{2}} = 1$$

La gráfica es una elipse.

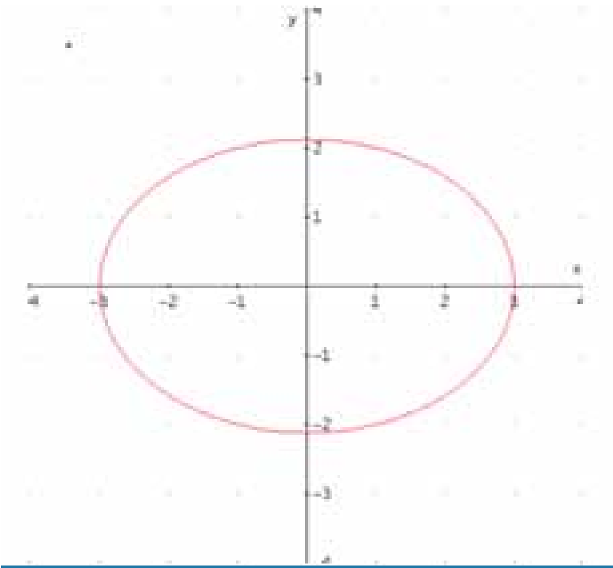


Figura 1

2. Dada la curva *G* descrita por la ecuación $r^2 = 9$, usando la transformación de coordenadas se tiene $F(r, n\pi) = 0$.

La gráfica es una circunferencia.

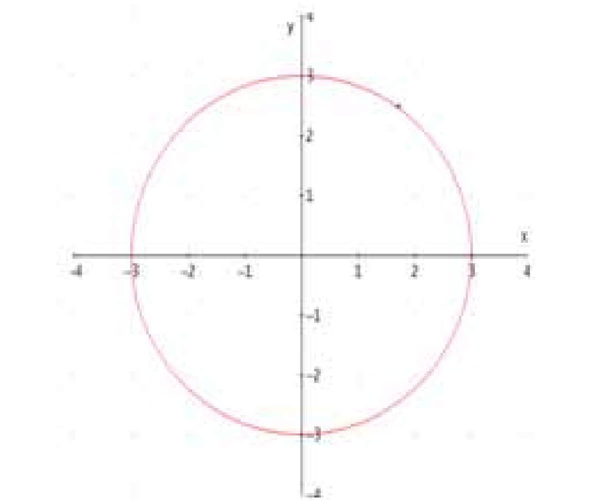


Figura 2

3. Ecuaciones equivalentes

$P(r,\theta) \leftrightarrow P((-1)^n r, \theta + n\pi)$

$$(-1)^n r = 3sen\left(4(\theta + n\pi) + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$(-1)^n r = 3sen\left(4\theta + 2n\pi + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$(-1)^n r = 3sen\left(4\theta + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$(-1)^n r = 3\cos(4\theta)$$

Si *n* es par se tiene $r = 3\cos(2\theta)$

Si *n* es impar se tiene $r = -3\cos(2\theta)$

d) $P(r,\theta) \leftrightarrow P((-1)^n r, \theta + n\pi)$

$$(-1)^n r = 3sen\left(4(\theta + n\pi) + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$(-1)^n r = 3sen\left(4\theta + 2n\pi + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$(-1)^n r = 3sen\left(4\theta + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$(-1)^n r = 3\cos(4\theta)$$

Si *n* es par se tiene $r = 3\cos(2\theta)$

Si *n* es impar se tiene $r = -3\cos(4\theta)$.

Parte II: PAREJA 1

Solución

1) De la ecuación de J : $r = 3\cos(4\theta)$, encontraremos intersecciones de G con:

a. El eje polar:

$$(x^2 + y^2)^3 = 4x^2y^2$$

Los puntos de intersección con los eje polar: (3;0) y (3; π).

b. Con el eje normal:

$$\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow r = -3$$

$$\theta = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow r = -3$$

Los puntos de intersección con los eje normal: (-3; π/2) y (-3; 3 /2).

c. Con el polo, para $r = 0 \Rightarrow \cos(2\theta) = 0 \Leftrightarrow 2\theta = k\pi \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$

Simetrías:
Primero, las ecuaciones equivalentes. Al cambiar (r; θ) por ((-1)nr; θ+nπ), se obtienen:

Si n es par se tiene $r = 3\cos(2\theta)$

Si n es impar se tiene $r = -3\cos(2\theta)$

a) Con el eje polar: reemplazando θ por - θ, obteniendo la ecuación $r = 3\cos 4\theta$. Luego, existe simetría con respecto al eje polar.
b) Con el eje normal: reemplazando θ por (π- θ), obteniendo la ecuación $r = 3\cos 4\theta$
Luego, existe simetría con respecto al eje normal.
c) Con el eje polo: reemplazando *r* por -*r*, obteniendo la ecuación $r = -3\cos 3\theta$.
Luego, existe simetría con respecto el polo.

Extensión:
Para todo valor de θ, *r* es un valor real y finito, por tanto, la curva es cerrada.
Como $-1 \le \cos 4\theta \le 1$, los valores extremos de r son $r\ (r, \theta)$.

