

Appunti NON UFFICIALI del corso di Fisica 5F, tenuto dal prof. Busetto

Revisione 0.70 — 20 Luglio 2003
trascritti da Gianluca Moro¹

III Trimestre 2003

Libri consigliati

Lerner Fisica Moderna, Vol. 4, Zanichelli: testo “ufficiale” del corso: esercizi e riferimenti a figure o altro sono relativi a questo testo, quando non diversamente indicato.

Bayser Modern Physics: Buon testo, con aspetti storici sull’evoluzione della fisica moderna

Krane Modern Physics

Dispense <http://www.fisica.unipd.it/~busetto/giovanni.html> :
nella Home page del prof. Busetto vi è il materiale usato durante il corso
(lucidi e dispense)

¹Materiale disponibile in www.giammy.com.

Per osservazioni: Gianluca Moro — email: giammy@giammy.com.

Copyright (c) 2003 Gianluca Moro.

This document is free; you can redistribute it and/or modify it under the terms of the GNU General Public License as published by the Free Software Foundation; either version 2 of the License, or (at your option) any later version.

This document is distributed in the hope that it will be useful, but WITHOUT ANY WARRANTY; without even the implied warranty of MERCHANTABILITY or FITNESS FOR A PARTICULAR PURPOSE. See the GNU General Public License for more details.

Ovvero: il materiale viene distribuito sotto la licenza GNU General Public License (si veda www.gnu.org/licenses/licenses.html per i dettagli). In poche parole, il materiale è copiabile, duplicabile, integrabile a piacere purché il risultato venga distribuito con il medesimo tipo di licenza.

Questo testo rappresenta la trascrizione degli appunti presi durante le lezioni del corso di Fisica 5F tenuto dal prof. G. Busetto.

Il lavoro non ha alcuna pretesa di completezza, ma vuole essere semplicemente una traccia per lo studente che deve preparare l'esame: l'organizzazione attuale degli argomenti rispecchia strettamente l'ordine in cui sono stati trattati a lezione, per cui in certe parti si possono notare ripetizioni o comunque una divisione non proprio organica degli argomenti.

Sono poste in evidenza alcune parti, con le seguenti convenzioni:



NOTA:

Una nota di chiarimento o approfondimento: può essere un richiamo ad argomenti che dovrebbero essere noti, una spiegazione di un passaggio, che magari non era proprio ovvio (in particolare al sottoscritto) o altro. Tipicamente una utile parentesi nel filo del discorso.



ESERCIZIO: Numero

Questo non penso richieda spiegazioni: sono riportati gli esercizi svolti a lezione, e come tutti gli esercizi vi è una parte di testo e domande ...

... seguita, di solito, dalle risposte: se è presente il numero dell'esercizio fa riferimento al *Lerner, Fisica Moderna*.



RIFLESSIONE:

Un'idea o una domanda nata dagli argomenti esposti, per lo più una divagazione, che non è garantita essere pertinente con il resto del discorso.



Dispensa

Materiale copiat... oops, volevo dire, ripreso dalle dispense del prof. Busetto: l'originale è disponibile nella home page del docente.



Per quel che riguarda il resto del testo, vengono riportate le formule importanti con numero e cornice:

$$\boxed{E = h\nu} \quad (1)$$

mentre vengono riportate solo con numero le formule finali di una dimostrazione, o comunque abbastanza importanti, come

$$\Delta\lambda = \lambda_c(1 - \cos\theta) \quad (2)$$

e senza alcun numero

$$a = b/c$$

le formule che rappresentano semplici passaggi. Pur essendo questa l'idea guida, può essere che non sempre sia stata applicata, e comunque, non avendo alcuna definizione operativa della grandezza *importanza di una formula*, la distinzione è sempre soggettiva ed opinabile.

Alla fine del testo sono riportati alcuni richiami utili, un riassunto delle costanti fisiche usate durante il corso, un riassunto delle formule più importanti: c'è in tutti i testi di fisica, per cui è presente anche qui, nonostante sia veramente eccessivo definire questi appunti un testo di fisica!

Il materiale NON è ufficiale: ogni errore, incorrettezza, incoerenza o altro è da imputare esclusivamente a me e non al prof. Busetto. Ogni osservazione su errori o miglioramenti al testo, è molto gradita: giammy@giammy.com.

Come tutti i lavori, man mano che si procede, si trovano cose da cambiare, riscrivere, aggiungere, d'altro canto, come tutti gli anni, penso di fare un po' di ferie, ed al ritorno dovrei iniziare a preparare qualche esame ...

Allo stato attuale, l'ultima parte del testo (dal capitolo relativo all'equazione di Schrödinger alla fine) sarebbe da sistemare meglio, probabilmente riorganizzando in maniera più omogenea il testo: essendo il mio primo approccio alle idee della meccanica quantistica, immagino che la chiarezza del testo di questa parte ne risenta parecchio.

Capitolo 1

Introduzione

16/4/2003

Il corso si propone di fornire allo studente i concetti fondamentali della fisica quantistica, che verrà poi affrontata in maniera più formale e sistematica nei corsi successivi.

La fisica quantistica ha una data di nascita convenzionale nel 14 Dicembre 1900, giorno in cui Planck propone l'ipotesi che l'energia associata al campo elettromagnetico sia quantizzata, con la famosa formula:

$$E = h\nu \quad (1.1)$$

dove h è la **costante di Planck**, che vale:

$$h = 6.626 \cdot 10^{-34} \text{ J s} \quad (1.2)$$

Questa ipotesi nasce dall'esigenza di spiegare lo **spettro di emissione del corpo nero**, fenomeno molto studiato, ma la cui interpretazione, basata sulla fisica classica, dava risultati insoddisfacenti.

L'ipotesi quantistica viene poi usata anche da Einstein per spiegare l'**effetto fotoelettrico**.

D'altro canto, se la radiazione elettromagnetica si propaga in quanti, ciò significa che ha una natura corpuscolare: questa ipotesi viene messa alla prova, con successo, nell'**esperienza di Compton**, in cui si verifica come vi sia un trasferimento di quantità di moto da fotoni ad elettroni.

Una volta chiariti alcuni dei problemi legati alla natura della radiazione elettromagnetica, si pone il problema dell'interazione tra radiazione elettromagnetica e le strutture atomiche: si osservano spettri di emissione con righe quantizzate, di cui manca un modello teorico, e nello stesso tempo si sta cercando di capire la struttura dell'atomo: con l'**esperienza di Rutherford** si chiarisce che l'atomo ha un piccolo centro massivo, attorno a cui orbitano gli elettroni: il primo modello di atomo che

tiene conto di questo e degli spettri di emissione quantizzati è il **modello di Bohr**, che in parte è classico, ed in parte utilizza il concetto di quantizzazione.

Con **De Broglie**, si fa un passo ulteriore: come al fotone viene riconosciuta natura ondulatoria e corpuscolare, così viene in generale ipotizzata una **natura ondulatoria della materia**.

A questo punto abbiamo Bohr che ha introdotto un ipotesi quantistica nella descrizione dell'atomo, De Broglie che ha introdotto l'idea della natura ondulatoria della materia, e **Schrödinger** che, nella sua famosa equazione, fonde in un unico modello la natura quantistica ed ondulatoria della natura.

Nel modello di Schrödinger non è ancora presente il concetto di **spin** delle particelle elementari, concetto necessario per spiegare alcune osservazioni di spettri di emissione (strutture fini ed iperfini degli spettri di emissione): questo verrà introdotto da Dirac.

Con l'introduzione dell'ipotesi della natura ondulatoria della materia, si pone anche un grosso problema fisico/filosofico, dato dal **principio di indeterminazione di Heisenberg**, per cui vi è un limite nella precisione che possiamo raggiungere nella descrizione dei fenomeni, limite non dato da considerazioni pratiche o tecnologiche, ma dalla natura stessa della materia.

Capitolo 2

Il corpo nero

2.1 Radiazione termica

17/4/2003

Ogni corpo assorbe ed emette radiazioni elettromagnetiche, per cui risulta interessante studiare la legge che regola questo tipo di emissioni: prima di far questo è però utile capire, almeno qualitativamente, cosa e quali corpi dobbiamo studiare.

La situazione più interessante da cui partire per questo tipo di studio è quella di equilibrio, cioè di un corpo che emette tanta radiazione quanta ne assorbe. Possiamo pensare questo corpo, isolato in una scatola chiusa, in equilibrio termico, e per semplicità lo immaginiamo “nero”, cioè che assorbe tutta l’energia incidente.

Abbiamo dunque un corpo nero, che assorbe tutta l’energia incidente e che emette tanta energia quanta quella che assorbe. Per la condizione di equilibrio, avere un corpo o averne 2 nella scatola non cambia nulla, entrambi sono in equilibrio, e non cambia nulla nemmeno se di corpi non ce ne sono, abbiamo cioè una scatola chiusa, in cui le pareti sono in equilibrio termico con la cavità.

A questo punto abbiamo una situazione ideale, la cui descrizione sarà poi valida per tutti i corpi reali. Come ultimo passaggio pratichiamo un forellino molto piccolo, tale da non disturbare l’equilibrio interno, ma che ci consenta di studiare l’emissione di radiazione elettromagnetica proveniente dall’interno della cavità: questa emissione è quella che comunemente si chiama “emissione di Corpo Nero”, e ciò che viene studiato è il suo spettro di emissione.

Prima del 1900 la radiazione termica di corpo nero era stata studiata molto ed il suo andamento era ben noto, in pratica, ma non vi era alcun modello che lo spiegasse. L’andamento dello spettro del corpo nero, ovvero l’intensità energetica di radiazione in funzione della lunghezza d’onda, è riportato in figura 2.1: essa è massima nel visibile a circa 7000°K .

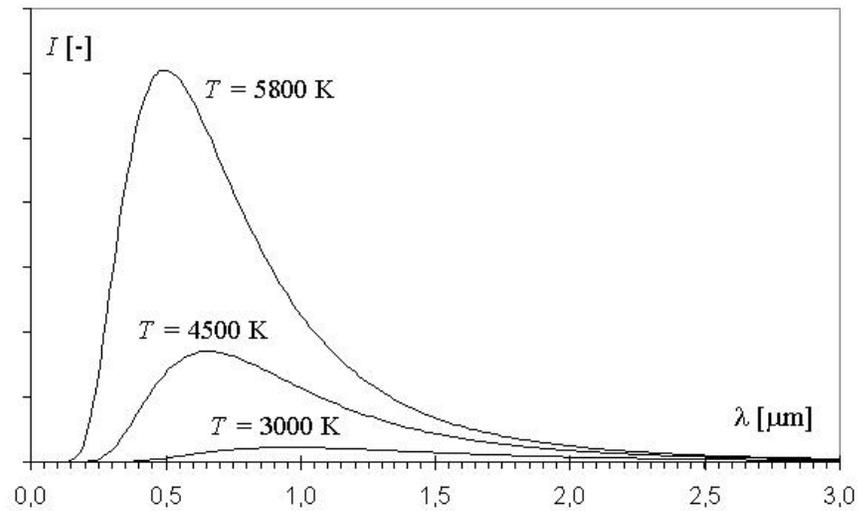


Figura 2.1: Spettro di emissione del corpo nero

2.2 La legge di Stefan-Boltzmann

Anche se non era presente un modello teorico che spiegasse l'andamento dello spettro di emissione del corpo nero, erano stati formulati modelli parziali che spiegavano alcuni dei comportamenti di questo andamento: Boltzmann, ad esempio, con considerazioni termodinamiche classiche, aveva trovato l'andamento della energia di radiazione in funzione della temperatura.

2.2.1 Pressione di radiazione

Risulterà utile nella deduzione della legge di Stefan-Boltzmann aver ricavato l'espressione della pressione di radiazione elettromagnetica.



Sulla pressione della radiazione elettromagnetica

La radiazione elettromagnetica trasporta energia e quantità di moto. Si può associare alla radiazione una intensità di energia I o energia trasportata per unità di

tempo e di superficie nella direzione perpendicolare al moto.

Nel caso in cui la radiazione incida su di una parete, produce una pressione il cui valore dipende da come avviene l'interazione. Sono particolarmente significativi i casi in cui la parete:

- è del tutto trasparente alla radiazione
- la assorbe totalmente
- la riflette completamente

Nel primo dei tre casi non si genera evidentemente alcuna pressione. Calcoleremo invece la pressione di radiazione p_{rad} nel secondo caso.

L'intensità di energia I , energia per unità di tempo per unità di superficie si può scrivere come:

$$I = \frac{E}{tS} = \frac{E}{\frac{S}{c}} = \frac{Ec}{V} = uc \quad (2.1)$$

La relazione tra energia e quantità di moto associati al quanto della radiazione elettromagnetica, il fotone, (vedi i richiami) è:

$$p = E/c$$

da cui possiamo scrivere, facendo riferimento a figura 2.2:

$$\frac{dp}{dt} = \frac{E}{cdt} = \frac{IdSdt}{cdt} = \frac{I}{c}dS = \frac{I}{c}dS' \cos \theta$$

dove abbiamo preso in considerazione la quantità di moto lungo una generica direzione di incidenza individuata da un angolo rispetto alla verticale ad un elemento di superficie che assorba completamente la radiazione. Questa è dunque la quantità di moto ceduta per unità di tempo ad un elemento di superficie infinitesima dS della parete.

La quantità di moto ceduta per unità di tempo nella direzione z perpendicolare alla superficie sarà dunque

$$\frac{dp_z}{dt} = \frac{dp}{dt} \cos \theta = \frac{I}{c} \cos^2 \theta$$

e ricordando infine che dp_z/dt rappresenta la componente perpendicolare alla superficie della forza dovuta alla radiazione, il contributo alla pressione di radiazione legato alla direzione di incidenza individuata da θ è:

$$p_{rad} = \frac{dp_z/dt}{dS'} = \frac{I}{c} \cos^2 \theta$$

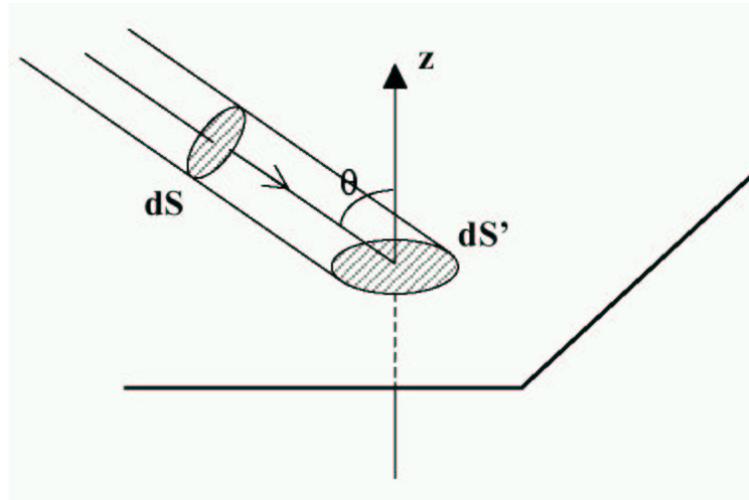


Figura 2.2: Pressione di Radiazione

Passando ora ad un caso di radiazione con caratteristiche di isotropia, così come avviene per la radiazione termica in una cavità, l'intensità indicata sino ad ora con I diventa $I \cdot d\Omega/2\pi$, dove $d\Omega/2\pi$ rappresenta la frazione considerata di angolo solido nel semispazio visto dalla parete, essendo in questo caso I l'intensità totale di radiazione e non più il solo contributo in una certa direzione. Calcolando dunque l'integrale dei contributi da tutte le direzioni di incidenza, si ottiene:

$$p_{rad} = \frac{I}{2\pi c} \cdot \int \cos^2 \theta \cdot d\Omega = \frac{I}{3c} = \frac{1}{3}u$$

nel caso di assorbimento completo.

Nel caso di riflessione totale della radiazione da parte della parete, l'unica modifica è dovuta alla variazione di quantità di moto per unità di tempo che diventa doppia del caso appena trattato. Risulta dunque:

$$p_{rad} = \frac{2I}{3c}$$

nel caso di riflessione totale.



2.2.2 Deduzione della legge di Stefan-Boltzmann

Torniamo ora al problema principale¹: già Stefan aveva ipotizzato nel 1879 che l'intensità totale emessa da un corpo nero sia proporzionale alla quarta potenza della temperatura stessa: in seguito, nel 1884, Boltzmann dedusse la relazione ipotizzata da Stefan con i ragionamenti termodinamici che ora andremo a ripercorrere.

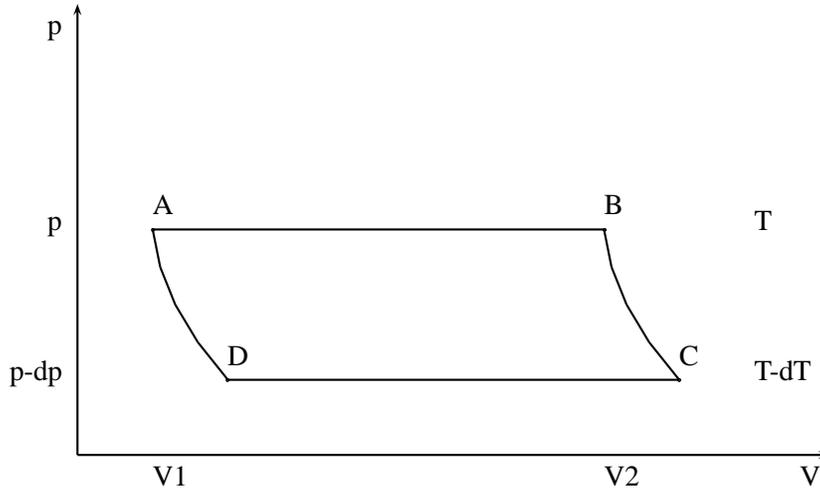


Figura 2.3: Il ciclo di Carnot considerato nella deduzione della legge di Stefan-Boltzmann

Si consideri un corpo nero, costituito da una scatola con una parete mobile, e gli si faccia percorrere un ciclo di Carnot infinitesimo, come mostrato in figura 2.3: si tratta di una trasformazione isoterma dal punto A , (p, V_1, T) al punto B , (p, V_2, T) , seguita da una espansione adiabatica infinitesima da B a C , $(p - dp, V_2, T - dT)$. Seguono una trasformazione isoterma da C a D ed infine una trasformazione adiabatica infinitesima da D ad A .

Il lavoro compiuto da A a B è

$$-W_{AB} = p\Delta V = \frac{1}{3}u(V_B - V_A) \quad (2.2)$$

dove abbiamo usato la relazione tra pressione e densità di energia precedentemente trovata.

La variazione di energia interna da A a B è²

¹Vedi anche le dispense: ``Sulla legge di Stefan-Boltzmann``

²L'energia interna U si può scrivere come

$$U = uV$$

$$\Delta U_{AB} = U_B - U_A = uV_B - uV_A = u(V_B - V_A) \quad (2.3)$$

Il calore entrante Q_e nel ciclo è, dal primo principio della termodinamica³

$$Q_e = \Delta U_{AB} + W_{AB} = u(V_B - V_A) + \frac{1}{3}u(V_B - V_A) = \frac{4}{3}u(V_B - V_A) \quad (2.4)$$

D'altro canto il lavoro del ciclo si può esprimere come

$$-dW_{ciclo} = p(V_B - V_A) - (p - dp)(V_B - V_A) = dp(V_B - V_A) \quad (2.5)$$

Quindi, applicando la definizione di rendimento termodinamico, abbiamo:

$$\eta = \frac{W_{ciclo}}{Q_e} = \frac{dp(V_B - V_A)}{\frac{4}{3}u(V_B - V_A)} = \frac{1}{4} \frac{du}{u} \quad (2.6)$$

che sappiamo essere uguale a

$$\eta = 1 - \frac{T_{bassa}}{T_{alta}} = 1 - \frac{T - dT}{T} = \frac{dT}{T} \quad (2.7)$$

uguagliando le ultime due espressioni per il rendimento abbiamo:

$$\frac{du}{u} = 4 \frac{dT}{T} \quad (2.8)$$

da cui, integrando

$$\log u = 4 \log T = \log T^4$$

o

$$u \propto T^4$$

ed infine, ricordando la 2.1, $I = cu$, abbiamo

$$\boxed{I = \sigma T^4} \quad (2.9)$$

Che è la legge di Stefan-Boltzmann, dove

dove u è la densità di energia per unità di volume e V è il volume. La densità di energia u è funzione della temperatura.