Tabulación:

θ	$\pi/12$	$\pi/8$	$\pi/6$	$\pi/3$
R	$3\sqrt{2}/2$	$3\sqrt{2}/2$	$3/2$	$-3/2$

Gráfica de la curva G

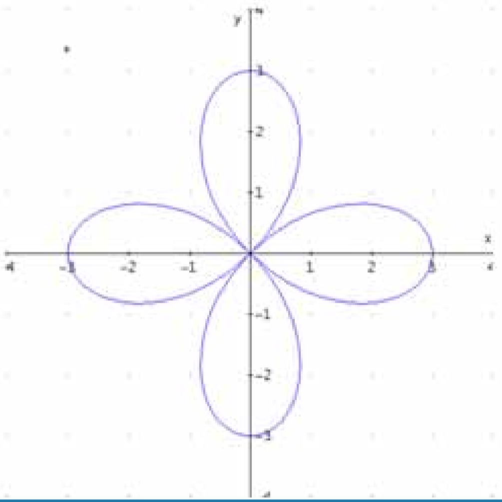


Figura 3
Rosas de 4 pétalos

2) Siguiendo los pasos que se llevó a cabo en la graficación de la curva *G*, ahora vamos a graficar la curva $-1 \leq sen(3\theta) \leq 1$.

Intersecciones:

a) Con el eje polar:

$$(x^2+y^2)^3 = 4x^2y^2$$

Los puntos de intersección con el eje polar: (0;0) y (0; π).

b) Con el eje normal:

$$\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow r = -3$$

$$\theta = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow r = 3$$

Los puntos de intersección con el eje normal: (-3; π /2) y (3; 3 π /2).

c) Con el polo:

Para $r = 0 \Rightarrow sen(3\theta) = 0 \Leftrightarrow 3\theta = k\pi \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$.

Simetrías:

Ecuaciones equivalentes: al cambiar (r; θ) por ((-1)nr; θ+n π), para diferentes valores de n se obtiene la misma ecuación.

a) Con el eje polar: reemplazando θ por -θ obteniendo la ecuación $J : r = 3\cos(4\theta)$. Luego, no existe simetría con respecto al eje polar.

a) Con el eje normal: reemplazando θ por (π- θ), obteniendo la ecuación $J : r = 3\cos(4\theta)$. Luego, no existe simetría con respecto al eje normal.

b) Con el eje polo: reemplazando *r* por -*r*, obteniendo la ecuación $r = -3\cos 3\theta$. Luego, no existe simetría con respecto el polo.

Extensión:

Para todo valor de θ, r es un valor real y finito, por tanto, la curva es cerrada.
Como $-1 \leq sen(3\theta) \leq 1$, los valores extremos de r son $r\,(r,\theta)$.

ISSN: 2221-8874 (En línea)

Tabulación:

π	$-\pi/2$	$-\pi/3$	$-\pi/4$	$-\pi/6$	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$
R	3	0	$-3/\sqrt{2}$	- 4	0	3	$3/\sqrt{2}$	0	-3

Gráfico de la curva H

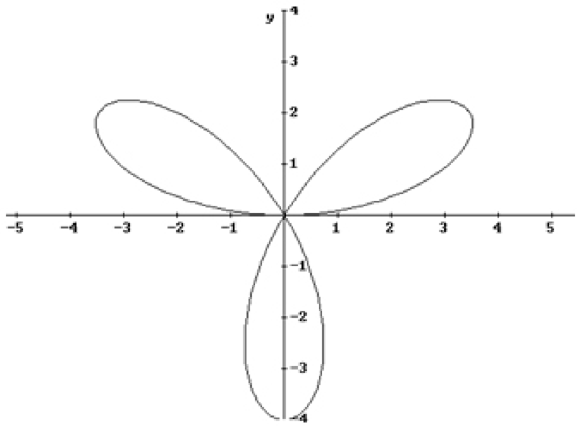


Figura 4
Rosa de tres pétalos

3. La ecuación de la curva $E: r^2 = \dfrac{9}{1+sen^2\theta}$ en coordenadas cartesianas $E: \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{\frac{9}{2}} = 1$.

La curva es una elipse de centro el origen de coordenadas y semiejes a=3 y b= $\dfrac{3}{\sqrt{2}}$.