³Il primo principio della termodinamica asserisce che

$$\delta Q = \delta W + \delta U$$

$$\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8} \frac{W}{m^2 K^4} \quad (2.10)$$

è la costante di Stefan-Boltzmann.

Questo significa che l'integrale dello spettro di emissione ovvero l'energia totale emessa dal corpo nero è proporzionale a T^4 .

2.3 La legge di Wien

Accanto all'energia totale emessa dal corpo nero, e dalla sua relazione di variazione con la temperatura, un'altra caratteristica macroscopica relativa a questi spettri di emissione, e sempre collegata alla temperatura è il valore di λ_{MAX} , ovvero la lunghezza d'onda in corrispondenza della quale si ha il massimo dell'intensità emessa.

Wien ha studiato, ed ha dato una relazione che collega il valore di λ_{MAX} alla temperatura:

$$\lambda_{MAX} T = \epsilon \quad (2.11)$$

dove

$$\epsilon = 2.89 \cdot 10^{-3} mK \quad (2.12)$$

è la costante di Wien.

2.4 La legge di Planck sull'emissione

Pur essendo presenti 2 caratterizzazioni importanti dello spettro di emissione del corpo nero, mancava ancora una descrizione "globale" che desse un modello teorico convincente dell'andamento globale dello spettro di emissione. Furono fatti vari tentativi, di cui riportiamo quello che ha portato alla **legge di Rayleigh-Jeans**⁴.

2.4.1 La legge di Rayleigh-Jeans

Lo scopo è derivare l'andamento dello spettro elettromagnetico in funzione della lunghezza d'onda: consideriamo una cavità in equilibrio termico, a temperatura costante, con pareti totalmente riflettenti: la radiazione può essere descritta come sovrapposizione di onde elettromagnetiche stazionarie. Consideriamo una direzione, e possiamo scrivere:

⁴Vedi anche la dispensa: "Sullo Spettro di radiazione termica"

$$L_x = n_x \frac{\lambda_x}{2} = n_x \frac{\pi}{k_x}$$

dove L_x è la lunghezza della cavità lungo la direzione x: abbiamo cioè utilizzato la relazione per le onde stazionarie, $k_x = \frac{2\pi}{\lambda}$ è il numero d'onda per cui

$$n_x = L_x \frac{k_x}{\pi}$$

descrive i modi di vibrazione per onde stazionarie, o passando agli infinitesimi

$$dn_x = L_x \frac{dk_x}{\pi} \quad (2.13)$$

Questo, passando in 3 dimensioni, diventa:

$$dn_x dn_y dn_z = \frac{L_x L_y L_z}{\pi^3} dk_x dk_y dk_z \quad (2.14)$$

ora considero una direzione arbitraria, r, passando in pratica a coordinate polari, la 2.14 diventa:

$$dn_x dn_y dn_z = \frac{L_x L_y L_z}{\pi^3} 4\pi k^2 dk \quad (2.15)$$

e dividendo per il volume $L_x L_y L_z$, e ricordando che $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, si ottiene la **Densità di modi di vibrazione in funzione della lunghezza d'onda**⁵:

$$g(\lambda) d\lambda = \frac{4\pi}{\pi^3} \frac{4\pi^2}{\lambda^2} \frac{2\pi}{\lambda^2} d\lambda = \frac{32\pi}{\lambda^4} d\lambda \quad (2.16)$$

però, poiché n è positivo, devo considerare solo il primo quadrante, per cui il valore va diviso per 8, d'altro canto i modi di vibrazione corrispondenti a ciascun valore di n sono 2 (il modo ed il suo simmetrico rispetto l'asse dell'onda parallelo alla direzione di propagazione), quindi bisogna moltiplicare per 2, in definitiva la **Densità di modi di vibrazione in funzione della lunghezza d'onda** è

$$g(\lambda) d\lambda = \frac{8\pi}{\lambda^4} d\lambda \quad (2.17)$$

Ricordando che lunghezza d'onda e frequenza sono legati dalla relazione $\lambda\nu = c$, la relazione si può equivalentemente scrivere come:

$$g(\nu) d\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} d\nu \quad (2.18)$$

⁵ questa funzione è infatti n/V , dove n sono i modi di vibrazione e V il volume

Considerando l'energia media di ciascun modo di vibrazione come $E = kT$, allora la **densità di energia** vale

$$u(\lambda)d\lambda = Eg(\lambda)d\lambda = \frac{8\pi}{\lambda^4}kTd\lambda \quad (2.19)$$

Questa funzione che descrive la densità di energia, dovrebbe coincidere con l'andamento sperimentale dello spettro elettromagnetico: evidentemente invece, per λ tendente a 0, il valore di u tende ad infinito, contro le evidenze sperimentali. Per questo motivo la legge fu chiamata “catastrofe ultravioletta” (vedi figura 2.4).

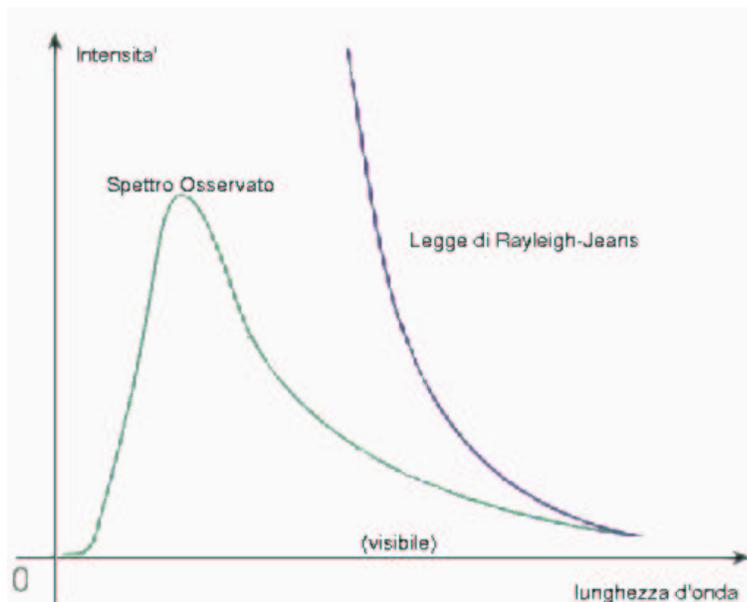


Figura 2.4: Contronto tra andamento sperimentale dello spettro e quello previsto dalla “catastrofe ultravioletta”

2.4.2 L'ipotesi di Planck

Al momento abbiamo leggi che spiegano alcuni fatti sperimentali e leggi in palese contraddizione con i dati: manca una descrizione omogenea e convincente del fenomeno.

$$I = \sigma T^4 \quad (2.20)$$

$$\lambda_{MAX} T = \epsilon \quad (2.21)$$

$$u(\lambda) d\lambda = \frac{8\pi}{\lambda^4} kT d\lambda \quad (2.22)$$

Abbiamo visto che l'energia associata a ciascun modo era posta uguale a $E = kT$: vediamo da dove proveniva questo valore.

La densità di energia, dalla distribuzione statistica di Maxwell-Boltzmann, vale (normalizzata ad 1)

$$f(E) = \frac{1}{kT} e^{-\frac{E}{kT}}$$

per cui l'energia media dei modi di vibrazione è:

$$E = \frac{\int_0^\infty E f(E) dE}{\int_0^\infty f(E) dE} = kT$$

In questo caso il denominatore è 1 (funzione normalizzata) e può essere omissso. L'ipotesi che ha portato ad una forma analitica corretta della descrizione dell'andamento dello spettro, è stata formulata da Planck, il quale ha supposto che l'energia possa assumere solo determinati valori:

$$E = h\nu \quad (2.23)$$

dove h è la costante di Planck e vale

$$h = 6.626 \cdot 10^{-34} J s$$

Se l'energia è quantizzata, l'integrale va sostituito con la somma, per cui:

$$E = \frac{\sum_0^\infty nh\nu \frac{1}{kT} e^{-\frac{nh\nu}{kT}}}{\sum_0^\infty \frac{1}{kT} e^{-\frac{nh\nu}{kT}}}$$

cioè l'espressione che prima era kT , diventa

$$E = \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}$$

che rappresenta l'energia associata ad ogni modo di vibrazione. Si vede che per energie basse (cioè λ alte) $\frac{h\nu}{kT} \rightarrow 0$ per cui $E \rightarrow kT$, cioè per basse energie (alte lunghezze d'onda) vengono confermati i vecchi risultati.

Sostituendo questo nuovo valore di E nella espressione della densità di energia si ottiene

$$u(\nu)d\nu = \frac{8\pi h\nu^2}{c^3} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} d\nu \quad (2.24)$$

o equivalentemente

$$u(\lambda)d\lambda = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \frac{d\lambda}{e^{\frac{hc}{kT\lambda}} - 1} \quad (2.25)$$

Derivando questa funzione rispetto a λ si trova la legge di Wien $\lambda_{MAX}T = \epsilon$, mentre se si integra in λ , si ottiene la legge di Stefan-Boltzmann $I = \sigma T^4$.



NOTA:

La densità di energia emessa è diversa dall'intensità luminosa emessa, ma tra i due c'è una relazione.

L'intensità di energia che esce è legata alla densità di energia interna alla cavità dalla relazione:

$$I(\lambda) = \frac{1}{4}cu(\lambda)$$

dove il 4 deriva dall'integrazione nelle varie direzioni: sostituendo questa espressione nella 2.25, si ottiene l'andamento dello spettro del corpo nero in funzione dell'intensità.

2.4.3 Il punto della situazione

Abbiamo visto lo **spettro di radiazione del corpo nero** e mostrato come l'ipotesi quantistica di Planck riesca a spiegare i fenomeni osservati. Planck stesso presentò questa ipotesi come un puro artificio matematico, in quanto il risultato spiegava i dati sperimentali, in seguito però l'ipotesi quantistica ha continuato a dimostrarsi valida nella spiegazione di molti fenomeni fisici, per cui dallo status di "ipotesi matematica" è passata a quello di "descrizione della natura".

Nel caso del corpo nero, al diminuire della lunghezza d'onda, il numero di modi di oscillazione aumenta, tendendo ad infinito al tendere della lunghezza d'onda a zero. Ipotizzando che ciascun modo abbia energia kT , si arriva all'assurdo che la densità di energia tende ad infinito al tendere a zero della lunghezza d'onda.

Con l'ipotesi quantistica, poichè sono concessi solo alcuni livelli di energia, al tendere della lunghezza d'onda a zero, l'energia del modo aumenta sempre più, fino a quando l'energia minima di eccitazione, legata alla lunghezza d'onda dalla relazione $E = h\nu$, aumenta sempre più, fino a quando non è più disponibile energia sufficiente ad eccitare quel particolare modo di oscillazione.

Quindi per $\lambda \rightarrow 0$, l'intensità di energia dello spettro di emissione diminuisce, fino ad annullarsi.

Ricapitoliamo i punti fondamentali visti:

Equazione di Stefan-Boltzmann

$$I = \sigma T^4 \quad \sigma = 5.67 \cdot 10^{-8} \frac{W}{m^2 K^4} \quad (2.26)$$

Equazione di Wien

$$\lambda_{Max} T = \epsilon \quad \epsilon = 2.89 \cdot 10^{-3} mK \quad (2.27)$$

Equazione di Rayleigh-Jeans

$$I_\lambda = \frac{2\pi ckT}{\lambda^4} \quad (2.28)$$

Equazione di Planck

$$I_\lambda = \frac{2\pi c^2 h}{\lambda^5 (e^{\frac{ch}{\lambda kT}} - 1)} \quad h = 6.626 \cdot 10^{-34} Js \quad (2.29)$$

Accanto allo studio del corpo nero erano presenti altri effetti non spiegabili con le teorie del momento, in particolare l'**effetto fotoelettrico**, che si colloca ai margini del visibile, verso l'ultravioletto (1-10eV, $\lambda < 400nm$) e l'effetto Compton.



ESERCIZIO: 40.3

Un filamento di tungsteno si può approssimare con un corpo nero: emette $P=200W$ ad una temperatura $T=3200K$: qual'è la superficie radiante del filamento?

I = Intensità di energia emessa per unità di tempo per unità di area =
Potenza emessa per unità di superficie.

$$I = \sigma T^4 = \frac{P}{S} \Rightarrow S = \frac{P}{\sigma T^4} = 33.6 \text{ m}^2$$

◇◇◇

**ESERCIZIO: 40.7**

Il nucleo di esplosione di una bomba H raggiunge una temperatura di $T = 10^8 \text{ K}$: qual è λ_{MAX} ?

$$\lambda_{MAX} = \frac{c}{T} = 2.89 \cdot 10^{-11} \text{ m}$$

Sono Raggi X di notevole energia (centinaia di KeV, o MeV).

◇◇◇

**ESERCIZIO: 40.38**

L'intensità (flusso) di energia che giunge sulla Terra dal Sole è $I = 1353 \text{ W/m}^2$.

La potenza irradiata dal Sole (distanza Terra-Sole = $1.5 \cdot 10^{11} \text{ m}$) è:

$$P = IS = I4\pi d^2 = 3.8 \cdot 10^{26} \text{ W}$$

Il raggio del Sole è $R = 6.96 \cdot 10^8 \text{ m}$, qual'è la temperatura superficiale del Sole?

$$T = \sqrt[4]{\frac{I}{\sigma}} = \sqrt[4]{\frac{P}{4\pi\sigma R^2}} = 5770 \text{ K}$$

◇◇◇

**ESERCIZIO: 40.43**

Una stella dista $d = 4.2 \cdot 10^{17} m$, e la sua intensità luminosa è $12 nW/m^2$, ed il massimo di emissione sia ha per $\lambda_{MAX} = 560 nm$.

$$P_{TotaleEmessa} = I4\pi d^2 = 266 \cdot 10^{28} W$$

$$T = \frac{\epsilon}{\lambda_{MAX}} = 5173 K$$

$$R_{stella} = \sqrt{\frac{P}{4\pi I}} = 7.2 \cdot 10^9 m$$

◇◇◇

Capitolo 3

Effetto Fotoelettrico

7/5/2003

L'effetto fotoelettrico consiste nella emissione da parte di un fotocatodo di elettroni, emissione indotta da fotoni. L'effetto viene studiato tramite un dispositivo mostrato in figura 3.1: si tratta essenzialmente di un tubo a vuoto con due elettrodi metallici.

Quando **la luce incide sul catodo** quali fenomeni si presentano? Le osservazioni fatte mostrano alcuni comportamenti caratteristici la cui spiegazione rimaneva però ignota:

- fissata la frequenza della luce incidente, ν , si misura una intensità di corrente proporzionale all'intensità luminosa: non esiste un'intensità soglia al di sotto della quale non c'è fotoemissione.
- non c'è ritardo tra l'istante di illuminazione dell'elettrodo e l'istante di emissione ($< 10^{-9}s$).
- esiste una frequenza soglia, ν_o , e per $\nu < \nu_o$ **non succede nulla**, indipendentemente dall'intensità luminosa.
- Si può applicare un potenziale agli elettrodi tale da annullare la corrente dei fotoelettroni: si osserva che, lasciando costante ν , esiste un potenziale soglia che annulla l'intensità di corrente, e questo potenziale varia linearmente con ν . Questo potenziale rappresenta una misura dell'energia dell'elettrone.

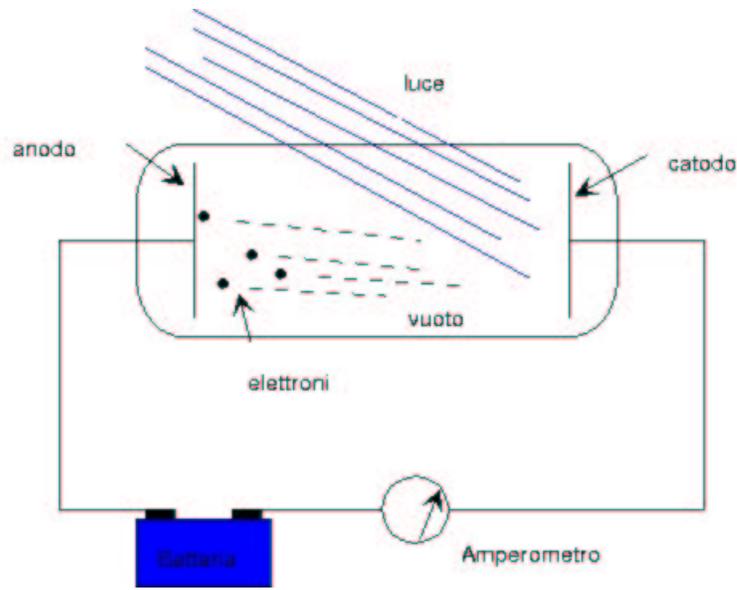


Figura 3.1: Dispositivo per lo studio dell'effetto fotoelettrico



NOTA:

L'elettrone si trova in un tubo a vuoto, e si muove da catodo ad anodo: se applico un potenziale che si opponga a questo movimento, l'elettrone riesce a raggiungere l'anodo solo se la sua energia è sufficiente a superare la differenza di potenziale applicata, dunque maggiore è l'energia degli elettroni emessi dal catodo, maggiore è il potenziale che devo applicare per annullare la corrente dei fotoelettroni.

I vari fenomeni osservati non potevano essere spiegati con le teorie correnti: vediamo ad esempio perché il fatto che non ci fosse un ritardo di emissione tra illuminazione ed effettiva emissione degli elettroni rappresentava un problema (nel senso che la teoria non riusciva a dare un modello soddisfacente del fenomeno).



ESERCIZIO: Il Ritardo di emissione

È data una superficie S di Potassio posta a 75cm da una lampada da 100W la cui potenza irradiata è il 5% della potenza assorbita. Ogni atomo di Potassio si consideri come un disco circolare di $\phi=10\text{nm}$. Determinare il tempo richiesto da ogni atomo per assorbire una quantità di energia pari a 2eV, che è l'energia caratteristica per accendere il fenomeno fotoelettrico.

$$\text{Intensità luminosa} = I = \frac{P}{S} = \frac{100 \cdot 0.05}{4\pi(0.75)^2} = 0.7\text{W/m}^2$$

$$\text{Potenza assorbita dall'atomo} = P_{\text{atomo}} = I\pi(d/2)^2 = 5.5 \cdot 10^{-2}\text{W}$$

$$t = \frac{2\text{eV}}{P_{\text{atomo}}} = \frac{2 \cdot 1.6 \cdot 10^{-19}\text{J}}{5.5 \cdot 10^{-2}} = 57\text{s}$$

Dovrebbe quindi esserci un ritardo di emissione di ben 57s!!!



Il fenomeno era stato studiato molto bene, ma solo nel 1905 Einstein ne dà una spiegazione usando l'ipotesi di Planck: ipotizza che **anche la luce si trasmetta a pacchetti di energia** $h\nu$.

Gli elettroni restano confinati nei metalli: si può pensare che per uscire debbano superare una certa barriera di energia potenziale, cioè devono avere una energia cinetica minima. Questa energia cinetica minima è detta **lavoro di estrazione** indicato con la lettera Φ , che è tipicamente di qualche eV.

L'energia cinetica massima è collegata al potenziale di arresto: il potenziale di arresto verrà infatti superato solo se la particella ha sufficiente energia cinetica.

Dunque l'energia fornita dal fotone all'elettrone, $h\nu$, "viene usata" dall'elettrone in parte per "uscire" dal metallo Φ , ed in parte per contrastare il potenziale d'arresto: si può dunque scrivere:

$$h\nu = eV_o + \Phi \quad (3.1)$$

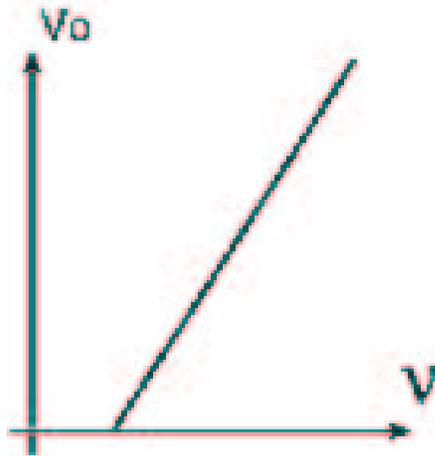


Figura 3.2: Grafico frequenza contro potenziale d'arresto



NOTA:

Si può pensare l'elettrone come una pallina in una buca: riceve energia $h\nu$ sufficiente a farlo saltare fuori dalla buca, (uscire dal metallo), ma poi deve affrontare una salita (potenziale d'arresto) e ci riuscirà solo se l'energia cinetica residua $h\nu - \Phi$ è sufficiente.

Dall'equazione si nota che il coefficiente angolare del grafico di figura 3.2 rappresenta

$$h/e$$

per cui si può calcolare sperimentalmente tale rapporto, e se è noto e , si può ricavare h .

Questa è una importante conferma della correttezza e generalità dell'ipotesi di Planck, dato che la stessa costante si può calcolare utilizzando 2 fenomeni completamente diversi.

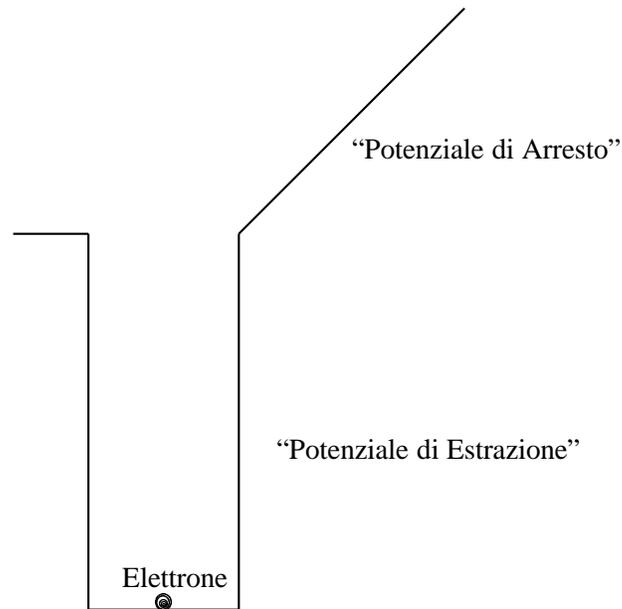


Figura 3.3: L'elettrone che "salta fuori" dalla sua buca



NOTA:

Una teoria risulta essere tanto più "corretta", quanto più riesce a spiegare o comunque non entra in contraddizione fenomeni diversi, non correlati, e soprattutto fenomeni che l'autore della teoria stessa non aveva preso in considerazione.



ESERCIZIO:

L'emettitore di un tubo ad effetto fotoelettrico ha un $\lambda_o = 600nm$

(lunghezza d'onda di soglia). Si determini λ della luce incidente quando il potenziale d'arresto è $V_o = 2.5V$.

1. La frequenza di soglia mi dà il valore del **lavoro di estrazione**:

$$\Phi = h\nu_o = h \frac{c}{\lambda_o} = \frac{6.62 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8}{\lambda_o} = 2.07eV$$

Notiamo la costante

$$hc = 6.62 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8 / 1.6 \cdot 10^{-19} = 1.24eVm$$

- 2.

$$eV_o = \frac{hc}{\lambda} - \Phi \rightarrow \lambda = 271nm$$

◇◇◇



NOTA:

Il quanto incidente ha energia 4.57eV, di cui 2.07eV sono usati per uscire dal metallo e i restanti 2.5 eV sono usati per arrivare all'altro elettrodo.



ESERCIZIO:

Sia $I = 1W/m^2$ l'energia per unità di tempo per unità di superficie che incide su una superficie di potassio con $\Phi = 2.2eV$, con $\lambda = 950nm$ *ultravioletto*

1. Determinare l'energia cinetica massima dei fotoelettroni emessi:

$$h\nu = E_k + \Phi \rightarrow E_k = \frac{hc}{\lambda} - \Phi = 1.34eV$$

2. Se lo 0.5% dei fotoni incidenti produce fotoelettroni, quanti ne sono emessi in 1s per ogni cm^2 ?

$I S = I \text{ cm}^2 =$ energia assorbita per unità di tempo

$$n_f = \frac{IS}{h \frac{c}{\lambda}} = 1.76 \cdot 10^{14}$$

fotoni al secondo incidenti.

Gli elettroni emessi sono

$$n_e = n_f 0.005 = 8.8 \cdot 10^{11}$$

L'intensità di corrente vale $I_c = n_e 1.6 \cdot 10^{-19}$, cioè frazioni di μA (se tutti gli elettroni arrivano all'altro elettrodo).

◇◇◇

3.1 Il punto della situazione

Abbiamo quindi visto che l'effetto fotoelettrico presenta fenomeni non spiegabili con le teorie classiche, mentre risulta un modello coerente applicando l'ipotesi quantistica.

L'ipotesi di Planck asseriva che l'energia si trasferisce dalle pareti del corpo nero al campo elettromagnetico in quanti di energia. Einstein, con la sua spiegazione dell'effetto fotoelettrico generalizza questo concetto affermando che l'energia del campo elettromagnetico rimane divisa in quanti, e ciascun quanto di energia rappresenta un fotone.

Capitolo 4

Effetto Compton

Una volta ipotizzato che i fotoni abbiano una natura corpuscolare, cosa che come abbiamo visto porta ad un modello dell'effetto fotoelettrico che spiega i dati sperimentali, bisogna verificare se il comportamento corpuscolare dei fotoni si manifesta anche in altre situazioni.

Una delle proprietà di un corpo è la quantità di moto: vediamo nel caso del fotone come la si può esprimere, dato che la sua massa è 0: abbiamo cioè:

$$m = 0 \quad e \quad v = c$$

per cui le definizioni di quantità di moto e energia cinetica non hanno senso separatamente, ha però senso la quantità:

$$\frac{p}{E} = \frac{\beta}{c} \quad (4.1)$$

che è indipendente dalla massa, e si può utilizzare anche per il fotone, per il quale vale

$$v = c \quad \rightarrow \quad \beta = 1 \quad \rightarrow \quad \frac{p}{E} = \frac{1}{c}$$

L'espressione che collega energia e quantità di moto per il fotone si può scrivere quindi¹

$$E = h\nu \rightarrow p = \frac{E}{c} = \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}$$

Abbiamo dunque una espressione per la quantità di moto del fotone: ora, per le particelle, la quantità di moto si trasferisce in un urto, quindi dovremmo osservare una

¹A questo proposito si veda anche nel Capitolo "Richiami" (par. 10.2) alla fine del testo.

variazione di quantità di moto, o equivalentemente di energia, o equivalentemente di lunghezza d'onda.

4.1 Raggi X

Il trasferimento di quantità di moto si deve osservare con qualsiasi tipo di fotone: sarà più facile però osservarlo su fotoni ad alta energia (cioè con elevata quantità di moto): l'effetto Compton (variazione di quantità di moto del fotone dovuta ad un urto) è infatti stato osservato la prima volta con fotoni di Raggi X, ad alta energia.

I raggi X sono prodotti accelerando degli elettroni con differenze di potenziale $\Delta V \approx 10^4 V$: risulta $\lambda > \frac{hc}{eV} = \frac{1.24 \cdot 10^{-6} m}{\Delta V} = \frac{1.24 \cdot 10^{-6}}{10^4 V} m$

La λ_{min} dei raggi X prodotti è funzione della tensione applicata agli elettrodi.

4.2 L'esperimento

A questo punto abbiamo tutti gli strumenti necessari per studiare il fenomeno dell'interazione tra un fotone e l'elettrone, e dovremmo cercare di spiegare la distribuzione dell'intensità in funzione dell'angolo di diffrazione, come si osserva nell'effetto Compton (vedi figura 4.1).

L'esperimento consiste nel bombardare con un fascio di elettroni monocromatici una lamina di grafite, e rilevare la lunghezza d'onda dopo il bersaglio a vari angoli di diffusione: la maggior parte degli elettroni passa senza essere deviata, ma alcuni vengono deviati e la nuova lunghezza d'onda del fotone deviato dipende dall'angolo.

Compton ipotizzò che la variazione di lunghezza d'onda fosse dovuta alla variazione della quantità di moto nell'urto con un elettrone, e calcolò la variazione usando questo modello (urto fotone ed elettrone).

Sia 1 il fotone e 2 l'elettrone a riposo: applichiamo i principi di conservazione della quantità di moto e dell'energia:

Per quel che riguarda la conservazione della quantità di moto lavoriamo in 2 dimensioni e abbiamo, in riferimento alla figura 4.2

$$\vec{p}_f = \vec{p}'_f + \vec{p}_e$$

e separando le componenti:

$$\frac{h\nu}{c} = \frac{h\nu'}{c} \cos \theta + p \cos \phi$$

$$\frac{h\nu'}{c} \sin \theta = p \sin \phi$$

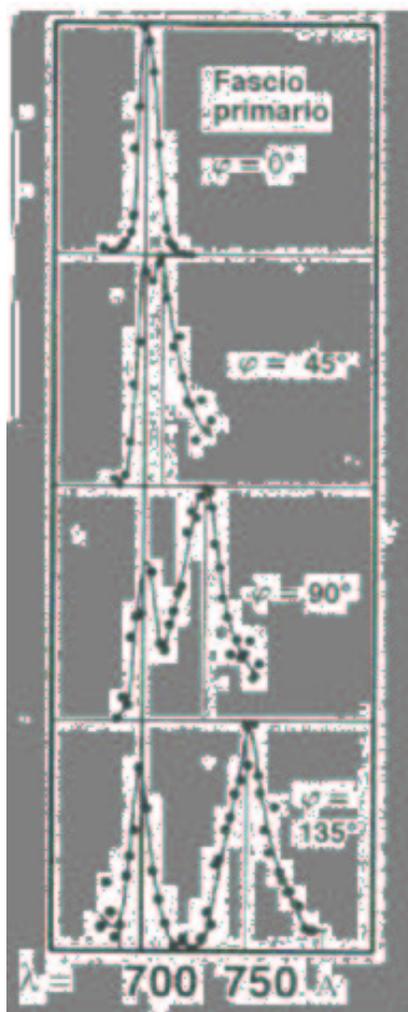


Figura 4.1: Dai diagrammi originali di Compton, pubblicati su Physical Review del 1923

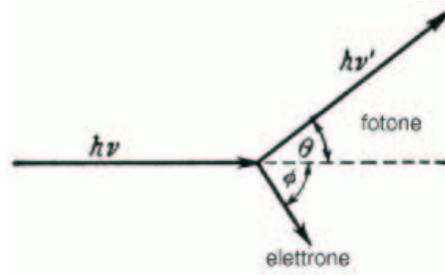


Figura 4.2: Interazione tra fotone ed elettrone

dove θ è l'angolo tra la direzione incidente e quella uscente del fotone, mentre ϕ è l'angolo tra la direzione incidente del fotone e quella uscente dell'elettrone. Quindi, riscrivendo le relazioni

$$\frac{h\nu}{c} - \frac{h\nu'}{c} \cos \theta = p \cos \phi$$

$$\frac{h\nu'}{c} \sin \theta = p \sin \phi$$

e quadrando e sommando in modo da eliminare l'angolo ϕ il principio di conservazione di quantità di moto porta alla seguente relazione:

$$p^2 c^2 = (h\nu)^2 + (h\nu')^2 - 2(h\nu)(h\nu') \cos \theta \quad (4.2)$$

ora possiamo applicare il principio di conservazione dell'energia, cioè:

$$E_f + E_e = E'_f + E'_e$$

$$h\nu + m_e c^2 = h\nu' + E_k + m_e c^2$$

cioè l'elettrone è a riposo prima dell'interazione, mentre dopo ha anche energia cinetica. Da questa equazione si ottiene

$$E'_k = h(\nu - \nu')$$

ed in particolare l'energia totale dell'elettrone vale

$$(E_e)^2 = (E'_k + m_e c^2)^2$$

$$(E_e)^2 = (E'_k + m_e c^2)^2 = (h(\nu - \nu') + m_e c^2)^2 \quad (4.3)$$

Ora, in riferimento all'equazione 10.9 ($(E_e)^2 = p^2 c^2 + m_e^2 c^4$), ed usando la 4.2 risulta:

$$p^2 c^2 = E_e^2 - m_e^2 c^4$$

E sostituendo il valore di E_e come dato dalla 4.3:

$$p^2 c^2 = (h(\nu - \nu') + m_e c^2)^2 - m_e^2 c^4$$

$$p^2 c^2 = (h^2(\nu - \nu')^2 + 2h(\nu - \nu')m_e c^2 + m_e^2 c^4) - m_e^2 c^4$$

$$p^2 c^2 = h^2(\nu - \nu')^2 + 2h(\nu - \nu')m_e c^2$$

ed ora, usando la 4.2,

$$(h\nu)^2 + (h\nu')^2 - 2(h\nu)(h\nu') \cos \theta = h^2(\nu - \nu')^2 + 2h(\nu - \nu')m_e c^2$$

da cui

$$2m_e c^2(h\nu - h\nu') = 2(h\nu)(h\nu')(1 - \cos \theta) \quad (4.4)$$

ma ricordando che $\nu = c/\lambda$, otteniamo

$$\boxed{\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos \theta)} \quad (4.5)$$

che è l'equazione di Compton che lega la lunghezza d'onda all'angolo di dispersione θ .

La quantità

$$\lambda_c = \frac{h}{m_e c} = 2.43 \cdot 10^{-12} m$$

è chiamata lunghezza d'onda di Compton.

**NOTA:**

Perché abbiamo una struttura fissa ed una che si muove? è legato al fatto che i fotoni colpiscono sia elettroni che protoni, ma i protoni sono circa 2000 volte più pesanti degli elettroni, per cui il loro spostamento è irrilevante.

**ESERCIZIO:**

Qual'è l'energia di un fotone la cui quantità di moto è uguale a quella di un elettrone la cui energia cinetica è 3 MeV.

$$E^2 = p_e^2 c^2 + m_e^2 c^4$$

ma vale anche

$$E = E_k + m_e c^2 = 3 \text{ MeV} + 0.51 \text{ MeV}$$

dove $0.51 \text{ MeV} = 9.1 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \cdot (3 \cdot 10^8)^2 \cdot 1.6 \cdot 1.6 \cdot 10^{-19}$ quindi

$$p_e c = 3.47 \text{ MeV}$$

questa è la quantità di moto del fotone

$$p_f = \frac{3.47 \text{ MeV}}{c}$$

da cui

$$E = pc = 3.47 \text{ MeV}$$



**NOTA:****Come si esprime la quantità di moto**

Spesso la quantità di moto viene espressa come $p = \frac{3.47 \text{ MeV}}{c}$, cioè si lascia la velocità della luce esplicita, e la si esprime come energia su c .

**ESERCIZIO:**

Un fotone con energia $E = 0.3 \text{ MeV}$ incide su un elettrone a riposo con un urto frontale (diffusione nella stessa direzione) Determinare la velocità di rinculo.

Conservazione dell'energia:

$$E + m_e c^2 = E' + \frac{m_e c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Conservazione della quantità di moto:

$$E/c + 0 = -E'/c + \frac{mv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

dove E' indica l'energia del fotone dopo l'interazione, ed il segno meno indica che il fotone è diffuso all'indietro. Sommando membro a membro, si elide il termine E' , energia del fotone diffuso, e la velocità dell'elettrone risulta

$$v = 0.65c$$

Risolto con l'equazione di Compton:

$$\lambda - \lambda' = \frac{h}{mc}(1 - \cos \theta) = \frac{2h}{mc}$$

perchè $\cos \theta = -1$

ma ora, la lunghezza d'onda iniziale è

$$\lambda = \frac{hc}{E} = 4.13 \cdot 10^{-12}$$

per cui

$$\lambda' = \lambda + \frac{2h}{mc} = 9.0 \cdot 10^{-12} m$$

Per cui l'energia del fotone di rinculo è

$$E' = \frac{hc}{\lambda'} = 0.128 MeV$$

e si può calcolare la velocità dall'equazione della conservazione dell'energia e del momento.

◇◇◇



ESERCIZIO:

In un esperimento Compton, l'elettrone diffuso ha $E_k = 100 KeV$, ed è stato colpito da un fotone con energia $E_x = 500 KeV$.

- Determinare λ del fotone diffuso se l'elettrone è a riposo:
Applicando il principio di conservazione dell'energia:

$$E_x + m_e c^2 = E'_x + E_k + m_e c^2$$

da cui

$$E'_x = 500 - 100 = 400 KeV$$

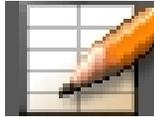
e

$$\lambda = \frac{hc}{E_x} = 2.48 \cdot 10^{-12} m$$

$$\lambda' = \frac{hc}{E'_x} = 3.1 \cdot 10^{-12} m$$

- Determinare l'angolo di diffusione del fotone.
Con la relazione di Compton $\cos \theta = \frac{mc}{h}(\lambda' - \lambda) + 1 \rightarrow \theta = 42^\circ$

◇◇◇

**ESERCIZIO: 40.59**

Fenomeno di retrodiffusione (urto frontale, $\theta = 180^\circ$), e si ha $E'_f = 0.5E_f$, quanto vale l'energia del fotone incidente?

Dalla relazione di Compton $\lambda' - \lambda = \frac{h}{mc}(1 - \cos \theta)$ sapendo che $E = \frac{hc}{\lambda}$, allora

$$\frac{hc}{E'} - \frac{hc}{E} = \frac{2h}{mc} \rightarrow E = \frac{1}{2}mc^2 = 0.25MeV$$

◇◇◇

**ESERCIZIO: 40.68**

Energia di rinculo dell'elettrone di Compton in funzione dell'angolo di diffusione.

◇◇◇

4.3 Fotoni e gravità

9/5/2003

Vediamo un'altra interessante verifica della natura corpuscolare dei fotoni², ovvero come risentono della forza di gravità



Fotoni e gravità

La velocità di un fotone, il quanto della radiazione elettromagnetica, nel vuoto è la costante $c = 2.998 \cdot 10^8 m/s$. Nella descrizione della dinamica relativistica, l'energia e la quantità di moto di una particella sono legate tra loro dalle relazioni:

²LEZIONE MANCANTE: oltre a questo argomento sono stati svolti degli esercizi

$$E = mc^2 = m_0\gamma c^2 = \sqrt{p^2c^2 + m_0^2c^4}$$

Il fotone non ha massa a riposo tuttavia l'energia e l'impulso di un fotone sono descritti dalla relazione:

$$E = h\nu = pc$$

e la sua massa relativistica è $m = E/c^2 = h\nu/c^2$. Ci si può domandare se la massa relativistica e la massa gravitazionale abbiano lo stesso significato e costruire un esperimento che ne metta in evidenza gli effetti. Supponiamo di inviare a terra da un'altezza d un fotone di frequenza caratteristica ν . Al suo arrivo a terra, l'energia del fotone è aumentata di una quantità pari a mgd che, nella nostra ipotesi, diventa $(h\nu/c^2)gd$.