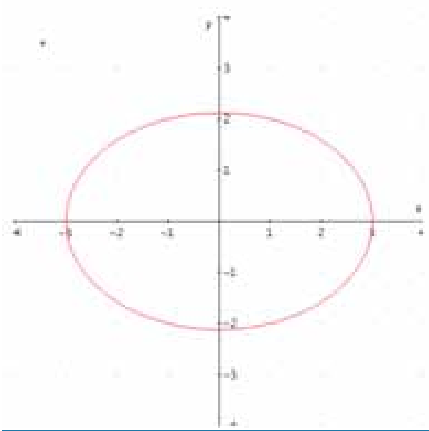


Figura 5
Es una elipse

4. Sombreamos la región que se encuentra dentro de la gráfica de G y fuera de la gráfica de E.

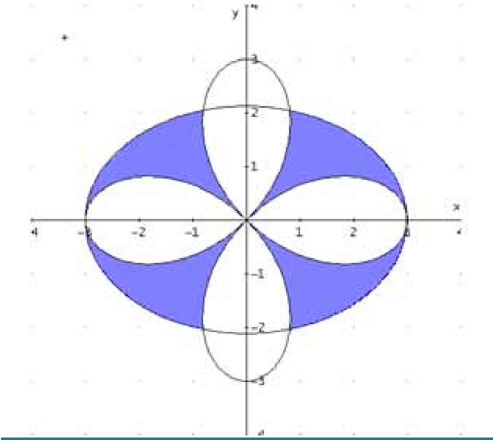


Figura 6
Región limitada entre una elipse
y una flor de cuatro pétalos

5. En la curva $C_5 : r = 20 \cos(3\theta)$ y $C_2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, los máximos valores son $C_6 : r = 20 \; sen(3\theta)$,
$I' \; 20 - r$, θ_{20} , un cuadrado de 40cm por 40cm.

Parte II: PAREJA 2

Solución

1) Sea $J : r = 3\cos(4\theta)$

Intersecciones:

a) Con el eje polar:

$$\theta = 0 \Rightarrow r = 3$$

$$\theta = \pi \Rightarrow r = -3$$

Intersección con el eje polar: (3;0) y (-3; π).

b) Con el eje normal:

$$\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow r = 3$$

$$\theta = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow r = 3$$

Intersección con los eje normal: (0; π /2) y (-3; 3 π/2).

c) Con el polo:

Para $r = 0 \Rightarrow \cos(3\theta) = 0 \Leftrightarrow \theta = \frac{(2k+1)\pi}{6} \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2},$

Simetrías:

Ecuaciones equivalentes: al cambiar (r; θ) por ((-1)nr; θ+n π), se obtiene la misma ecuación.

a) Con el eje polar: reemplazando π por - π obteniendo la ecuación $r = -3\cos 3\theta$. Luego, existe simetría con respecto al eje polar.
b) Con el eje normal: reemplazando π por (π- π), obteniendo la ecuación $r = -3\cos 3\theta$. Luego, no existe simetría con respecto al eje normal.
c) Con el eje polo: reemplazando *r* por -*r*, obteniendo la ecuación $r = -3\cos 3\theta$. Luego, no existe simetría con respecto el polo.

Extensión:
Para todo valor de π *r* es un valor real y finito, por tanto, la curva es cerrada.
Como $-1 \leq \cos 4\theta \leq 1$, los valores extremos de r son $r\,(r,\theta)$.

c	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{12}$
r	3	$3\sqrt{2}/2$	0	$-3\sqrt{2}/2$	-2	$-3\sqrt{2}/2$

Gráfico de la curva H

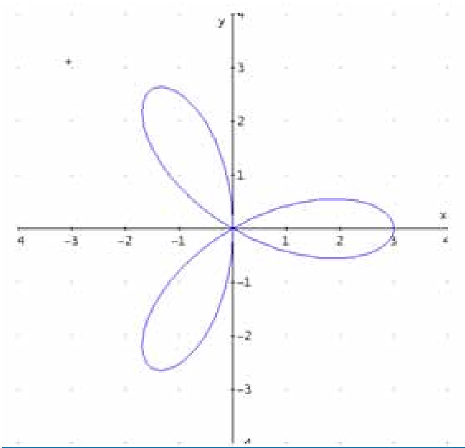


Figura 7
Rosa de tres pétalos

2) Ahora vamos a graficar la curva $J : r = 3\cos(4\theta)$.

Intersecciones:
a) Con el eje polar:

$$(x^2 + y^2)^3 = 4x^2y^2$$

Intersección con los eje polar: (3;0) y (3;π).
b) Con el eje normal:

$$\theta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow r = 3$$

$$\theta = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow r = 3$$

Intersección con los eje normal: (3; π/2) y (3; 3π/2).
c) Con el polo:

Para $r = 0 \Rightarrow \cos(4\theta) = 0 \Leftrightarrow \theta = \frac{(2k+1)\pi}{8} \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{8}, \frac{3\pi}{8}.$

Simetrías:

Ecuaciones equivalentes: al cambiar (r;   ) por ((-1)^{n}r; π+nπ), se obtiene la misma ecuación.

a) Con el eje polar: reemplazando π por - π, obteniendo la ecuación $r = 3\cos 4\theta$. Luego, existe simetría con respecto al eje polar.

b) Con el eje normal: reemplazando π por (π- π), obteniendo la ecuación $r = 3\cos 4\theta$. Luego, existe simetría con respecto al eje normal.

c) Con el eje polo: reemplazando *r* por -*r*, obteniendo la ecuación $r = 3\cos 4\theta$. Luego, existe simetría con respecto el polo.

Extensión:

Para todo valor de π, *r* es un valor real y finito, por tanto, la curva es cerrada.
Como $-1 \leq \cos 4\theta \leq 1$, los valores extremos de r son $r\ (r, \theta)$.