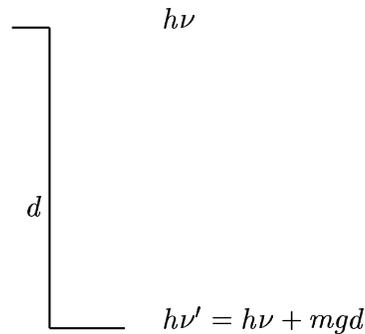


Figura 4.3: Un fotone in “caduta libera”

L'energia del fotone a terra sarà dunque:

$$h\nu' = h\nu + mgd = h\nu\left(1 + \frac{m}{h\nu}gd\right) = h\nu\left(1 + \frac{gd}{c^2}\right)$$

ricordando infatti che $E = h\nu = mc^2$. La frequenza dunque è variata di una quantità che si può esprimere in percentuale come:

$$\frac{\nu' - \nu}{\nu} = \frac{gd}{c^2} \quad (4.6)$$

Pound e Rebka³ nel 1959 riuscirono a mettere in evidenza questo fenomeno ad Harvard, alla torre dell'Università, dove $d \approx 22.6m$ solamente e la variazione

³Physical Review Letters, Vol. 4, Num. 7, (1960), pp.337-341

$\frac{\nu' - \nu}{\nu} \approx 2.4 \cdot 10^{-15}$. In questo caso furono utilizzati fotoni da 14.4 KeV di energia, ottenuti da un processo di disintegrazione radioattiva del cobalto $^{57}\text{Co} \rightarrow ^{57}\text{Fe}$. Questo effetto risulta però ancora più interessante se si considera la luce emessa dalla superficie di una stella di massa M_s e raggio R_s , molto più grandi delle rispettive grandezze caratteristiche della Terra.

Sulla superficie della stella, al momento dell'emissione, il fotone ha un'energia potenziale gravitazionale $E_G = -GM_S/(R_S c^2)$ e quando il fotone viene osservato sulla terra, a distanza molto grande rispetto a R_S , la sua energia sarà:

$$h\nu' = h\nu \left(1 - \frac{GM_S}{R_S \cdot c^2} \right)$$

e quindi la frequenza sarà diminuita. Questo fenomeno è detto “red-shift” gravitazionale.



Capitolo 5

La struttura atomica

14/5/2003

Nel periodo in cui Planck formulava la sua ipotesi quantistica, cercando di spiegare lo spettro di emissione del corpo nero vi erano altri fenomeni la cui spiegazione non era chiara. Gli spettri di emissione dei gas, ad esempio, presentavano delle righe, erano cioè discontinui, e pur essendovi molti dati sugli studi di questo fenomeno, non era presente una teoria che lo spiegasse.

Anche per quel che riguarda la struttura dell'atomo le cose non erano molto chiare: era stato scoperto l'elettrone da Thomson, per cui era evidente che l'atomo aveva a sua volta una struttura interna, ma non si sapeva quale fosse.

Il modello più in voga era quello di Thomson chiamato a plum-pudding, cioè supponeva che gli elettroni fossero distribuiti come l'uvetta in una torta, e fossero statici. Questo modello era in realtà diffuso in quanto non c'era nessuna proposta migliore.

5.1 L'esperimento di Rutherford

Allo scopo di chiarire la struttura atomica, Rutherford progettò un esperimento di diffusione: un bersaglio viene colpito da particelle monocromatiche α , cioè 2 protoni e 2 neutroni — un nucleo di He doppiamente ionizzato, che sono molto più pesanti degli elettroni. Il bersaglio è costituito da foglie sottili d'oro: lo scopo dell'esperimento è quello di studiare gli angoli di diffusione: si nota che la maggior parte delle particelle è deviata di un piccolo angolo, ma alcune sono deviate ad angoli maggiori, ed alcune addirittura retrodiffuse.

Questo dato metterà in crisi il modello di Thomson in cui le particelle α dovrebbero essere deviate di poco, e comunque mai retrodiffuse: essendo infatti queste molto più pesanti degli elettroni, se nell'atomo non vi fosse altro, non potrebbero essere deviate ad angoli grandi.

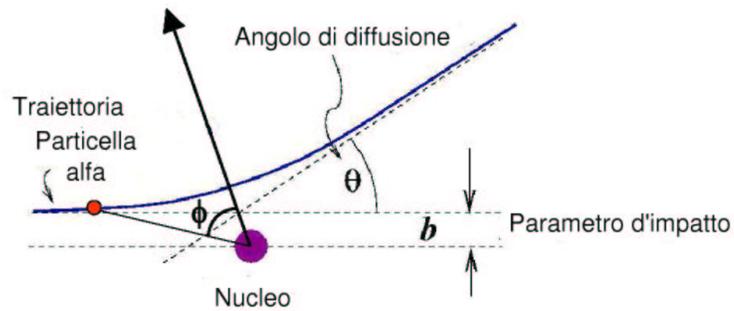


Figura 5.1: Angolo di diffusione nell'esperimento Rutherford

I dati sperimentali si possono però spiegare, in maniera classica¹, supponendo che esista un nucleo massivo carico positivamente: supponiamo che la **carica positiva sia concentrata in un piccolo spazio**: in questo caso il nucleo è molto più pesante della particella α e lo si può considerare fermo nell'urto: abbiamo cioè un **campo di forza centrale** del tipo:

$$F_c = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2Ze^2}{r^2} \quad (5.1)$$

con Z il numero atomico.

Calcoliamo l'angolo di deviazione θ delle particelle: con riferimento alla figura 5.1, ϕ è l'angolo che individua la posizione della particella, l'asse y è scelto in modo tale che l'iperbole percorsa dalla particella sia simmetrica rispetto ad esso.

La quantità di moto si conserva in modulo: varia la direzione, in particolare

$$\Delta p = 2mv \sin \frac{\theta}{2}$$

ma vale anche

$$\Delta p = \int F dt$$

a noi interessa la componente della forza lungo l'asse y , cioè

$$F_c = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2Ze^2}{r^2}$$

¹Vedi dispense: ``Sulla diffusione di Rutherford``

Quindi

$$\Delta p = \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2Ze^2}{r^2} \cos \phi dt$$

ora scriviamo

$$dt = d\phi \frac{dt}{d\phi} = \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^{-1} d\phi$$

e dobbiamo calcolare $\left(\frac{d\phi}{dt} \right)^{-1}$. Sappiamo che in un campo di forze centrali, il **momento della quantità di moto si conserva**, per cui

$$L = I\omega$$

$$m vb = mr^2 \omega$$

infatti vale $I = mr^2$, dunque

$$m vb = m(\omega r)r = m \frac{d\phi}{dt} r^2$$

cioè

$$\left(\frac{d\phi}{dt} \right)^{-1} = \frac{r^2}{vb}$$

sostituendo questo nell'integrale che stavamo calcolando

$$\Delta p = \int_{-\frac{\pi-\theta}{2}}^{\frac{\pi-\theta}{2}} F dt$$

risulta:

$$\boxed{\cot g \frac{\theta}{2} = \frac{2\pi\epsilon_0}{Ze^2} m v^2 b} \quad (5.2)$$

o anche

$$\boxed{b = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 E_{k\alpha}} \cot g \frac{\theta}{2}} \quad (5.3)$$

Dove b è la distanza tra la traiettoria della particella e il nucleo: minore è b , maggiore è θ , angolo di diffusione, cioè $\theta > \theta_0 \rightarrow b < b_0$.

Risulta interessante esprimere il numero di particelle diffuse rispetto l'angolo di diffusione: vale

$$f = nt\pi b^2$$

dove: f è la frazione di particelle diffuse, n è il numero di atomi per unità di volume, e t è lo spessore della lamina e πb^2 è l'area del foglio. Differenziando:

$$df/db = nt\pi 2b$$

Differenziando la 5.2 rispetto a θ e a b , di ha

$$\frac{df}{d \cos \theta} = \frac{4\pi nt Z^2 e^4}{(8\pi\epsilon_0)^2 E_k^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \quad (5.4)$$

che descrive la frazione di particelle diffuse ad un angolo θ rispetto la direzione di incidenza.

La formula si può anche scrivere come segue:

$$\frac{df}{d \cos \theta} = \frac{df}{\sin \theta d\theta} = \frac{df}{2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} d\theta}$$

da cui

$$\frac{df}{d\theta} \propto \frac{\cos \frac{\theta}{2}}{\sin^3 \frac{\theta}{2}}$$

5.1.1 Il modello di Thomson

Queste relazioni sono concordi con i dati sperimentali rilevati da Rutherford e collaboratori nell'esperimento di diffusione: il modello di Thomson dava invece delle previsioni completamente diverse, ed in particolare le deviazioni massime previste sono dell'ordine di qualche milliradiante.



Sulla diffusione nel modello atomico di Thomson

Il modello di Thomson, conosciuto come plum pudding, descrive la struttura atomica come una distribuzione uniforme di carica positiva nel volume occupato dall'atomo, con gli elettroni come cariche elettriche puntiformi distribuite casualmente

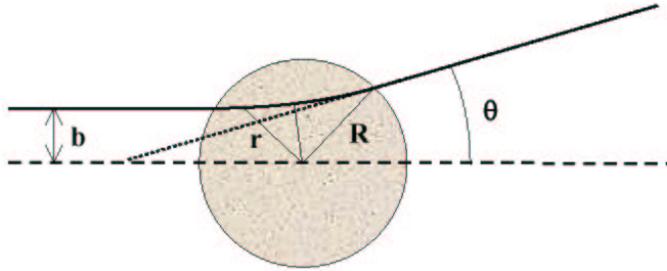


Figura 5.2: Angolo di diffusione nel Modello di Thomson

nel volume. La diffusione di particelle che attraversano una struttura di questo tipo è caratterizzata da valori piccoli degli angoli di diffusione. La massa degli elettroni è talmente ridotta rispetto alla massa delle particelle o rispetto all'atomo, da non portare contributi significativi nelle considerazioni che seguono.

Le particelle che attraversano una regione di carica positiva diffusa di raggio R , subiscono una variazione di quantità di moto nella direzione trasversa rispetto alla direzione di incidenza

$$\Delta p_y \approx \int F_y dt$$

dove

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2Ze^2}{R^3} r = 2kr$$

e

$$F_y = Fb/r$$

In questa espressione $2e$ rappresenta la carica elettrica della particella, Ze la carica del nucleo ed R la dimensione dell'atomo. Detto T l'intervallo di tempo in cui la particella incidente attraversa l'atomo, si ottiene una variazione di quantità di moto pari a:

$$\Delta p_y \approx 2kbT \approx 2kb2(R^2 - b^2)^{1/2}/v$$

L'angolo di diffusione è dunque legato al parametro d'impatto b dalla relazione:

$$\tan \theta \approx \theta \approx \Delta p_y/p \approx 2kb2(R^2 - b^2)^{1/2}/mv^2$$

L'angolo di diffusione è nullo sia per $b = 0$ che per $b = R$, cioè al di là del confine della regione atomica. In questo modello, con $R = 0.1nm$ la deflessione media,

calcolata per $b = R/2$, in una singola collisione di particelle α da 5 MeV diffuse da un bersaglio d oro ($Z=79$) è:

$$\theta \approx kR^2 3^{1/2} / 2E_k \approx 2 \cdot 10^{-4} rad$$

Il valore massimo della deflessione in una singola collisione si ottiene per $b = R/3^{1/2}$ e vale $\theta_{max} \approx 2.2 \cdot 10^{-4} rad$.



NOTA:

Abbiamo un percorso tipico di molte altre situazioni: c'è un fenomeno da spiegare, viene proposto un modello, dal modello si traggono delle previsioni che si verificano sperimentalmente: se queste sono corrette, il modello viene accettato, almeno fino a quando non si presentano dati contrastanti con esso.

Un esperimento con dati contrastanti con la teoria può indicare che la teoria è errata, o che è valida solo in un determinato ambito.

5.1.2 Diametri nucleari

Lo scopo dell'esperienza di Rutherford era quello di ottenere delle informazioni sulla struttura interna dell'atomo: con i dati raccolti ed il modello a nucleo massivo, si possono ottenere delle informazioni relative alle dimensioni che questo nucleo deve avere: in caso di retrodiffusione si può scrivere:

$$E_k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2Ze^2}{R} \quad (5.5)$$

da cui ricavare R:

$$R = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2Ze^2}{E_k} \quad (5.6)$$

e si può ottenere così un limite superiore al diametro del nucleo in $10^{-14} m$. C'è una semplice formula empirica per ottenere il diametro dell'atomo:

$$\boxed{R = R_0 A^{\frac{1}{3}}} \quad \boxed{R_0 = 1.37 \cdot 10^{-15} m} \quad (5.7)$$

Vediamo in maniera intuitiva il perchè di questa relazione: rappresentiamo queste strutture come oggetti ideali, punti o sfere, anche se in realtà questa è solo una approssimazione, un nostro modello.

I nucleoni (N) costituiti da neutroni (n) e protoni (p) hanno una certa struttura ed una densità di carica elettrica descritta da:

$$\rho(r, R) = \rho_0 \frac{e^{-r/R}}{R}$$

dove \mathbf{r} è la distanza dal centro di simmetria del sistema, e \mathbf{R} si può interpretare come raggio del nucleone.

Se immaginiamo il nucleone come una sfera, vale

$$V_n = \frac{4}{3} \pi R^3$$

mentre il volume del nucleo si può scrivere come

$$V = \frac{4}{3} \pi r^3$$

A questo punto il numero di nucleoni presenti sarà:

$$A = \frac{V}{V_n} \propto r^3$$

da cui si vede la proporzionalità

$$r \propto A^{\frac{1}{3}}$$

Questo discorso vale ovviamente con tutte le ipotesi semplificative fatte: è un modello (nucleoni come sfere, che però occupano tutto lo spazio) che ci consente di ottenere una comoda relazione.

Notiamo che, variando il raggio del nucleo con la radice cubica del numero di massa atomica, il raggio nucleare ha un limitato intervallo di variazione per i vari elementi.

**NOTA:**

Spesso si tende a visualizzare un modello in termini di oggetti/esperienze quotidiani: un tale paragone può essere utile, portarci a capire il modello, bisogna comunque sempre ricordare che si tratta solo di un paragone, e di usarlo solo lo stretto necessario abbandonandolo non appena ci può portare fuori strada.

5.2 Spettri atomici

Abbiamo detto che un altro fenomeno molto studiato erano gli spettri atomici, ottenuti con tubi a scarica contenenti gas rarefatti. Fraunhofer si dedicò molto a questo tipo di esperimenti: ciascun gas è caratterizzato da un particolare tipo di spettro: per l'idrogeno si individuaronò 4 righe caratteristiche, descritte da varie formule empiriche: una formula che dava ottime previsioni era quella di Rydberg:

$$\frac{1}{\lambda} = R_x \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{j^2} \right) \quad (5.8)$$

Abbiamo quindi

- un nucleo concentrato in una piccola zona
- uno spettro NON continuo descritto da regole empiriche

e bisogna spiegare questi fenomeni.

5.3 Il modello di Bohr

Bohr presenta nel 1913 un modello, limitato all'atomo di idrogeno, e in realtà non molto ben capito per parecchi anni.

Ipotizza un nucleo con un elettrone che orbita attorno ad esso.

La situazione può essere descritta classicamente:

$$E = \frac{1}{2}U$$

$$E = E_k + U$$

$$E_k = E - U = -\frac{1}{2}U$$

quindi

$$E_k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{2r}$$

Dal punto di vista classico, però, se una carica si muove di moto accelerato, la carica emette radiazioni elettromagnetiche, quindi energia, per cui il sistema degrada. Bohr ipotizzò che

- gli elettroni occupano delle orbite precise, stazionarie, in cui non emettono
- emissione ed assorbimento sono connessi al passaggio tra 2 orbite
- le orbite permesse sono tali per cui i **momenti della quantità di moto** sono

$$L = n \frac{h}{2\pi}$$

dimensionalmente questa relazione è corretta: l'idea guida di questa ipotesi è che, ipotizzando la presenza di un qualche fenomeno quantistico nell'atomo, ne consegue che probabilmente vi è una relazione in cui compare la costante h , che come abbiamo visto compare sempre nei fenomeni di questo tipo.

Da considerazioni puramente dimensionali, sappiamo che l'unità di misura di h è il $[Js]$, che dimensionalmente si può vedere come un momento di quantità di moto, infatti:

$$[J \cdot s] = [kg \cdot \frac{m^2}{s^2} s] = [kg \frac{m}{s}]$$

Quindi, dal punto di vista dimensionale, è plausibile che il momento della quantità di moto di possa scrivere in funzione di h con la relazione:

$$L = mvr = n \frac{h}{2\pi}$$

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{L^2}{2mr^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r} \right)$$

da cui

$$\frac{n^2 h^2}{4\pi^2 2mr^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r} \right)$$

e infine

$$\boxed{r_n = \frac{\epsilon_0 \hbar^2}{\pi m e^2} n^2} \quad \boxed{r_1 = 5.29 \cdot 10^{-11} \text{ m}} \quad (5.9)$$

che è la relazione che consente di calcolare i raggi delle orbite degli elettroni: r_1 è detto raggio di Bohr.

Analogamente l'energia associata ad ogni orbita è:

$$E_n = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r_n}$$

da cui

$$\boxed{E_n = \left(\frac{m e^4}{8 \epsilon_0^2 \hbar^2} \right) \frac{1}{n^2} = -13.6 \text{ eV} \cdot \frac{1}{n^2}} \quad (5.10)$$

Quindi gli elettroni occupano precise orbite con precise energie.

5.3.1 Le transizioni

Vediamo ora cosa succede durante le transizioni:

$$h\nu = \frac{hc}{\lambda} = -(E_n - E_j)$$

da cui

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{m e^4}{8 \epsilon_0 \hbar^3 c} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{j^2} \right)$$

che è la relazione di Rydberg, con

$$R_H = 1.097 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}$$

Questo è stata una grossa conferma del modello di Bohr, in quanto si adattava bene ai dati sperimentali acquisiti relativamente agli spettri di emissione: il modello di Bohr ha comunque vari problemi: ad esempio, perchè le orbite sono circolari?

5.4 Il punto della situazione

Le relazioni di Bohr che abbiamo visto fin'ora, relativamente alla descrizione della struttura dell'atomo, sono:

$$r_n = \frac{\epsilon_0 h^2}{\pi m e^2} n^2 \quad (5.11)$$

$$E_n = -\frac{m e^4}{8 \epsilon_0^2 h^2} \frac{1}{n^2} \quad (5.12)$$

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{m e^4}{8 \epsilon_0^2 h^3 c} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{j^2} \right) \quad (5.13)$$

**ESERCIZIO: 41.9**

Quale può essere la velocità di un elettrone in orbita?

$$E = -13.6 \text{ eV} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{2} U$$

$$E_k = -\frac{1}{2} U$$

$$v = \sqrt{2E_k/m}$$

$$v_{n=1} = 2.2 \cdot 10^7 \text{ m/s}$$

◇◇◇

**ESERCIZIO: 41.10**

Quante rivoluzioni compie un elettrone eccitato ($n=2$) in un atomo di H? La vita media dell'eccitazione è $\tau = 10 \text{ ns}$.

**NOTA:**

Vita media Il numero di elettroni che permane nello stato eccitato è statisticamente descritto nel tempo da

$$N(t) = N_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

La grandezza τ è definita **vita media**

$$r_2 = a_0 2^2$$

usando la formula già trovata:

$$v_{n=2} = 1.1 \cdot 10^6$$

il numero di orbite sarà dunque:

$$o = \frac{v_{n=2} \tau}{2\pi r_2} = 8.2 \cdot 10^6$$

**NOTA:**

Natura ondulatoria della materia Il fatto che l'elettrone ha alcuni stati possibili è l'analogo degli stati stazionari dei fenomeni ondulatori. Questo ha senso se associamo all'elettrone una natura ondulatoria, come al fotone.

Questo vuol dire che le circonferenze delle orbite permesse sono quelle con lunghezza multipla di λ , cioè tali da consentire l'esistenza di onde stazionarie.

Questa idea sulla natura ondulatoria della materia era stata introdotta da Bohr, anche se lui non se ne rese conto.

**ESERCIZIO:**

Date delle particelle α , con $E_k = 4.77\text{MeV}$, si calcoli la distanza minima di avvicinamento ad un nucleo di Pb con $Z = 82$. A questa distanza, le particelle penetrano nel nucleo?

16/5/2003

$$E_k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze \cdot 2e}{R}$$

dove Ze è la carica del protone e $2e$ è la carica della particella α .

**NOTA:**

La distanza di minimo avvicinamento si ha nell'ipotesi di un urto frontale: la particella α ha una certa energia cinetica iniziale: si avvicina al nucleo fino a fermarsi e a tornare indietro: quando si ferma (è la distanza minima), l'energia cinetica è diventata energia potenziale, da cui la relazione scritta.

quindi:

$$R = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2Ze^2}{E_k} = 4.47 \cdot 10^{-14} m$$

i diametri dei nuclei atomici sono:

$$R = R_0 A^{1/3} = 8.1 \cdot 10^{-15}$$

con $A = 207$. La particella dunque non penetra nel nucleo.

Per essere corretti bisognerebbe verificare di non essere in condizioni relativistiche: bisogna cioè calcolare la velocità della particella.

**ESERCIZIO: 41.7**

Si consideri una particella α con $E_k = 4.77\text{MeV}$ incidente su un bersaglio di Litio (Li, $Z=3, A=6.94$).

Ipotesi: nell'urto l'atomo di Litio si considera fermo!

Si procede come prima:

$$R = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2Ze^2}{E_k} = 1.8 \cdot 10^{-15} m$$

e

$$R_{Li} = 2.6 \cdot 10^{-15}$$

C'è un problema: la particella sembra penetrare nel nucleo, per cui abbiamo sbagliato qualcosa nel nostro modello: l'ipotesi errata è di pensare l'atomo di Li fermo, in quanto la sua massa è confrontabile con quella della particella α .

◇◇◇



ESERCIZIO: 41.25

Quanto deve valere l'energia di una particella α perché la distanza minima di avvicinamento ad un nucleo di Al coincida con la somma dei raggi nucleari?

$$Al \rightarrow Z = 13, A = 26.98, R_{Al} = 4.11 \cdot 10^{-15}$$

$$He \rightarrow Z = 2, A = 4, R_{He} = 2.17 \cdot 10^{-15}$$

quindi

$$d = 6.28 \cdot 10^{-15} m$$

l'energia cinetica corrispondente è

$$E_k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2Ze^2}{d^2} = 50 MeV$$

◇◇◇

5.5 Esperienza di Franck-Hertz

L'esperienza consiste nell'applicare una differenza di potenziale tra due elettrodi applicati alle estremità di un tubo a vuoto in cui sono presenti vapori di mercurio (1/1000 di atmosfera).

Studiando l'andamento tensione/corrente si nota un grafico "strano" (vedi fig 5.3). Inoltre si nota emissione elettromagnetica.

Gli elettroni sono accelerati, colpiscono gli atomi di Hg, eccitandoli, e nello stesso tempo fermandosi, dopo l'urto sono di nuovo accelerati, fino a raggiungere l'energia sufficiente ad eccitare un altro atomo di Hg: in questo urto vale la relazione

$$\frac{hc}{\lambda} = eV$$

dove eV è l'energia dell'elettrone incidente, mentre

$$\frac{hc}{\lambda}$$

è il quanto di energia emesso dalla diseccitazione dell'Hg.

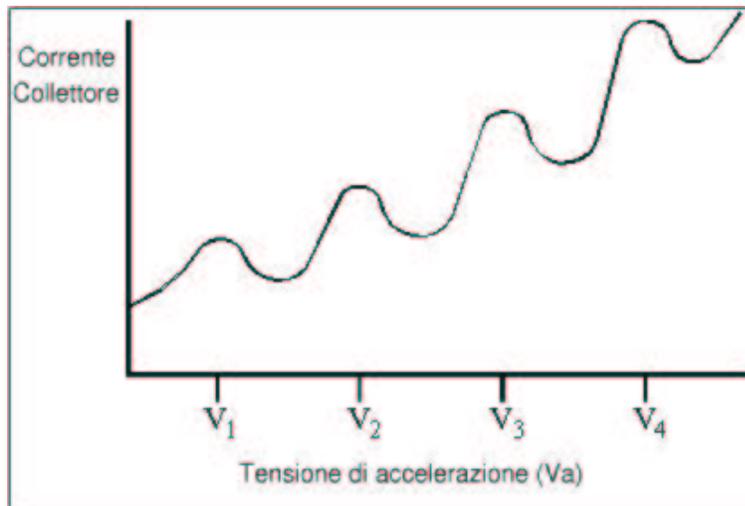


Figura 5.3: Andamento V/i nell'esperimento di Franck-Hertz

**ESERCIZIO: 41.38**

Il primo massimo, nel grafico dell'esperienza di Franck-Hertz, sia ha per $V = 4.88V$. Quanto vale λ della luce emessa?

$$\frac{hc}{\lambda} = eV = 4.88eV = 4.88 \cdot 1.6 \cdot 10^{-19} J$$

da cui

$$\lambda = 254nm$$

◇◇◇

**ESERCIZIO:**

Si calcoli l'energia di 3^a ionizzazione dell'atomo di Litio ($Z=3$) (L'energia di 3^a ionizzazione è l'energia per togliere il terzo elettrone dell'atomo, quello più interno)

Nel modello di Bohr abbiamo:

$$E_n = -\frac{me^2e^2}{8\epsilon_0^2h^2} \frac{1}{n^2}$$

dove a numeratore compaiono la carica dell'elettrone (e) e quella nel nucleo (e): nel caso dell'atomo di Litio, estendendo il modello di Bohr, la carica dell'elettrone è sempre (e), ma quella del nucleo è (Ze), quindi

$$E_n = \frac{me^2(Ze)^2}{8\epsilon_0^2h^2} \frac{1}{n^2}$$

in questo caso $n=1$. perche devo togliere 1 elettrone solo, che è l'elettrone base:

$$E_1 = 182.4eV$$

◇◇◇

**ESERCIZIO:**

Si calcoli l'energia di 1^a ionizzazione dell'atomo di Litio (Z=3) (L'energia di 1^a ionizzazione è l'energia per togliere il primo elettrone all'atomo, quello più esterno)

Proviamo ad usare il modello di Bohr per calcolare l'energia di prima ionizzazione: dobbiamo cioè estrarre l'elettrone più esterno: in questo caso l'elettrone più esterno vede una carica nucleare pari a Z=1, in quanto vi sono 2 elettroni che schermano parte della carica del nucleo. Inoltre n=2, in quanto abbiamo 3 elettroni, e 2 elettroni occupano il livello n=1, il terzo, che è il nostro, occupa il livello 2.

Con questi dati risulta:

$$E_n = 3.4eV$$

Sperimentalmente questo valore risulta però essere $E_n = 5.4eV$: questo valore si otterrebbe dal modello di Bohr, ponendo uno $Z=1.26$. Sembra cioè che l'effetto di schermo dei 2 elettroni interni sia parziale, cioè ci sono delle zone di compenetrazione tra le orbite. Il modello di Bohr ha qualcosa che non va!

**5.6 Raggi X**

22/5/2003

I Raggi X vengono prodotti da elettroni accelerati da una differenza di potenziale, e poi frenati bruscamente contro un bersaglio. C'è una relazione tra l'accelerazione dell'elettrone e la potenza liberata, data dalla **formula di Larmor**²

$$P = \frac{q^2 a^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} \quad (5.14)$$

e la lunghezza d'onda emessa in funzione del potenziale d'accelerazione è

$$\lambda >= \frac{hc}{e\Delta V} = \frac{1.24 \cdot 10^{-6} m}{eV} \quad (5.15)$$

²Vedi Lucidi

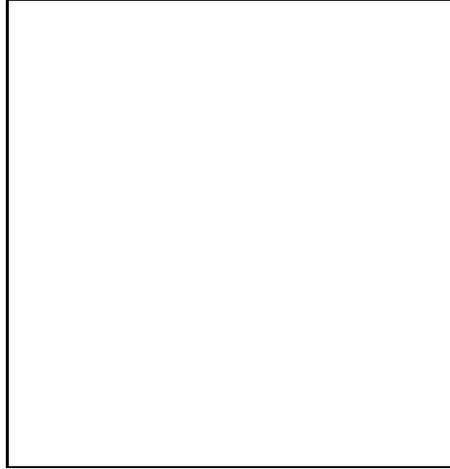


Figura 5.4: Spettro dei Raggi X

I Raggi X presentano uno spettro di emissione tipico, che varia poco da elemento ad elemento, e con due caratteristiche ben distinte:

- una componente continua
- una componente a righe

Per quel che riguarda la componente continua, si può immaginare che gli elettroni incidenti, accelerati dalla differenza di potenziale, perdano una certa energia nel loro primo impatto, contro un atomo del bersaglio, e con l'energia che gli rimane, proseguano fino all'impatto successivo. Statisticamente nei primi impatti perderanno più energia che negli ultimi, e questo dà la forma caratteristica della componente continua dello spettro, detto infatti anche *radiazione di frenamento*.

5.7 La legge di Moseley

Moseley si è dedicato allo studio degli spettri di raggi X, delle righe che essi presentano, ed in particolare ha studiato la relazione tra le righe $K\alpha$, cioè quelle righe che corrispondono a transizioni dal livello immediatamente superiore al livello fondamentale verso il livello fondamentale, indicato, con il formalismo di Bohr come transizione $n = 2 \rightarrow n = 1$, e l'elemento che costituisce il bersaglio.

Moseley osservò una relazione all'incirca quadratica tra la frequenza della riga ed il quadrato del numero di massa atomica, relazione che migliorava di molto, ponendo

in relazione la frequenza con il quadrato del numero atomico Z dell'elemento, ed infine notò una linearità ancora migliore tra frequenza e quadrato di $(Z - 1)^2$, cioè

$$\sqrt{\nu} \propto Z - 1$$

Questo percorso era puramente sperimentale, nel senso che Moseley cercò la relazione che meglio si adattava ai dati sperimentali: avendo però Bohr presentato un modello di struttura atomica, risultava interessante vedere se questo modello poteva giustificare la relazione di Moseley.

5.8 Modello a strati del nucleo

Si presenta però la necessità di estendere il modello di Bohr, nato per descrivere l'atomo di idrogeno: la cosa più semplice da fare è considerare un atomo con numero atomico maggiore di 1 come costituito da un nucleo con Z protoni, attorno al quale orbitano Z elettroni. Questi elettroni occupano orbite successive, come fossero stratificate l'una sull'altra, da cui il nome del modello "a strati": ogni guscio inoltre contiene 2 elettroni, allora, indicativamente, dei Z protoni, il nostro elettrone "vede" una carica pari a $Z - 1$, essendo una carica positiva unitaria schermata dall'elettrone suo compagno.

In questa estensione del modello di Bohr, che non va intesa troppo alla lettera, l'equazione 5.13, viene modificata considerando che l'elettrone che compie la transizione "vede" una carica $Z - 1$, come detto, per cui:

$$\frac{\nu}{c} = \frac{1}{\lambda} = \frac{m(Z - 1)^2 e^4}{8\epsilon_0 h^3 c} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{j^2} \right)$$

quindi

$$\sqrt{\nu} \propto Z - 1$$

fatto che conferma la relazione di Moseley ricavata sperimentalmente.

5.9 Emissione stimolata

Supponiamo³ di avere una transizione dallo stato energetico 1 allo stato 2: è necessaria una energia

$$h\nu = E_2 - E_1$$

³Vedi dispensa: L'emissione stimolata e la legge di Planck

Il numero di atomi che esegue questa transizione è:

$$N_{1 \rightarrow 2} = N_1 B_{12} u(\nu)$$

dove

- N_1 numero di elettroni nello stato 1
- B_{12} probabilità che avvenga una transizione dallo stato 1 allo stato 2
- $u(\nu)$ densità di energia

Analogamente per la transizione inversa abbiamo una relazione del tipo:

$$N_{2 \rightarrow 1} = N_2 A_{21} + N_2 B_{21} u(\nu)$$

dove

- N_2 numero degli elettroni nello stato 2
- A_{21} probabilità che un elettrone ritorni allo stato 1, o probabilità di diseccitazione spontanea
- $N_2 B_{21} u(\nu)$ questo è un termine introdotto da Einstein e rappresenta un contributo di **diseccitazione stimolata**



RIFLESSIONE:

In corrispondenza di A_{21} esiste anche un A_{12} , cioè vi è una probabilità non nulla di eccitazione spontanea?

Il fenomeno si verifica in presenza di un elettrone eccitato: al giungere di un fotone, l'elettrone si diseccita ed emette un fotone coerente (stessa frequenza e fase) del fotone incidente.

Per questo si parla anche di *amplificazione*, in quanto il fotone incidente esce “duplicato”

5.9.1 La legge di Planck

Vediamo ora come da queste considerazioni si possa ricavare la legge di Planck per altra via: consideriamo 2 stati i e j con

$$E_i < E_j$$

possiamo scrivere le stesse relazioni appena viste come:

Eccitazione $N_{i \rightarrow j} = N_i B_{ij} u(\nu)$

Diseccitazione $N_{j \rightarrow i} = N_j A_{ji} + N_j B_{ji} u(\nu)$

Vediamo che fissati i e j , resta fissata anche ν : ricaviamo l'espressione di $u(\nu)$. Per una **condizione di equilibrio termodinamico** deve essere

$$N_{ij} = N_{ji}$$

per cui

$$N_i B_{ij} u(\nu) = N_j A_{ji} + N_j B_{ji} u(\nu)$$

$$\frac{N_i}{N_j} \frac{B_{ij}}{B_{ji}} u(\nu) = \frac{A_{ji}}{B_{ji}} + u(\nu)$$

$$\left(\frac{N_i}{N_j} \frac{B_{ij}}{B_{ji}} - 1 \right) u(\nu) = \frac{A_{ji}}{B_{ji}}$$

Ora considerando la distribuzione statistica di Boltzmann (equipartizione dell'energia), vale:

$$N_i = e^{-\frac{E_i}{kT}}$$

$$\frac{N_i}{N_j} = e^{-\frac{E_i - E_j}{kT}}$$

quindi risulta

$$u(\nu) = \frac{A_{ji}/B_{ji}}{\frac{B_{ij}}{B_{ji}} e^{-\frac{E_i - E_j}{kT}} - 1}$$

Abbiamo quindi ritrovato l'espressione della radiazione del corpo nero di Planck, se $B_{ij} = B_{ji}$. Einstein non aveva modo di provare questa relazione, che comunque dimostreremo essere vera.

5.10 Maser e Laser

Maser e Laser sono 2 acronimi per **M**icrovave/**L**ight **A**mplification by **S**timulated **E**mission of **R**adiation.

Parlando di microonde ci riferiamo a $\lambda = 10^{-2}m$, $\nu = 10^{10}Hz$.

L'idea di base dei Maser/Laser è quella di costruire un dispositivo che porti la maggior parte degli atomi in uno stato eccitato, in modo da provocare poi una emissione stimolata di fotoni coerenti.

Il primo Maser fu realizzato nel 1954, usando la molecola di ammoniaca (NH_3): questa molecola si può trovare in 2 diverse configurazioni, la cui differenza di energia è corrispondente a circa $24 \cdot 10^9 Hz$.

La molecola è costituita da un tetraedro, in cui l'azoto occupa uno dei vertici: le due configurazioni corrispondono alle 2 diverse posizioni dell'Azoto rispetto ai 3 atomi di H: queste 2 configurazioni⁴ hanno un momento di dipolo diverso, per cui, con un opportuna configurazione di campo magnetico è possibile separare le 2 molecole, tenendo solo quelle corrispondenti ad un livello energetico alto.

Una volta separate, le molecole vengono immerse in una cavità risonante a 24 GHz, in cui le molecole si diseccitano e generano un fascio coerente.

Quest'idea di base è applicata anche per i Laser: uno dei primi tipi è stato il laser a Rubino (Ossido di Alluminio, Al_2O_3).

23/5/2003



ESERCIZIO:

Si determini la correzione alla lunghezza d'onda di un fotone emesso da un atomo di H quando si considera anche l'energia cinetica di rinculo dell'atomo.

Applichiamo il **Principio di conservazione dell'energia**:

$$E_{iniziale} = E_{finale} + E_{fotone} + E_k$$

$$\frac{E_{iniziale} - E_{finale}}{hc} - \frac{E_{fotone}}{hc} = \frac{E_k}{hc}$$

$$\frac{1}{\lambda_o} - \frac{1}{\lambda} = \frac{E_k}{hc} \quad (5.16)$$

⁴Vedi lucidi

Indichiamo con λ la lunghezza d'onda del fotone, mentre λ_o è la lunghezza d'onda del fotone se si ignora l'energia cinetica di rinculo dell'atomo.

Il nostro scopo è trovare di quanto differiscono queste 2 quantità.

Applichiamo ora il **principio di conservazione della quantità di moto** per calcolare l'espressione dell'energia cinetica, ricordando che $E^2 = m^2c^4 + p^2c^2$, per un fotone $p = E/c$, quindi

$$p_{\text{fotone}} = p_{\text{atomo}}$$

$$h\nu/c = \sqrt{2ME_k}$$

infatti $E_k = \frac{p^2}{2M}$, quindi

$$h/\lambda = \sqrt{2ME_k}$$

da cui

$$E_k = \frac{h^2}{2M\lambda^2}$$

sostituendo nella 5.16, viene:

$$\frac{\lambda - \lambda_o}{\lambda_o\lambda} = \frac{h^2}{2M\lambda^2} \frac{1}{hc} = \frac{h}{2M\lambda^2c}$$

$$\frac{\lambda - \lambda_o}{\lambda_o} = \frac{h}{2Mc} \frac{1}{\lambda}$$

$$\frac{\lambda - \lambda_o}{\lambda_o} = 6.6 \cdot 10^{-16} \frac{1}{\lambda}$$

Si può scrivere anche

$$\frac{h}{2Mc} \frac{1}{\lambda} = \frac{hc}{2Mc^2} \frac{1}{\lambda} = 939MeV \frac{1}{\lambda}$$

dove Mc^2 è l'energia a riposo dell'atomo.

Indicativamente, per $\lambda = 100nm$, abbiamo una differenza di lunghezza d'onda di 1 parte su 10^8 , cosa che ci fa considerare lecito ignorare l'energia cinetica di rinculo dell'atomo.

◇◇◇



ESERCIZIO: Il principio di corrispondenza

Il principio di corrispondenza asserisce che il passaggio tra fenomeno quantistico e classico è graduale. Si mostri che per un atomo di H nel caso in cui $n \gg 1$, l'energia emessa nella transizione $n \rightarrow n - 1$ corrisponde alla frequenza di rotazione.

L'energia cinetica dell'elettrone vale

$$E_k = -U = \frac{me^4}{8\epsilon_0^2 h^2} \frac{1}{n^2}$$

da cui

$$v_n = \frac{e^2}{2\epsilon_0 h n}$$

quindi la frequenza di rotazione dell'elettrone è:

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{v_n}{2\pi r}$$

D'altro canto la frequenza del fotone emesso è:

$$\nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{me^4}{8\epsilon_0^2 h^2} \left(\frac{1}{(n-1)^2} - \frac{1}{n^2} \right)$$

$$\nu = \frac{me^4}{8\epsilon_0^2 h^2} \left(\frac{2n-1}{n^2(n-1)^2} \right)$$

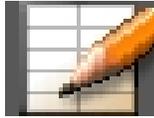
ma per ipotesi $n \gg 1$, per cui

$$\nu = \frac{me^4}{8\epsilon_0^2 h^2} \left(\frac{2n}{n^4} \right)$$

$$\nu = \frac{me^4}{4\epsilon_0^2 h^2} \frac{1}{n^3}$$

Quindi la frequenza di rotazione è uguale alla frequenza del fotone emesso.