Tabulación:

π	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{12}$
r	3	3/2	-3/2	-3	-3/2	3/2

Gráfica de J es una rosa de 8 pétalos

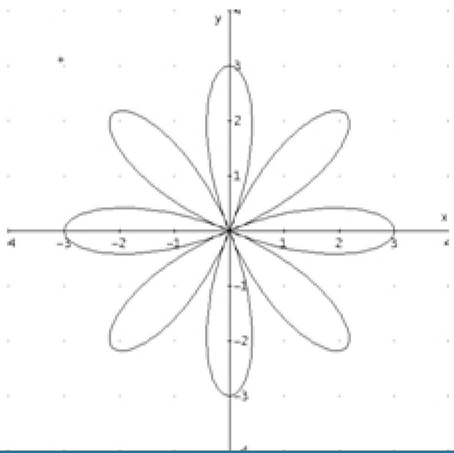


Figura 8
Rosa de ocho pétalos

3) La curva G descrita por la ecuación $r^2 = 9$, es una circunferencia.

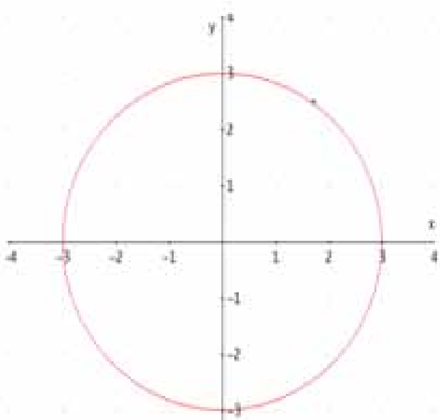


Figura 9
Es una circunferencia

4) Sombreamos la región que se encuentra fuera de la gráfica de J y dentro de la gráfica de F.

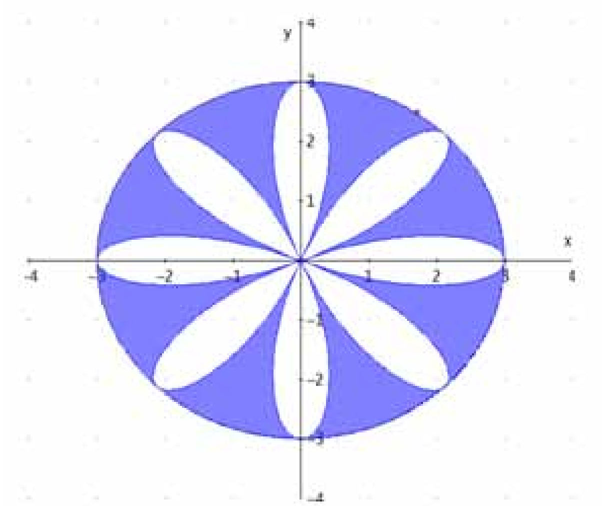


Figura 10
Región limitada entre una elipse y una flor de ocho pétalos

5. Se pide la relación entre la circunferencia y la rosa de 3 pétalos.
Si $C_6 : r = 2 \; sen(3\theta)$ entonces el valor máximo de C_1 es *P*.

Como $C_4 : x^2 + y^2 = \xi$, entonces, su radio $F(-r, \theta)$.

Por lo tanto, la relación entre los coeficientes πy πpara que las curvas C1 y C4 se corten solo en tres puntos es $\beta = \sqrt{\xi}$.

Parte III: TRABAJO GRUPAL

Solución
Pregunta 1
Las curvas que se han considerados para obtener los diseños de las baldosas, mayólicas y cerámicos, así como las hélices de los ventiladores son las siguientes:

$$C_1 : \quad r = \eta \cos(2\theta) \quad \eta > 0$$

$$C_2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$C_3 : \quad r = \beta \cos(4\theta) \quad \beta > 0$$

$$C_1 : \quad r = \eta \cos(2\theta) \quad \eta > 0$$

$$C_3 : \quad r = \beta \cos(4\theta) \quad \beta > 0$$

$$C_4 : \quad x^2 + y^2 = \xi, \quad \xi > 0$$

Para los diseños de las baldosas, mayólicas y cerámicos, considere como polo (el origen de coordenadas) el punto de intersección de las diagonales de una mayólica y, como eje polar, la recta horizontal que pasa por el polo.

a. El diseño de un tipo de las baldosas y mayólicas se hace considerando la curva C_5, para *p*=20: $C_5 : r = 20 \cos(3\theta)$ y la curva C_4, para π=400: $C_4 : x^2 + y^2 = 20^2$, donde la región sombreada se encuentra limitada por las curvas anteriores.

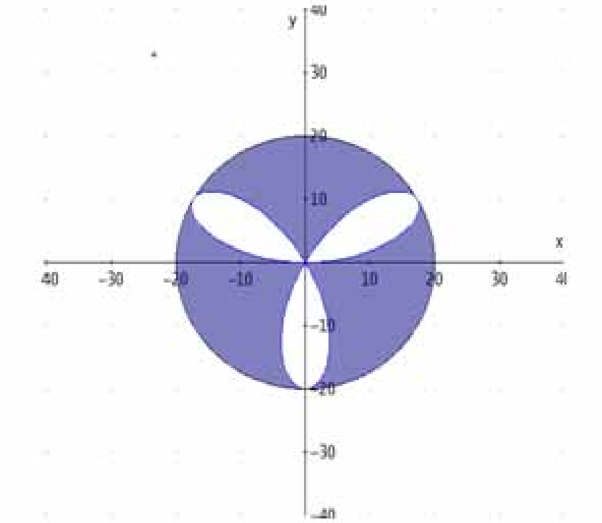


Figura 13

b. El diseño del cerámico se hace considerando la curva C_5, para p=20: $C_5 : r = 20\cos(3\theta)$ y la curva C_4, para $\alpha = 20 : C_6 : r = 20\ sen(3\theta)$, donde la región sombreada se encuentra limitada por las curvas anteriores.