◇◇◇

**ESERCIZIO: Limiti del modello di Bohr**

Consideriamo un atomo di oro che emette radiazioni nella riga $K\alpha$: cioè la transizione dal livello immediatamente superiore al fondamentale verso il fondamentale (da $n=2$ a $n=1$).

$$Z = 79$$

$$\Delta E = \frac{me^4(Z-1)^2}{8\epsilon_0^2 h^2} (1 - 1/4) = 62.06 \text{ keV}$$

Misurata sperimentalmente la lunghezza d'onda risulta $\lambda = 18.5 \text{ pm}$, da cui risulta

$$\Delta E = \frac{hc}{\lambda} = 67.0 \text{ keV}$$

◇◇◇

La regola di Moseley funziona per atomi con piccolo numero atomico, vediamo ad esempio qual'è la differenza tra i valori previsti dal modello di Bohr e le rilevazioni sperimentali per una transizione $K\alpha$ di alcuni elementi:

Elemento	Z	Bohr	Sperimentale
Calcio	20	3.68keV	3.69keV
Zirconio	40	15.5keV	15.8keV
Mercurio	80	63.6keV	70.8keV

**ESERCIZIO: Produzione di Raggi X**

Quanto deve valere la differenza di potenziale minima per avere $\lambda > 10.6 \text{ pm}$?

$$\lambda_{min} = \frac{hc}{e\Delta V}$$

da cui

$$E = 116.9 \text{ keV}$$

o

$$\Delta V = 116.9V$$

Cioè per avere raggi X con $\lambda > 10.6pm$ è necessaria una $\Delta V > 116.9V$.

◇◇◇

Capitolo 6

Proprietà Ondulatorie della materia

6.1 L'ipotesi di De Broglie

26/5/2003

Abbiamo visto come l'ipotesi quantistica ci consenta di spiegare molti dei fenomeni osservati relativamente al comportamento delle onde elettromagnetiche e dell'interazione di queste con la materia.

D'altro canto anche il comportamento ondulatorio delle onde elettromagnetiche aveva ricevuto molte conferme sperimentali, per cui possiamo concludere che le onde elettromagnetiche presentano un comportamento sia ondulatorio che corpuscolare.

Ricordiamo che una grandezza tipica utilizzata nella descrizione di un fenomeno ondulatorio è la lunghezza d'onda λ , mentre una grandezza tipicamente associata ad un corpo è la quantità di moto p : vediamo nel caso del fotone, il quanto di luce, la relazione tra queste 2 grandezze: vale

$$E = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$$

e

$$E = pc$$

da cui si può ricavare una relazione tra lunghezza d'onda e quantità di moto nel caso del fotone, cioè:

$$\boxed{p\lambda = h} \quad (6.1)$$

De Broglie ipotizzò che questa relazione fosse valida in generale, non solo per il fotone, ma per tutti i corpi.



ESERCIZIO: Palla da Biliardo

Calcolare la lunghezza d'onda associata ad una palla da biliardo: $m=450\text{gr}$, $v=8.5\text{m/s}$ (viene chiamata: lunghezza d'onda di De Broglie)

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv} = 1.7 \cdot 10^{-34} \text{m}$$



Vediamo dunque che quanto asserito da De Broglie non è in contraddizione con l'esperienza in quanto il valore della lunghezza d'onda associata ad un corpo macroscopico è molto piccolo, dunque, il comportamento ondulatorio della materia non è osservabile macroscopicamente.



RIFLESSIONE:

Supponiamo di avere una palla da biliardo che si muova con $v = 10^{-34} \text{m/s}$: allora λ risulterebbe essere una lunghezza osservabile?

Perchè non si osserva? La velocità non può assumere valori così piccoli? O li assume per tempi troppo piccoli?

6.1.1 De Broglie e Bohr

Utilizzando l'ipotesi di De Broglie si può dare una nuova interpretazione al modello di Bohr dell'atomo: Bohr introduce una ipotesi di quantizzazione del momento della quantità di moto dell'elettrone ed abbiamo visto che l'energia cinetica si può scrivere come:

$$K_n = \frac{n^2 h^2}{8\pi^2 m r_n^2}$$

ma d'altro canto la quantità di moto si può scrivere come:

$$p^2 = 2mK$$

quindi uguagliando le 2 relazioni, ed usando l'ipotesi di De Broglie:

$$\frac{h^2}{\lambda^2} = p^2 = \frac{n^2 h^2}{4\pi^2 r_n^2}$$

da cui

$$\lambda = \frac{2\pi r_n}{n}$$

o

$$n\lambda = 2\pi r_n \quad (6.2)$$

La quantizzazione del momento della quantità di moto si traduce quindi nella quantizzazione delle orbite che possono essere percorse dall'elettrone, ed in particolare la relazione tra orbite ammesse e lunghezza d'onda associata risulta essere la stessa valida per le onde stazionarie.

Le orbite ammesse sono cioè quelle che consentono all'elettrone, visto come un'onda, di rimanere in un regime di stazionarietà: infatti se l'orbita non ha una lunghezza multipla della lunghezza d'onda dell'elettrone, orbite successive si sovrappongono in maniera distruttiva, e l'elettrone non può esistere.

C'è dunque uno stretto legame tra struttura dell'atomo e natura ondulatoria della luce.

6.1.2 Diffrazione degli elettroni — Davisson e Germer — 1927

Se l'ipotesi di De Broglie è valida, si richiede comunque una verifica sperimentale della natura ondulatoria dell'elettrone (o di altre particelle), verifica che implica l'osservazione di effetti tipicamente associati a fenomeni ondulatori.

Consideriamo gli elettroni: per verificarne la natura ondulatoria cerchiamo di vedere se si osservano fenomeni di diffrazione:

Per l'elettrone vale:

$$E_k = \frac{p^2}{2m_e} \rightarrow p = \sqrt{2m_e E_k}$$

dalla relazione di De Broglie $\lambda = \frac{h}{p}$:

$$2d \sin \theta = n\lambda = n \frac{h}{p} = \frac{nh}{\sqrt{2m_e E_k}}$$

cioè si può calcolare l'angolo θ per cui osservare il primo massimo di diffrazione ($n = 1$): i risultati sperimentali confermano questa previsione, e quindi la natura ondulatoria dell'elettrone. In seguito è stata dimostrata anche la natura ondulatoria di altre particelle, come il neutrone.

6.1.3 Microscopio elettronico

Si possono usare gli elettroni come particelle sonda con una piccola lunghezza d'onda: per avere fasci di elettroni si usano sorgenti elettromagnetiche, si focalizza il fascio con lenti elettrostatiche, e si porta il fascio di elettroni sul campione.

Si ottiene la produzione di raggi X, di altri elettroni, e backscattering degli elettroni incidenti.



ESERCIZIO:

Determinare la quantità di moto, la velocità e l'energia con $\lambda = 100pm$, per:

Fotone X Quantità di moto $p = \frac{h}{\lambda} = 6.63 \cdot 10^{-24} kgm/s$

Energia: $E = pc = 1.99 \cdot 10^{-15} J = 12.4keV$

Velocità: c

elettrone Quantità di moto $p = \frac{h}{\lambda} = 6.63 \cdot 10^{-24} kgm/s$

Velocità non relativistica: $v = \frac{p}{m} = 7.3 \cdot 10^6 m/s^2$

Energia a riposo: $m_e c^2 = 0.511 Mev$

Energia cinetica: $E_k = \frac{p^2}{2m} = 2.41 \cdot 10^{-17} J = 151eV$

neutrone Quantità di moto $p = \frac{h}{\lambda} = 6.63 \cdot 10^{-24} kgm/s$

Energia a riposo: $m_n c^2 = 939 Mev$

Velocità non relativistica: $v = \frac{p}{m} = 3950 m/s$

Energia cinetica: $E_k = \frac{p^2}{2m} = 1.31 \cdot 10^{-20} J = 0.082eV$

◇◇◇

6.1.4 L'onda di De Broglie

Supponiamo di avere una scatola di lunghezza L , e dentro la scatola una particella di una determinata lunghezza d'onda $\lambda = h/p$.

Cerchiamo di capire come si comporta la particella considerando la sua natura ondulatoria: essendo la particella presente nella scatola, dal punto di vista ondulatoria, l'onda ad essa associata deve essere stazionaria, quindi

$$\Psi(x, t) = \Psi_o \sin(kx) \sin(\omega t)$$

con $k = \frac{2\pi}{\lambda}$.

Poiché l'onda è stazionaria, deve valere la condizione di nodo alle estremità della scatola (posizione 0 e L), dunque

$$L = n \frac{\lambda}{2} \rightarrow \lambda_n = \frac{2L}{n}$$

cioè la particella nella scatola ha lunghezze d'onda quantizzate.

$$p_n = \frac{h}{\lambda_n} = \frac{nh}{2L}$$

e

$$E_n^* = \frac{p^2}{2m} = \frac{n^2 h^2}{8mL^2}$$

cioè la particella nella scatola ha lunghezza d'onda, quantità di moto ed energia cinetica quantizzate, inoltre la quantità di moto e l'energia cinetica minime non sono mai nulle.

6.1.5 Ipotesi di Born

Associando una funzione d'onda ad una particella, si pone il problema dell'interpretazione da dare a questa funzione: l'ipotesi di Born dice che la funzione d'onda rappresenta la densità di probabilità di localizzazione della particella: la particella si trova in un determinato punto, ma per ogni punto noi possiamo solo definire la probabilità di trovarvi la particella.

Trattandosi di una probabilità, vale la condizione di normalizzazione:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi^2(x, t)| dx = 1$$

6.1.6 Il punto della situazione

Abbiamo visto la funzione d'onda:

$$\Psi(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin kx$$

con $k = 2\pi/\lambda$, da cui

$$\Psi(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{n\pi}{L} x$$

e

$$|\Psi(x)|^2$$

assume il significato di densità di probabilità della particella.

Abbiamo inoltre visto che i valori di energia sono quantizzati secondo

$$E_n = \frac{h^2}{8mL^2} n^2 \quad (6.3)$$



ESERCIZIO:

$$p_1 = \frac{h}{2L} = \frac{6.2 \cdot 10^7 \text{ eV}/c \cdot m}{L[m]}$$

questo indica che al diminuire della lunghezza della scatola L, aumenta p (quantità di moto).

$$E_1 = \frac{h^2}{8mL^2} = \frac{3.8 \cdot 10^{-19} \text{ eV} \cdot m^2}{L^2[m^2]}$$

al diminuire di L aumenta l'energia cinetica.

Anche il fenomeno della particella nella scatola è evidente solo a livello microscopico.

◇◇◇



ESERCIZIO: 42.5

Probabilità che una particella si trovi tra $x_1 = D/4$ e $x_2 = 3D/4$.

Ricordiamo che vale:

$$kx = \frac{2\pi}{\lambda} x = \frac{n\pi}{L} x$$

$$n \frac{\lambda}{2} = L \rightarrow \lambda = \frac{2L}{n}$$

Funzione d'onda (parte spaziale):

$$\Psi(x) = \Psi_o \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

e dalla condizione di normalizzazione

$$\int_0^D |\Psi^2(x, t)| dx = 1$$

risulta $\Psi_o = \sqrt{2/L}$.

Ricordando che $\sin^2(t) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2t))$ allora:

$$\int_{D/4}^{3D/4} |\Psi^2(x, t)| dx = \int_{D/4}^{3D/4} \Psi_o^2 \sin^2\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx =$$

$$\int_{D/4}^{3D/4} \Psi_o^2 \frac{1}{2} (1 - \cos\left(\frac{2n\pi}{L}x\right)) dx =$$

$$\Psi_o^2 \frac{1}{2} \left[x - \frac{L}{2n\pi} \sin \frac{2n\pi x}{L} \right]_{D/4}^{-3D/4} =$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2\pi n} \left[\sin \frac{n\pi}{2} - \sin \frac{3n\pi}{2} \right]$$

e per

- n pari: probabilità 1/2
- n dispari, 1,5,9, ... : probabilità $\frac{1}{2} + \frac{1}{n\pi}$
- n dispari, 3,7,11, ... : probabilità $-\frac{1}{2} - \frac{1}{n\pi}$



NOTA:

$$\vec{x} = \int x |\Psi(x)|^2 dx$$

$$\vec{f}(x) = \int f(x) |\Psi(x)|^2 dx$$

con $|\Psi(x)|^2$ densità di probabilità.



27/5/2003



ESERCIZIO: 42.25 La diffrazione degli elettroni

Abbiamo visto che l'elettrone ha una natura ondulatoria, quindi ci aspettiamo di osservare fenomeni propri delle onde: fra questi la diffrazione. Sia dato un fascio di elettroni con $E_k = 256 eV$, che passa per una coppia di fenditure distanti $a = 50 \mu m$, ed osserviamo la figura risultante su una lastra a distanza $d = 1m$. Qual'è la distanza tra due massimi adiacenti?

$$m_e = 9.11 \cdot 10^{-31} Kg$$

$$v_e = \sqrt{\frac{2E_k}{m_e}} = 9.5 \cdot 10^6 m/s$$

che è molto minore della velocità della luce. Dalla relazione di De Broglie:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv} = 7.7 \cdot 10^{-11} m$$

Si poteva fare anche $p = \sqrt{2m_e E_k^2}$

Ora, sia ha interferenza costruttiva per

$$a \sin \theta = n\lambda$$

Poichè l'angolo θ è piccolo, si può approssimare $\sin \theta \approx \theta$, per cui

$$\delta\theta = \frac{\lambda}{a} = 1.5 \cdot 10^{-6}$$

quindi la distanza fra i massimi è:

$$S = d\delta\theta = 1.5 \cdot 10^{-6} = 1.6 \mu m$$

◇◇◇



ESERCIZIO: 42.27 Elettrone in una scatola unidimensionale

Un elettrone in una scatola unidimensionale assorbe/emette luce con $\lambda = 41.5 nm$ e $\lambda = 22.1 nm$. Determinare:

1. il massimo λ che può essere assorbito dall'elettrone
2. quale λ può essere assorbita fra le seguenti: 27.7, 55.4, 23.7 nm.
3. la lunghezza della scatola

La differenza di energia tra 2 stati dell'elettrone è:

$$\Delta E = \frac{h^2}{8mL^2}(n'^2 - n^2) = \frac{hc}{\lambda}$$

dove nell'ultima uguaglianza compare il λ della luce emessa. Quindi:

$$\lambda = \frac{8mcL^2}{h} \frac{1}{n'^2 - n^2} \quad (6.4)$$

Sappiamo che l'elettrone emette a $\lambda = 41.5$ e $\lambda = 22.1$. Deve valere:

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{n_2'^2 - n_2^2}{n_1'^2 - n_1^2}$$

Calcoliamo ora il rapporto tra gli n , in un certo numero di casi:

n' / n	1	2	3	4
2	3	-	-	-
3	8	5	-	-
4	15	12	7	-
5	24	21	16	9

se $n=1$, d il rapporto

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = 1.878 \cong \frac{15}{8}$$

allora le due frequenze date corrispondono alle 2 transizioni:

- $n' = 3 \rightarrow n = 1$
- $n' = 4 \rightarrow n = 1$

ora dall'equazione 6.4 possiamo ricavare la lunghezza della scatola, con $n' = 3$ e $n = 1$. Risulta

$$L = 0.322nm$$

e

$$\frac{8mcL^2}{h} = 332nm$$

per cui

$$\lambda = \frac{8mcL^2}{h} \frac{1}{n'^2 - n^2} \cong 332 \frac{1}{n'^2 - n^2}$$

Qual'è il valore di λ_{Max} ? λ sarà massimo per $(n'^2 - n^2)$ minimo, che dalla tabella risulta essere 3. Quindi

$$\lambda_{Max} = \frac{332}{n'^2 - n^2} = \frac{332}{3} = 110.7nm$$

Infine, verifichiamo quale delle tre λ date soddisfa questa relazione con i valori della tabella:

λ	$332/\lambda$	
27.7	12	SI
55.4	6	NO
23.7	14	NO

quindi il λ possibile è $\lambda = 27.7nm$.



6.2 Principio di indeterminazione di Heisenberg

La natura ondulatoria della materia ha un'altra importante conseguenza, formalizzata nel principio di Indeterminazione di Heisenberg: non si può localizzare nello spazio e assegnare una quantità di moto ad una particella con precisione arbitraria: vale

$$\Delta p \Delta x \gtrsim \hbar = \frac{h}{2\pi} \quad (6.5)$$

o analogamente

$$\Delta E \Delta t \gtrsim \hbar = \frac{h}{2\pi} \quad (6.6)$$

cioè siamo in presenza di un limite intrinseco nella natura, e non di un limite nella nostra strumentazione di misura.

6.2.1 Microscopio ideale di Bohr

Vediamo di dare una spiegazione di questo principio: supponiamo di voler osservare un elettrone lanciandogli contro un fotone ed osservando il fotone rimbalzato sull'elettrone.

Il fotone ha

$$\Delta p = 2p \sin \theta/2 \approx 2p$$

in quanto se devo osservare il fotone riflesso, questo deve rientrare nel mio microscopio (cioè $\theta \approx 180^\circ$).

Questa Δp è però la stessa dell'elettrone. Ora la posizione di un fotone si può determinare al meglio con un'incertezza pari alla sua lunghezza d'onda

$$\Delta x \approx \frac{\lambda}{2}$$

quindi

$$\Delta p \Delta x \approx 2p \cdot \frac{\lambda}{2} = 2 \frac{h \lambda}{\lambda} \approx h$$

dove abbiamo usato la relazione di De Broglie

$$p = \frac{h}{\lambda}$$

6.2.2 Velocità di fase

Un'onda monocromatica si può descrivere come

$$A(x, t) = Ae^{i(kx - \omega t)}$$

per l'onda di De Broglie vale

$$\lambda = \frac{h}{p} \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad k = \frac{2\pi}{h}p = \frac{p}{\hbar}$$

analogamente vale

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{h}E = \frac{E}{\hbar}$$

(quest'ultimo passaggio vale con qualche riserva!). Comunque possiamo scrivere:

$$\Psi(x, t) = \Psi_0 e^{\frac{i}{\hbar}(px - Et)}$$

dove abbiamo p al posto di x ed E al posto di ω .

Ricordiamo le relazioni relativistiche per energia e quantità di moto:

$$p = m\beta c\gamma$$

$$E = m\gamma c^2$$

e ricordiamo la definizione di velocità di fase come

$$v_f = \frac{\omega}{k} = \nu\lambda$$

da queste relazioni si vede che:

$$v_f = \frac{\omega}{k} = \frac{E}{p} = \frac{c}{\beta}$$

Problema: ho una velocità di fase che può assumere valori maggiori di c: vedremo che la velocità di fase comunque non ha senso.

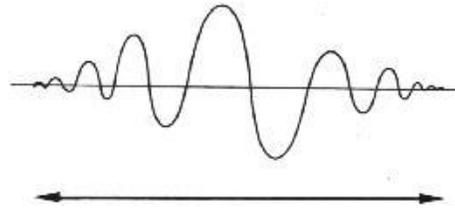


Figura 6.1: Un pacchetto d'onda

6.2.3 Pacchetto d'onda

Vediamo ora la descrizione di una particella come un pacchetto d'onda: siano due funzioni d'onda:

$$\Psi_1(x, t) = A \sin(k_1 x - \omega_1 t)$$

$$\Psi_2(x, t) = A \sin(k_2 x - \omega_2 t)$$

possiamo porre:

$$k = \frac{k_1 + k_2}{2}$$

e

$$\Delta k = \frac{k_1 - k_2}{2}$$

ed analogamente per ω : allora si può scrivere:

$$\Psi_1(x, t) = A \sin((kx - \omega t) + (\Delta kx - \Delta \omega t))$$

e

$$\Psi_2(x, t) = A \sin((kx - \omega t) - (\Delta kx - \Delta \omega t))$$

quindi

$$\Psi(x, t) = \Psi_1(x, t) + \Psi_2(x, t) = 2A \sin(kx - \omega t) \cos(\Delta kx - \Delta \omega t)$$

Cioè abbiamo la convoluzione di due fenomeni ondulatori: il **pacchetto d'onda** è cioè la composizione di più onde, ed una particella si può pensare come un pacchetto d'onda.

In questo caso possiamo determinare la lunghezza d'onda come lo spazio occupato dal pacchetto d'onda fratto il numero di periodi, cioè

$$\lambda = \frac{\Delta x}{N}$$

Però in N , numero di onde che vedo, poteri sbagliare di 1 nel conteggio: allora

$$N = \frac{\Delta x}{\lambda}$$

e se l'errore è 1, l'errore su λ è:

$$\Delta N = 1 = \frac{\Delta x}{\lambda^2} \Delta \lambda$$

da cui

$$\frac{\Delta \lambda}{\lambda^2} = \frac{1}{\Delta x}$$

Calcoliamo ora:

$$\Delta x \Delta p = \Delta x \Delta \left(\frac{h}{\lambda} \right) = \Delta x h \frac{\Delta \lambda}{\lambda^2} = \Delta x h \frac{1}{\Delta x} = h$$

risulta:

$$\Delta x \Delta p \approx h$$

Cioè abbiamo ritrovato il principio di indeterminazione di Heisenberg, considerando una particella descritta come un pacchetto d'onda: quindi **il principio di indeterminazione di Heisenberg è intrinseco nella descrizione ondulatoria della materia.**



ESERCIZIO: 42.6 — Modello di nucleo con elettroni

Determinare Δp di un elettrone considerato nel nucleo di un atomo di Argento, Ag, $Z=47$, $A = 108$.

Si tratta dell'incertezza sull'energia di legame tra protone ed elettrone.

Sia $r = r_0 A^{1/3} = 5.37 \cdot 10^{-15} 108^{1/3}$

da cui

$$2r = 1.3 \cdot 10^{-14}$$

Se l'elettrone è all'interno del nucleo, l'incertezza sulla sua posizione si può considerare pari al diametro del nucleo, quindi

$$\Delta x = 2r$$

Allora:

$$\Delta p = \frac{\hbar}{\Delta x} = 8.1 \cdot 10^{-21} \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

Ipotizziamo un elettrone relativistico, per cui

$$E = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} \approx pc$$

in quanto l'energia di riposo si può considerare trascurabile: abbiamo cioè la stessa relazione valida per un elettrone. Allora

$$\Delta E = c\Delta p \approx 15 \text{ MeV}$$

Calcoliamo l'energia di legame dell'elettrone: ogni elettrone nel nucleo vede $2Z$ protoni e $(Z-1)$ elettroni, per cui, nel complesso vede $(Z+1)$ cariche positive: l'energia di legame è dunque:

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(Z+1)e^2}{r} \approx 10 \text{ MeV}$$

Cioè la massima energia dell'elettrone è 10 MeV, mentre l'indeterminazione è pari a 15 MeV.

L'elettrone non può dunque stare dentro il nucleo, perché la sua energia può arrivare a 15 MeV, sufficiente a farlo uscire. Infatti l'indeterminazione che abbiamo sull'energia dell'elettrone non indica il fatto che abbiamo una incertezza sulla misura, ma proprio che l'energia dell'elettrone può variare fino ai 15 MeV.

Appena l'elettrone supera i 10 MeV, esce dal nucleo.

Quindi una struttura atomica con $2Z$ protoni e Z elettroni non può esistere.



Capitolo 7

Equazione di Schrödinger

A questo punto¹ Bohr ha introdotto un ipotesi quantistica nella descrizione dell'atomo e De Broglie ha introdotto l'idea della natura ondulatoria della materia: con l'equazione di Schrödinger si ha un modello matematico che riunisce in maniera molto elegante queste due ipotesi.

28/5/2003

29/5/2003



Accenni all'equazione di Schrödinger

Una particella libera in moto nel verso positivo dell'asse x di un sistema di riferimento unidimensionale, può essere descritta da una funzione d'onda nella forma $\Psi(x, t) = Ae^{-i\omega(t-x/v)}$ oppure come $\Psi(x, t) = Ae^{-i2\pi(t\nu-x/\lambda)}$ dove $v = \nu\lambda$ rappresenta la velocità di fase.

Considerando che $E = h\nu$ e $\lambda = h/p$, la funzione d'onda diventa:

$$\Psi(x, t) = Ae^{-i2\pi/h \cdot (Et - px)} \quad (7.1)$$

Le derivate della funzione d'onda rispetto alle variabili x e t sono:

$$\partial^2 \Psi / \partial x^2 = -(2\pi/h)^2 \cdot p^2 \Psi$$

ossia

$$p^2 \Psi = -(h/2\pi)^2 \partial^2 \Psi / \partial x^2$$

e

¹LEZIONE MANCANTE: 28 e 29/5/2003: l'equazione di Schrödinger

$$\partial\Psi/\partial t = -i(2\pi/\hbar)E \cdot \Psi$$

ossia

$$E\Psi = i(\hbar/2\pi)\partial\Psi/\partial t$$

Nel caso di velocità trascurabili rispetto alla velocità della luce, l'energia di una particella è la somma della sua energia cinetica $E_k = p^2/2m$ e dell'energia potenziale U , funzione delle coordinate spaziali:

$$E = p^2/2m + U(x, t)$$

Moltiplicando entrambi i membri per la funzione d'onda Ψ e poi utilizzando le relazioni viste si ottiene:

$$E\Psi = p^2/2m\Psi + U(x, t)\Psi$$

da cui

$$i(\hbar/2\pi) \cdot \partial\Psi/\partial t = -[(\hbar/2\pi)^2/2m] \cdot \partial^2\Psi/\partial x^2 + U(x, t) \cdot \Psi$$

che è l'equazione di Schrödinger dipendente dal tempo, in una sola dimensione. Nel caso di tre dimensioni, l'equazione diventa:

$$\begin{aligned} i(\hbar/2\pi) \cdot \partial\Psi/\partial t = & \hspace{15em} (7.2) \\ -[(\hbar/2\pi)^2/2m] \cdot [\partial^2\Psi/\partial x^2 + \partial^2\Psi/\partial y^2] + \partial^2\Psi/\partial z^2 + U(x, y, z, t) \cdot \Psi \end{aligned}$$

Nel caso di fenomeni indipendenti dal tempo, l'equazione assume la forma (per semplicità nel caso unidimensionale):

$$\partial^2/\partial x^2 + 2m/(\hbar/2\pi)^2 \cdot [E - U(x)] \cdot \Psi = 0$$

L'equazione è stata ottenuta utilizzando la funzione d'onda di una particella libera e si potrebbe dubitare che la sua validità sia generale. Pensando invece che la stessa equazione sia in se stessa un principio primo, pur ottenuto partendo da una situazione particolare, dobbiamo piuttosto valutarne la sua validità verificando le previsioni nei diversi aspetti sperimentali.

Una proprietà importante dell'equazione è che è lineare nella funzione d'onda e nelle sue derivate, e quindi una qualsiasi combinazione lineare $\Psi = a\Psi_1 + b\Psi_2$ di funzioni d'onda che siano soluzioni dell'equazione è anch'essa una soluzione.

Secondo l'interpretazione di Born della funzione d onda, il suo modulo al quadrato $|\Psi|^2$ rappresenta la densità di probabilità che la particella si trovi in un particolare punto dello spazio ed è quindi

soggetto alla condizione di normalizzazione, ad esempio nel caso di una sola dimensione, $\int |\Psi|^2 dx = 1$, dove l'integrale è esteso in tutto lo spazio.

Il valore medio di un osservabile, funzione delle coordinate spaziali, associato alla particella sarà di conseguenza calcolato attraverso la relazione $\langle f(x) \rangle = \int f(x) \cdot |\Psi|^2 dx$.

Particella in una buca di potenziale

Il caso di una particella racchiusa in una scatola unidimensionale di lunghezza L , o di una particella in una buca di potenziale infinitamente profonda, può essere descritto dall'equazione di Schrödinger nella forma:

$$\partial^2 \Psi / \partial x^2 + (2m/\hbar)^2 \cdot E \cdot \Psi = 0$$

La funzione d'onda $\Psi(x)$ dovrà essere nulla all'esterno della buca e, per continuità, anche sulle pareti. La soluzione dell'equazione è:

$$\Psi(x) = A \sin[2\pi \cdot (2mE)^{1/2} / h \cdot x]$$

che, per azzerarsi per $x = 0$ e per $x = L$ richiede che

$$(2mE)^{1/2} / h \cdot L = n/2$$

ossia che l'energia caratteristica delle soluzioni dell'equazione assuma solamente valori discreti descritti dalla relazione $E_n = n^2 h^2 / 8mL^2$. La normalizzazione della funzione d onda $|\Psi(x)|^2 dx = 1$ richiede inoltre che sia $A = (2/L)^{1/2}$.

Si noti che i diversi stati non prevedono una densità di probabilità uniforme lungo la buca e, anzi, le densità sono diverse da stato a stato, con ventri dove la densità è massima e nodi dove è nulla.

L'equazione di Schrödinger e l'atomo di idrogeno

Il problema deve essere affrontato in questo caso in 3 dimensioni. L'equazione indipendente dal tempo in questo caso ha la forma:

$$\hbar^2 / 2m \cdot (\partial^2 \Psi / \partial x^2 + \partial^2 \Psi / \partial y^2 + \partial^2 \Psi / \partial z^2) + [E - U(x, y, z)] \cdot \Psi = 0$$

con

$$U(x, y, z) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{e^2}{r}$$

L'interazione, nell'ipotesi di un nucleo a riposo, è di tipo centrale ed è meglio descritta nelle coordinate polari r, θ, ϕ . In questo modo l'equazione della funzione d'onda viene scritta come un prodotto di tre funzioni indipendenti, una per ogni variabile:

$$\Psi(r, \theta, \phi) = R(r) \cdot \Theta(\theta) \cdot \Phi(\phi)$$

e l'equazione si può separare in tre equazioni ognuna delle quali riguarda la relativa funzione di ogni coordinata. Un calcolo piuttosto laborioso porta alle equazioni nella forma seguente:

1. $\frac{1}{r^2} \cdot \frac{d(r^2 dR/dr)}{dr} + 2m/\hbar^2 \cdot [E + 1/(4\pi\epsilon_0) \cdot e^2/r - \hbar^2/2m \cdot l(l+1)/r^2]R = 0$
2. $\frac{1}{\sin(\theta)} \frac{d(\sin(\theta) d\Theta/d\theta)}{d\theta} + [l(l+1) - m_l^2/\sin^2(\theta)]\Theta = 0$
3. $d^2\Phi/d\phi^2 + m_l^2\Phi = 0$

Si noti l'analogia tra l'equazione 1) e l'analogia equazione per le equazioni del moto in un campo gravitazionale, dove, nel termine tra parentesi quadre, compare invece

$$[E + \gamma mM/r - L^2/2mr^2]$$

Nel caso dell'equazione in 1), il momento della quantità di moto è dato da:

$$L = \hbar \cdot \sqrt{l(l+1)}$$

dove l rappresenta il **numero quantico orbitale** ed assume valori positivi o nulli. Si noti che il valore $l=0$ è possibile e quindi il momento della quantità di moto può essere nullo, diversamente dal caso del modello di Bohr. Dall'equazione 1), i valori di energia che si ottengono sono quantizzati e l'espressione è la stessa ottenuta nel modello atomico di Bohr:

$$E_n = \frac{me^4}{8\epsilon_0^2 h^2} \cdot \frac{1}{n^2}$$

Dove n rappresenta il **numero quantico principale**. I valori del numero quantico orbitale l devono essere inferiori a n , ossia i valori che può assumere sono $l = 0, 1, 2, \dots, (n-1)$. Nelle equazioni 2) e 3) compare un terzo numero quantico, m_l , detto **numero quantico magnetico**. Questo numero quantico assume valori interi, sia positivi che negativi, ed è limitato dal valore di l , ossia, $m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l$. Se $L = \hbar \cdot \sqrt{l(l+1)}$ rappresenta il momento della quantità di moto totale, la sua proiezione su un generico asse z di riferimento è $L_z = \hbar m_l$.

Diversamente dal modello di Bohr, l'equazione di Schrödinger prevede dunque in modo naturale l'esistenza di più valori del momento della quantità di moto a parità di energia.



30/5/2003

7.1 Il punto della situazione

Abbiamo visto l'equazione di Schrödinger nella sua forma indipendente dal tempo:

$$\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + (E - U(x))\Psi = 0$$

che si può riscrivere come caso particolare di un elettrone in una buca di potenziale:

$$\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + E\Psi = 0$$

In questo caso la soluzione risulta:

$$\Psi = A \sin \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} x$$

definita per $0 \leq x \leq L$.

Si annulla per

$$\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} L = n\pi$$

da cui si ricava la condizione di quantizzazione sull'energia.

Il parametro A si ottiene dalla condizione di normalizzazione:

$$\int |\Psi|^2 = 1 \rightarrow A = \sqrt{\frac{2}{L}}$$

7.2 L'oscillatore armonico

Vediamo il caso dell'oscillatore armonico in cui l'energia potenziale si può scrivere come

$$U(x) = \frac{1}{2} kx^2$$

$$\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + (E - \frac{1}{2} kx^2) \Psi = 0$$

ponendo $y = \frac{\sqrt{km}}{\hbar} x$ e $\alpha = \frac{2E}{\hbar} \sqrt{\frac{m}{k}}$ possiamo riscrivere l'equazione di Schrödinger in maniera più semplice:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + (\alpha - y^2) \Psi = 0$$

abbiamo soluzioni per $\alpha = 2n + 1$, $n = 0, 1, 2, \dots$ cioè:

$$E_n = \hbar \sqrt{\frac{k}{m}} (n + \frac{1}{2})$$

ma $\frac{k}{m}$ è la pulsazione propria dell'oscillatore, che possiamo scrivere come $\frac{2\pi\nu}{\nu}$, cioè

$$E_n = h\nu(n + \frac{1}{2})$$

A titolo di curiosità, riportiamo le soluzioni di Ψ :

$$\Psi_n = \left(\frac{2m\nu}{\hbar} \right)^{1/4} (2^n n!) H_n(y) e^{-y^2/2}$$

dove H_n indica i polinomi di Hermitte.

7.3 Regole di Selezione

Cerchiamo le regole di selezione delle strutture magnetiche²:

Ricordiamo che esistono vari numeri quantici:

- per l'energia
- per il momento angolare
- magnetici

Riprendiamo l'equazione di Schrödinger

$$\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + (E - U(x)) \Psi = 0$$

valeva:

²Rivedere

$$E\Psi = -\frac{i}{\hbar} \frac{\partial}{\partial t} \Psi(x, t)$$

e

$$\Psi_n(x, t) = \Psi_n(x) e^{-i \frac{E}{\hbar} t}$$

L'aspettazione di x è:

$$\langle x \rangle = \int x |\Psi^2(x)| dx$$

In una transizione c'è un periodo di tempo in cui non so dov'è la particella: la sua funzione d'onda è la combinazione lineare delle funzioni d'onda dei 2 stati:

$$\Psi(x, t) = a\Psi_n(x, t) + b\Psi_m(x, t)$$

allora

$$\langle x \rangle =$$

$$\int x \left[a^2 |\Psi|^2 + b^2 |\Psi|^2 + ab^* \Psi_n(x) \Psi_m^*(x) e^{-\frac{i}{\hbar}(E_m - E_n)t} + a^* b \Psi_n(x)^* \Psi_m(x) e^{\frac{i}{\hbar}(E_m - E_n)t} \right] dx$$

dove x^* indica il complesso coniugato. Prendendo la parte reale, risulta proporzionale a

$$Re(\langle x \rangle) \propto \cos\left(\frac{E_n - E_m}{\hbar} t\right) \cdot \int (*)$$

Cosa significa questo? il valore $\langle x \rangle$ dipende dal tempo in modo oscillatorio, cioè durante le transizioni l'elettrone va avanti e indietro, quindi produce radiazione.

La frequenza di oscillazione è:

$$\nu = \frac{E_n - E_m}{h}$$

con h senza taglio, ed è la frequenza della radiazione elettromagnetica.

A volte $\langle x \rangle$ può essere 0 perché $\int (*)$ è zero.

Abbiamo descritto una transizione $n \rightarrow m$, ed abbiamo una dipendenza da l (numero quantico orbitale, corrispondente alle orbite s,p,d,...) e da m_l , numero quantico magnetico:

$\langle x \rangle$ è **diverso da 0** se

- $\Delta l = \pm 1$
- $\Delta m = 0, \pm 1$

E queste sono le cosiddette **Regole di selezione**: sostanzialmente una transizione è possibile solo se ho una variazione al massimo di 1 del valore dei numeri quantici.



ESERCIZIO: Regole di selezione

$n = 3$ $l = 2$ $m_l = 0$ **abbiamo** $\Delta l = 2$, **quindi ci aspettiamo che l'integrale $\int(*)$ si annulli.**

Abbiamo fattorizzato Ψ separando le tre componenti r, θ, ϕ :

$$\Psi(r, \theta, \phi) = \frac{1}{81\sqrt{6\pi}a_0^{3/2}} \frac{r^2}{a_0^2} \cdot e^{-\frac{r}{3a_0}} (3 \cos^2 \theta - 1)$$

dove a_0 è il raggio di Bohr: la prima parte dipende dal raggio r , la seconda (l'esponenziale con il coseno) dall'angolo θ , mentre la funzione è costante rispetto l'angolo azimutale ϕ .

Nel caso particolare $n = 1$, $l = 0$, $m_l = 0$ risulta:

$$\Psi(r, \theta, \phi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}a_0^{3/2}} e^{-r/a_0}$$

A noi interessa la parte $3 \cos^2 \theta - 1$, il cui integrale ci aspettiamo venga 0.

Dobbiamo calcolare

$$\int 3 \cos^2 \theta - 1 d \cos \theta$$

(l'integrale va fatto sull'angolo solido $d \cos \theta$: vale $d \cos \theta = \sin \theta d\theta$), nelle sue tre componenti (r, θ, ϕ) .

In una transizione deve essere $\int x \Psi_m^* \Psi_n dx \neq 0$ nelle tre dimensioni: se abbiamo un integrale nello spazio passando in coordinate polari vale:

$$dx dy dz = r^2 \sin \theta d\theta d\phi$$

a noi interessa la dipendenza da θ , cioè $\sin \theta d\theta$: vale (ϕ è l'angolo azimutale, quello con l'asse z)

- $x = r \cos \theta \sin \phi$
- $y = r \sin \theta \sin \phi$
- $z = r \cos \phi$

per cui i fattori per cui moltiplicate sono $\cos \theta, \sin \theta, 1$.

Quindi

$$\int_{-1}^1 (3 \cos^2 \theta - 1) d \cos \theta = \cos^3 \theta / 3 - \cos \theta = 0$$

$$\int_{-1}^1 \cos \theta (3 \cos^2 \theta - 1) d \cos \theta = \frac{3 \cos^4 \theta}{4} - \frac{\cos^2 \theta}{2} = 0$$

$$\int_{-1}^1 \sin \theta (3 \cos^2 \theta - 1) d \cos \theta = 0$$

quindi nel caso $\Delta l \neq \pm 1$ o $\Delta m_l \neq \pm 1$ la transizione non è permessa.