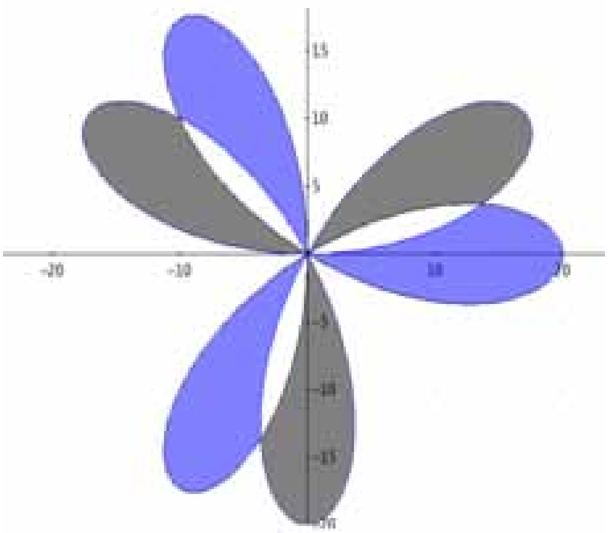


Figura 14
Diseño del cerámico

3. Elegimos el primer diseño y el piso de 80cm x 80cm hecho de enlosado con dichas baldosas y mayólicas para que haya estética. Este se muestra a continuación.

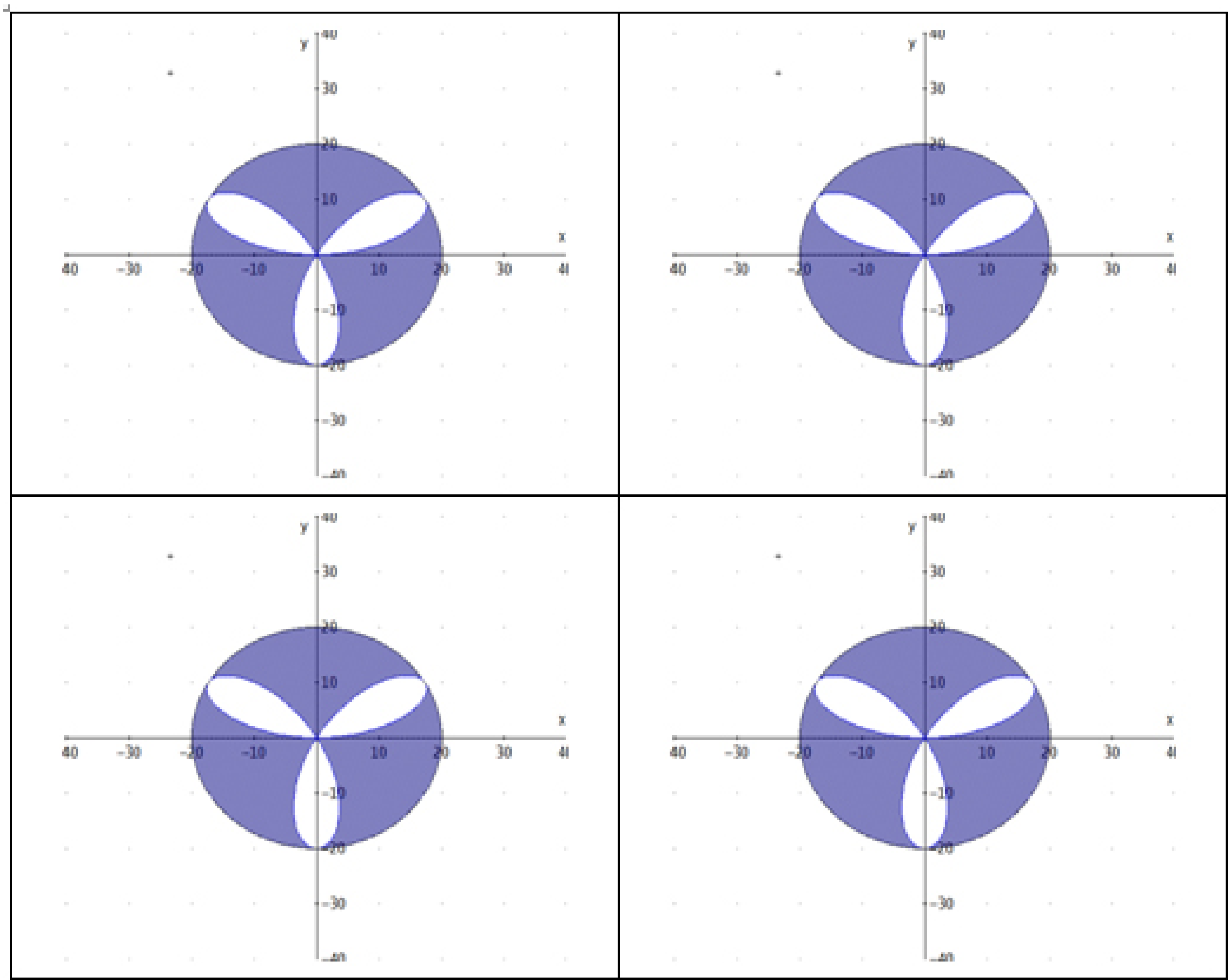


Figura 15
Diseño del piso de 80cm x 80cm

4. Elegimos el segundo diseño y la pared de 400cm x 400cm, enlosado con cerámicos para que haya estética. Este muestra a continuación.

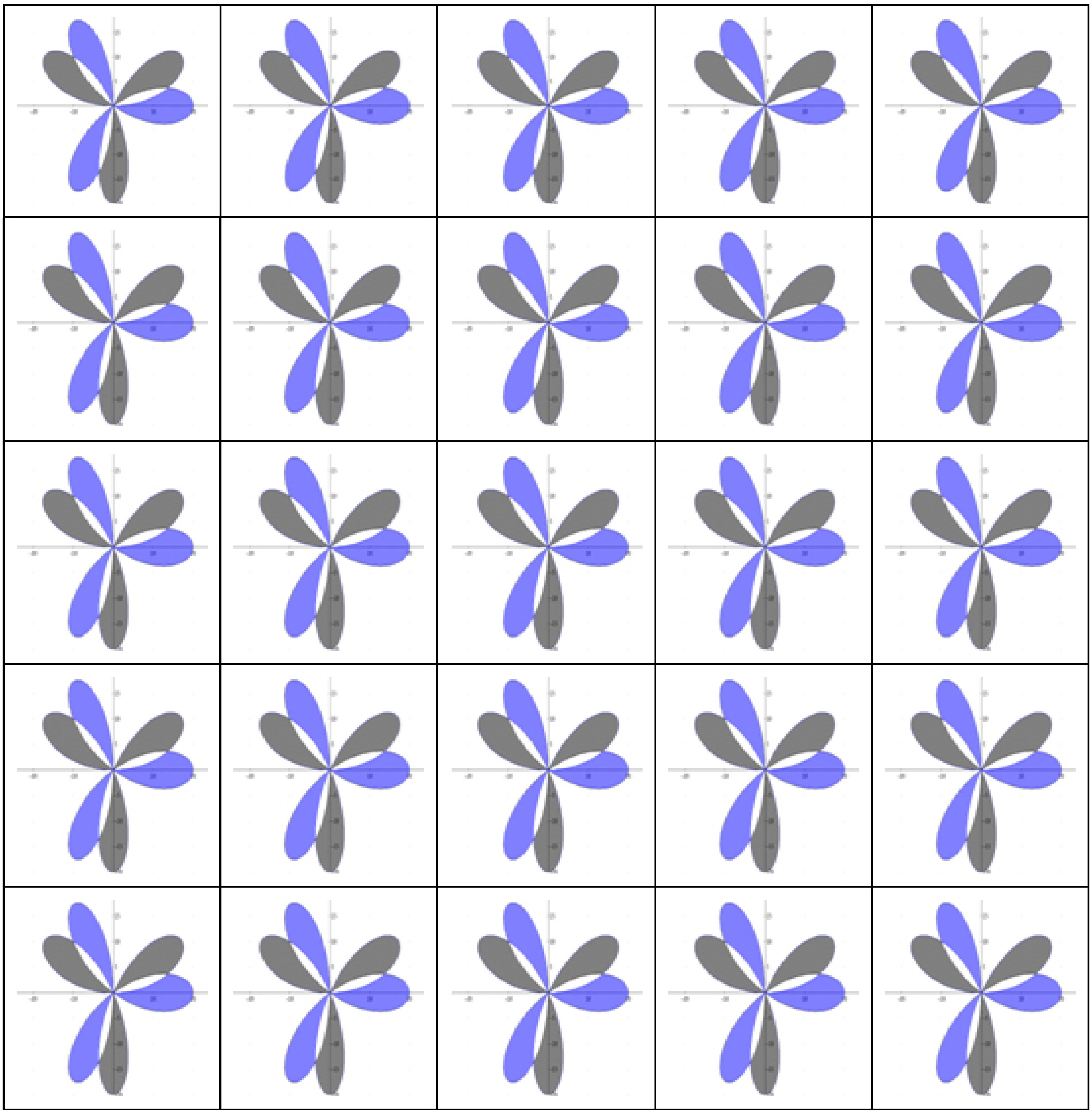


Figura 16
Diseño de la pared de 400cm x 400cm

Pregunta 2
Los ventiladores son de dos tipos, una de ellas con hélices que tienen forma de rosas de 8 pétalos y la otra de 4 pétalos, y sobre el centro de cada una de ellas se superpone un círculo pequeño. En ambos tipos, el protector (estructura metálica de protección de hélice) de forma circular tiene un diámetro de 42 cm.
Tomando como centro de la hélice el centro del círculo y, como eje polar, la recta horizontal que pasa por el polo.

1. Resolviendo
   a. No. Puesto que si $r = sen\theta + (\sin(\frac{}{2}\theta))$ entonces debe ser $\beta \leq r = 21\ cm$ radio de protector. Por lo tanto, r no puede ser 24 cm.
   b. Si r=21 se tendrían 8 puntos de contactos.
   c. π=21-3=18.

2. La rosa de 4 pétalos C_1 : $r = \eta\cos(2\theta)$ $\eta > 0$

   a. No. Pues $2\eta = 64 \rightarrow \eta = \frac{64}{2} < 21$ cm.

   b. Sí. Pues $2\eta = 41 \rightarrow \eta = \frac{41}{2} < 21$ cm.

   c. $\eta = 21 - 4 \rightarrow \eta = 17$ cm.

3. Diseñamos un ventilador, de tal manera que la hélice tenga las características pedidas.

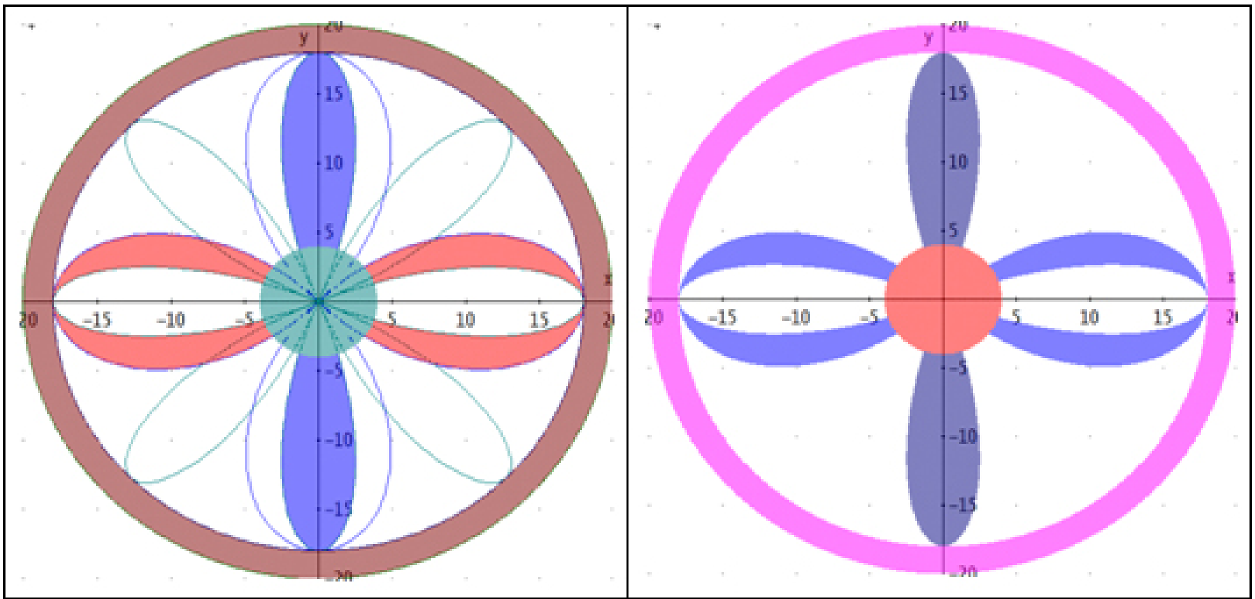


Figura 17
Diseño de ventilador

4. Diseñamos un ventilador, de tal manera que la hélice tenga las característizcas pedidas.

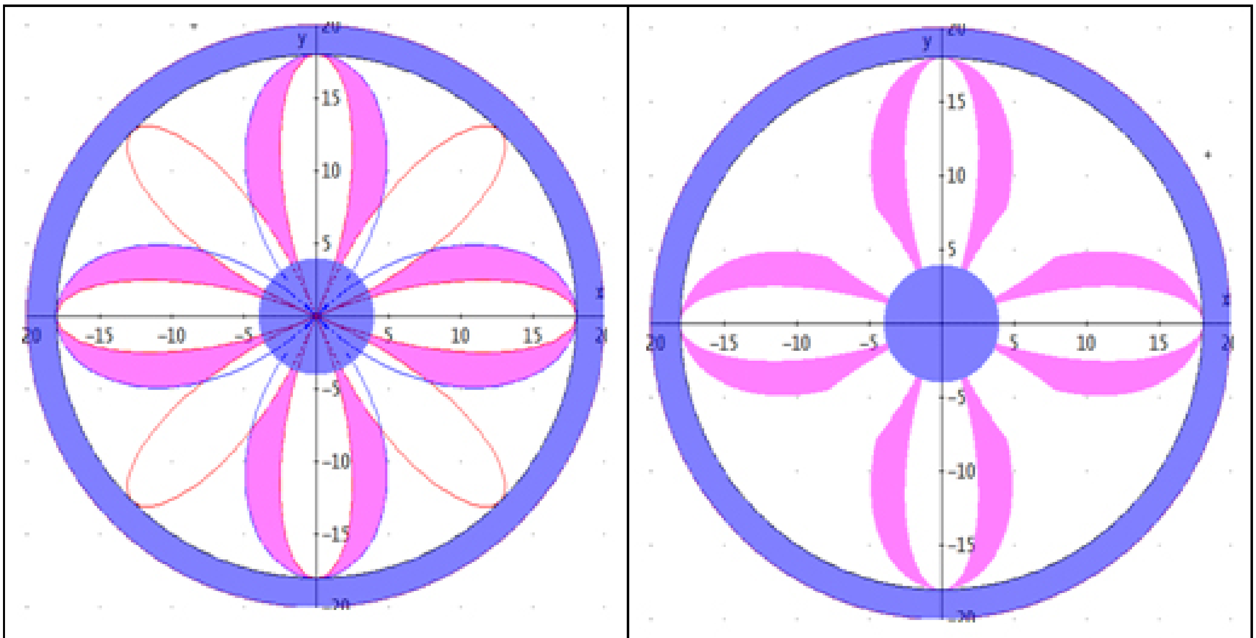


Figura 18
Diseño de ventilador

ANEXO 3

Resumen de los pasos para graficar una curva en coordenadas polares

Sea *C* curva descrita por la ecuación $F(r,\pi-\theta)$ en coordenadas polares. Su gráfica en el plano representa una curva. En muchos casos, es posible expresar la ecuación como una función $r = f(\theta)$.
Para nuestros fines en la actividad, la construcción de curvas en coordenadas polares constará de los siguientes pasos.

1. Intersección con los ejes y el polo.
   a. Con el eje polar, los puntos de intersección se hallan resolviendo la ecuación $F(r,n\pi)=0$, $n \in Z^+$ (Es suficiente tomar n=0 y n=1).
   b. Con el eje normal, los puntos de intersección se hallan resolviendo la ecuación $F(r,(2n+1)\frac{\pi}{2})=0$ $n \in Z^+$. (Es suficiente tomar n=0 y n=1).
   c. Con el polo, los puntos de intersección se hallan resolviendo la ecuación $F(r,\pi-\theta)$, $n \in Z^+$. Es independiente del ángulo.

2. Simetría:
   a. Con el eje polar, existe simetría si $F(r,\theta) = F(-r,\theta)$.
   b. Con el eje normal, existe simetría si $F(r,\theta)=F(r,\pi-\theta)$.
   c. Con el polo, existe simetría si $F(r,\theta) = F(-r,\theta)$.

3. Extensión. Para diferentes valores del ángulo en al menos una vuelta, qué valores toma r.

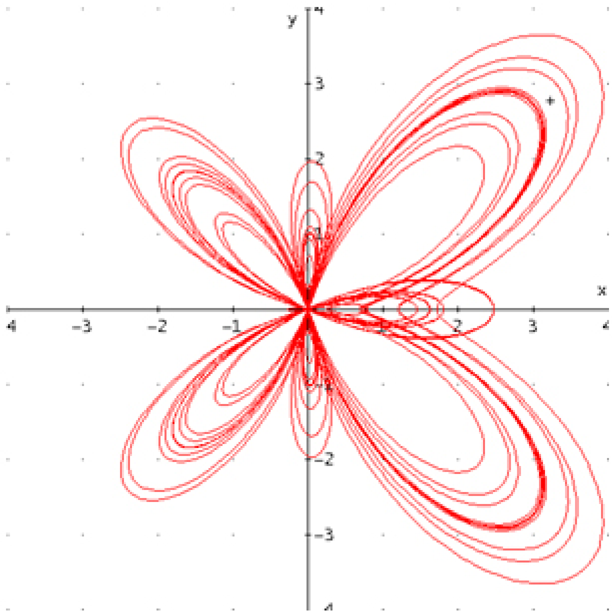
4. Cálculo de las coordenadas de un número suficiente de puntos para obtener una gráfica adecuada, incluir las intersecciones con los ejes y el polo.

5. Trazado de la gráfica usando la simetría analizada previamente.

Gráfica en derive de la ecuación de la mariposa

Por ejemplo, la curva que mejor representa a una mariposa es la siguiente con ecuación en coordenadas polares $r = e^{\cos\theta} - 2\cos(4\theta) + \cos^5\left(\frac{\theta}{21}\right)$.

En derive, en la ventana de comandos, ingresamos la ecuación; luego, levantamos hacia la ventana del Álgebra, donde se procesa la ecuación. Abrimos la ventana de los gráficos bidimensionales, escogemos el sistema de coordenadas y luego graficamos.
Para sombrear las regiones interiores, se deben tener en cuenta las regiones con desigualdades, por ejemplo, con $r \le e^{\cos\theta} - 2\cos(4\theta)$, se sombrea la parte interior de sus alas.



Ejercicios

Trace la gráfica de las siguientes curvas.

1. Rosa de 16 pétalos $r = \sin(\frac{8}{5}\theta)$.

2. La curva $r = sen\theta + (\sin(\frac{5}{2}\theta).^3$

3. La familia de curvas polares $r = 1 + c\sin(\theta)$.

4. C:$r = (a + b\cos m\theta)(c + dsenn\theta)$, para diferentes valores de los coeficientes a, b, c, d y los enteros positivos m y n.

5. La curva $(x^2 + y^2)^3 = 4x^2y^2$.

6. Rosa con pétalos interiores $r = 3\cos\left(\frac{7\theta}{2}\right) + 1$.