◇◇◇

7.4 Effetto Zeeman

L'atomo è una struttura al cui interno vi sono cariche elettriche in movimento: ci aspettiamo un qualche tipo di interazione, nel caso un atomo si trovi immerso in un campo magnetico³.

Vediamo la situazione in maniera puramente classica: ad una spira percorsa da corrente è associato un momento di dipolo magnetico: un elettrone in orbita attorno al nucleo si può pensare come una piccola spira percorsa da corrente, per cui vale:

$$\vec{\mu} = i \cdot S \cdot \vec{u}_n$$

e la corrente è:

$$i = \frac{-e}{T_{rivoluzione}} = -\frac{e}{\frac{2\pi r}{v}} = -\frac{ev}{2\pi r} = -\frac{eL}{2\pi r^2 \pi} = -\frac{e\hbar n}{2\pi m r^2}$$

dove abbiamo usato l'uguaglianza $L = n\hbar = mvr\hbar$

allora:

³Vedi dispensa ``Le interazioni tra momenti e campi magnetici``

$$\vec{\mu} = i \cdot S = i\pi r^2 = -\frac{e}{2m} \hbar n u_n \vec{u}_n = -\frac{e}{2m} \vec{L}$$

Cioè il momento di dipolo magnetico è:

$$\vec{\mu} = -\frac{e}{2m} \vec{L} = gL \quad (7.3)$$

dove con $g = -e/2m$ si indica il **rapporto giromagnetico**.

Nel caso l'atomo sia immerso in un campo magnetico B , il dipolo acquista un'energia potenziale legata all'orientazione del dipolo rispetto al campo

$$U_m = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} = -\frac{e}{2m} \cdot \vec{L} \cdot \vec{B}$$

a noi interessa la componente del momento L nella direzione del campo magnetico \vec{B} , cioè:

$$U_m = -\frac{e}{2m} L_z B = -m_l \frac{e\hbar}{2m} B$$

dove chiamiamo **magnetone di Bohr** la quantità μ_B :

$$\boxed{U_m = m_l \frac{e\hbar}{2m} B} \quad \boxed{\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e} = 9.274 \cdot 10^{-24} \text{ J/T}} \quad (7.4)$$

La separazione delle righe spettrali osservate nell'effetto Zeeman è dovuta alla separazione dei livelli energetici della struttura atomica in un campo magnetico.

Se ν_o è la frequenza caratteristica di una riga in assenza di campo magnetico, si osservano, con un campo magnetico B , tre righe a frequenza

$$\nu_o$$

e

$$\nu_{1,2} = \nu_o \pm \frac{e}{4\pi m} B$$

Capitolo 8

Lo spin

Introduciamo ora un ulteriore elemento di descrizione nella struttura dell'atomo: lo spin, o momento della quantità di moto intrinseco. Il nome vuol ricordare il momento di un corpo in rotazione attorno al suo asse, anche se è bene ricordare che questi paragoni tra mondo classico e mondo quantistico possono essere utili, ma va sempre ricordato che sono paragoni tra due mondi completamente diversi. Questa nuova caratterizzazione della struttura dell'atomo va ad aggiungersi a quelle già viste: ad ogni elettrone abbiamo quindi associato il **numero quantico principale**, il **numero quantico orbitale**, ed ora il **numero quantico di spin**.

8.0.1 L'esperienza di Stern-Gerlach

Vediamo innanzitutto sperimentalmente se possiamo avere una conferma di questa nuova proprietà degli elettroni: l'esperienza di Stern-Gerlach studia il comportamento di un fascio di atomi di Argento, fatti passare attraverso un elettromagnete le cui espansioni sono tali da creare un campo magnetico altamente disuniforme, in modo tale da massimizzare $\partial B/\partial z$: dopo l'elettromagnete, si trova una lastra fotografica che viene impressionata dal fascio.

Se il campo magnetico è spento, sulla lastra si forma una riga nera, mentre se il campo magnetico è acceso, si vede che la linea nera viene separata in due linee distinte.

Vediamo cosa succede: l'espressione dell'energia magnetica si può scrivere come:

$$U_m = \vec{\mu} \cdot \vec{B} = -\frac{e}{2m} \vec{L} \cdot \vec{B}$$

da cui

$$\vec{F}_z = \frac{\partial U_m}{\partial z} = \mu \frac{\partial B}{\partial z}$$

ora si può calcolare lo spostamento del fascio dovuto alla forza F_z :

$$z = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2} \frac{F_z}{m_{Ag}} t^2$$

$$z = \frac{1}{2} \frac{\mu \frac{\partial B}{\partial z}}{m_{Ag}} t^2$$

$$z = \frac{1}{2} \frac{\mu \frac{\partial B}{\partial z}}{m_{Ag}} (d/v)^2$$

dove d è la distanza percorsa dall'atomo di Ag nel traferro, e v è la sua velocità: la velocità è collegata all'energia cinetica dell'atomo di Ag, a sua volta ricavabile dalla temperatura del forno che genera il fascio di atomi di Ag.

La conclusione è che esiste un momento magnetico, in quanto si vede sperimentalmente la separazione della riga nera.

Vediamo la struttura dell'atomo di Ag per capire a cosa è dovuto questo momento: l'argento ha numero atomico $Z=47$, per cui vi sono 46 elettroni nei primi quattro livelli, ed un 47^{mo} elettrone, solo soletto al livello $n=5$, o meglio 5s. In particolare gli elettroni sono così distribuiti:

1s	2s	2p	3s	3p	3d	4s	4p	4d	5s
2	2	6	2	6	10	2	6	10	1

Il livello 5s indica che l'elettrone è caratterizzato da numero quantico $n=5$ e $l=0$. In questa configurazione il momento angolare orbitale è 0: d'altro canto se non vi fosse un momento magnetico non vedremmo la separazione della riga, quindi c'è un momento angolare intrinseco dell'elettrone, dovuto allo spin.

Abbiamo allora un momento magnetico, dovuto ad un momento magnetico intrinseco dell'elettrone: vale per il **momento della quantità di moto intrinseco** S :

$$S = \sqrt{s(s+1)} \hbar$$

con

$$s = \frac{1}{2}$$

e analogamente al momento della quantità di moto orbitale, la componente lungo un asse di polarizzazione vale

$$S_z = m_s \hbar$$

dove

$$m_s = \pm \frac{1}{2}$$

Il momento angolare intrinseco viene ipotizzato per la prima volta nel 1925: come per il momento angolare orbitale, questo genera un momento magnetico, la cui espressione è la seguente:

$$\vec{\mu} = -\frac{e}{m} \vec{S}$$

e per la componente lungo z :

$$\mu_z = -\frac{e}{m} S_z = \pm \frac{e}{m} \hbar 2 = \pm \mu_B$$

vediamo che il coefficiente che lega il momento angolare intrinseco S al momento magnetico μ , detto rapporto giromagnetico e/m , differisce di un fattore 2 a denominatore dal corrispondente coefficiente che lega il momento orbitale al momento magnetico orbitale ($e/2m$). Vedremo come questi 2 momenti magnetici interagiscono e l'influenza di questo fattore 2 nell'espressione $\vec{\mu} = -\frac{e}{2m}(\vec{L} + 2\vec{S})$.

8.1 Principio di esclusione di Pauli

Il principio di esclusione di Pauli deriva dalle proprietà dell'equazione di Schrödinger, in particolare dalla sua proprietà di antisimmetria, e dice che in un sistema con più fermioni (indicando con fermioni gli elettroni, protoni, neutroni), 2 fermioni diversi non possono avere la stessa sequenza di numeri quantici.

8.2 Il punto della situazione

Abbiamo definito fin'ora:

- n numero quantico principale
- l numero quantico orbitale
- m_l numero quantico magnetico orbitale
- s numero quantico intrinseco
- m_s numero quantico magnetico intrinseco

L'ultimo numero quantico introdotto (di spin) non è previsto dalla equazione di Schrödinger, bisognerà aspettare Dirac per una formulazione più formale.

8.2.1 Limiti del modello semplificato di Bohr

Il modello semplificato di Bohr può essere esteso ad atomi con più elettroni, nel cosiddetto modello a strati, in cui ogni elettrone “schermata” completamente gli elettroni degli strati successivi: questo modello a strati, o a cipolla, non è verificato sperimentalmente, in quanto i vari livelli degli elettroni in realtà non sono completamente separati, ma si compenetrano l'uno con l'altro.

ad esempio, già per il Litio, con $Z=3$, vediamo che l'orbitale $2s$ è parzialmente sovrapposto all'orbitale $1s$, cioè non ho schermatura completa tra i livelli.

Inoltre anche l'occupazione dei livelli avviene in una sequenza non banale:

$1s, 2s, 2p, 3s, 3p, 4s, 3d, 4p, \dots$

vediamo cioè che in realtà l'energia dell'orbitale $4s$ è inferiore all'energia dell'orbitale $3d$.

8.3 Elio, paraelio e ortoelio

L'elio si trova in una configurazione con 2 elettroni al livello $1s$: i 2 elettroni hanno numero quantico $m_s = \pm 1/2$.

n	l	m_l	m_s
1	0	0	1/2
1	0	0	-1/2

Nel caso un elettrone venga eccitato, nel suo stato eccitato potrà assumere $m_s = 1/2$ o $m_s = -1/2$: questi due diversi stati di eccitazione vengono definiti paraelio (quando gli spin dei 2 elettroni sono paralleli) o ortoelio (nell'altro caso).

L'energia di ionizzazione (per togliere un elettrone) è pari a 24.6 eV, che nel modello a strati di Bohr corrisponderebbe ad un $Z=1.34$, indice che la schermatura di uno degli elettroni sull'altro è parziale. L'energia di seconda ionizzazione, per togliere anche il secondo elettrone, è pari a 54.24 eV, e corrisponde a $Z = 2$, infatti a questo punto non vi sono più effetti di schermatura parziali di cui tenere conto.

8.4 Ancora sull'effetto Zeeman

Ricordiamo che l'energia potenziale magnetica si può scrivere come

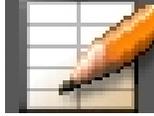
$$U_m = \mu_z \cdot B$$

dove

$$\mu_z = \frac{e\hbar}{2m} m_l = \mu_B m_l$$

quindi la differenza di energia tra 2 livelli successivi è

$$\Delta E = \frac{e\hbar}{2m} B$$



ESERCIZIO: Effetto Zeeman

Si disponga di uno spettrometro con $\Delta\lambda = 0.5\text{\AA}$ ad una $\lambda = 5000\text{\AA}$. Qual'è il valore minimo di B che consente di osservare l'effetto Zeeman?

$$\Delta E = \frac{e\hbar}{2m} B = \mu_B B$$

$$E = \frac{hc}{\lambda} \rightarrow \delta E = \frac{hc}{\lambda^2} \delta\lambda$$

da cui

$$\frac{\delta\lambda}{\lambda} = \frac{\lambda \delta E}{hc}$$

e infine

$$B = \frac{d\lambda}{\lambda} \frac{hc}{\lambda} \left(\frac{2m}{e\hbar} \right) = 4.28T$$

Questo è il valore minimo di B, che consente di generare una separazione nelle linee spettrali osservabile con lo spettrometro di cui si dispone.

Ovviamente per valori del campo magnetico B maggiori, la separazione delle linee è maggiore, e quindi più facilmente osservabile.

◇◇◇



ESERCIZIO:

Calcolare il campo magnetico B al centro dell'"orbita" di un elettrone con $n=2$.

**ESERCIZIO: Effetto Zeeman**

La riga del Ca ($Z=20$) che si osserva per $\lambda = 4226 \text{ \AA}$ si divide in 3 righe separate da 0.25 \AA in un campo magnetico $B=3 \text{ T}$. Ricavare il rapporto e/m

Dalla relazione trovata precedentemente

$$\frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{\lambda}{hc} \frac{e\hbar}{2m} B$$

si ricava

$$\frac{e}{m} = 1.76 \cdot 10^{11} \text{ C/Kg}$$

**ESERCIZIO:**

Dato un atomo, in una transizione $l=2 \rightarrow 1$, che produca una riga $\lambda = 5000 \text{ \AA}$ con $B=0$, applicando $B=0.6 \text{ T}$, quante righe si osservano e per quali valori di λ ?

**ESERCIZIO:**

Si determini la massima separazione di un fascio di H che percorre $d=20 \text{ cm}$ con velocità $v = 2 \cdot 10^5 \text{ m/s}$, perpendicolarmente ad

un campo B con $\partial B/\partial Z = 2 \cdot 10^2 T/m$ (si trascuri il momento magnetico del protone)

Il fascio si sdoppia a causa dell'effetto dello spin dell'atomo:

$$f = \frac{\partial U}{\partial z} = \mu_z \frac{\partial B}{\partial z} = \frac{e}{m} S_z \frac{\partial B}{\partial z} = \frac{e\hbar}{m} m_s \frac{\partial B}{\partial z} = \pm \frac{e\hbar}{2m} \frac{\partial B}{\partial z}$$

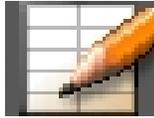
ma

$$s = \frac{1}{2} at^2 = \frac{1}{2} \frac{F}{m} \left(\frac{d}{v} \right)^2$$

quindi

$$s = \frac{1}{2} \frac{e\hbar}{2m^2} \frac{\partial B}{\partial z} \left(\frac{d}{v} \right)^2 = 0.17 mm$$

◇◇◇



ESERCIZIO: Riga 21 cm

La riga a 21cm dell'H, usata per ricostruire la mappa della galassia, è dovuta al rovesciamento dello spin dell'elettrone rispetto allo spin del protone. Di quale valore di B risente l'elettrone?

Se ΔE è dovuto al fatto che l'elettrone risente di un campo magnetico, allora

$$\Delta E = 2 \frac{e\hbar}{2m} B$$

infatti lo spin lungo l'asse è $S_z = m_s \hbar$, con $m_s = \pm 1/2$ e

$$\mu_s = - \frac{e}{m} m_s \hbar$$

da cui

$$\Delta E = 2 \frac{e\hbar}{2m} B$$

è la differenza tra 2 livelli energetici.

Ricordando che $\lambda = \frac{hc}{E}$,

$$B = \frac{2hc m}{2e\lambda\hbar} = \frac{2\pi c m}{\lambda e} = 0.05T$$

Si tratta di un piccolo campo magnetico, infatti piccole sono anche le energie in gioco: $\Delta E = \frac{hc}{\lambda} = 5.9 \cdot 10^{-6} eV$.

◇◇◇



ESERCIZIO: Principio di esclusione — La buca di potenziale

Siano presenti un numero di elettroni pari a $N/L = 5 \cdot 10^9$ elettroni/metro in una buca di potenziale: se siamo in condizione stazionaria, qual'è l'energia dell'elettrone più energetico? (Si applica il principio di esclusione di Pauli)

L'energia dei vari livelli vale:

$$E_n = \frac{n^2 h^2}{8mL}$$

dove L è la dimensione della scatola.

In ogni stato vi sono 2 elettroni, allora

$$N/L = 2n/L$$

per cui

$$E_n = \left(\frac{n}{L}\right)^2 \frac{h^2 L}{8m} = \frac{1}{4} \left(\frac{N}{L}\right)^2 \frac{h^2}{8m} = 2.35 eV$$

◇◇◇



ESERCIZIO: Principio di esclusione

Si consideri il nucleo come una buca di potenziale unidimensionale (una scatola con $L = 10^{-15} m$): se c'è un neutrone ogni $10^{-15} m$, Qual'è l'energia dell'elettrone più energetico?

◇◇◇

Capitolo 9

Momento totale

17/6/2003

18/6/2003

9.1 Lo spin e il momento magnetico intrinseco



Le interazioni tra momenti e campi magnetici

Molte¹ delle righe dello spettro di emissione² di diversi elementi, tra i quali anche l'idrogeno, mostrano una struttura fine, sono cioè costituite da due righe la cui differenza di lunghezza d'onda è una frazione di nm. Ad esempio la prima riga della serie di Balmer dell'idrogeno, la riga L con $\lambda = 656,3nm$, è costituita in realtà da due righe la cui differenza di lunghezza d'onda è $\lambda = 0.14nm$. L'ipotesi dello spin, introdotta da Goudsmit e Uhlenbeck nel 1925, è in grado di spiegare questo fenomeno.

Ogni elettrone è dotato di uno spin, un momento della quantità di moto intrinseco, $S = \sqrt{s(s+1)}\hbar$ dove $s = 1/2$ la cui proiezione su di un generico asse, in analogia con il momento della quantità di moto orbitale, si esprime come $S_z = m_s\hbar$. I valori possibili di m_s sono $m_s = \pm 1/2$. Associato allo spin l'elettrone mostra un momento di dipolo magnetico intrinseco che si esprime come:

$$\mu_s = -(e/m)S$$

e la sua componente z è $\mu_{s,z} = -(e/m)S_z = \pm(e\hbar/2m) = \pm\mu_B$.

¹Manca lezione 17/6/2003

²Vedi dispense: Le interazioni tra momenti e campi magnetici

Si noti che il rapporto giromagnetico nel caso del moto orbitale è $-e/2m$, mentre nel caso dello spin è $-e/m$, cioè esattamente il doppio.

L'interazione spin-orbita

Il moto di un elettrone in un'orbita attorno al nucleo atomico, è origine di un campo magnetico, così come avviene in una piccola spira. Il suo valore al centro dell'orbita, si può esprimere come

$$B = \frac{\mu_0 e}{2r_n T}$$

dove T rappresenta il periodo caratteristico di rivoluzione dell'orbita e può essere espresso come $T = \frac{2\pi r_n}{v_n}$.

Lo stesso elettrone, dotato di momento di dipolo magnetico, interagisce con il campo magnetico prodotto, modificando il suo stato energetico.

$$U_m = -\vec{\mu}_s \cdot \vec{B} = (e/m)S_z B$$

Il valore del campo magnetico locale può raggiungere anche valori elevati, vicini ad 0.1-1 T, modificando i livelli energetici a tal punto da giustificare la separazione osservata delle righe spettrali.

Il momento della quantità di moto (o angolare) totale

Ad ogni elettrone in una struttura atomica è associato un momento angolare L ed uno spin S che contribuiscono entrambi al momento angolare totale dell'atomo. In particolare gli elementi del primo gruppo della tabella periodica possiedono un solo elettrone esterno che determina il momento angolare totale $J = L + S$ del sistema.

Anche J è quantizzato allo stesso modo e quindi si esprime in funzione di un numero quantico j come $|J| = \sqrt{j(j+1)}$ e la sua componente J_z lungo un asse di quantizzazione si esprime con $J_z = m_j$ dove m_j assume i valori $m_j = \pm j, \pm(j-1), \pm(j-2), \dots$

L'interazione tra il momento magnetico collegato a J ed un campo magnetico esterno è responsabile dell'effetto Zeeman anomalo dove si osserva una separazione di una linea spettrale in un numero pari di righe.



Abbiamo dunque visto che c'è un momento magnetico dovuto al momento orbitale ed uno dovuto al momento intrinseco: questi 2 momenti interagiscono tra di loro, e possiamo definire un momento somma dei 2:

$$\vec{J} = \vec{S} + \vec{L}$$

ed anche J è quantizzato con un numero quantico j

$$|\vec{J}| = \sqrt{j(j+1)}\hbar$$

e j può assumere valori da $l+s$ a $|l-s|$, ad esempio:

$$s = 1/2, l = 0 \rightarrow j = \pm 1/2$$

$$s = 1/2, l = 1 \rightarrow j = \pm 1/2, j = \pm 3/2$$

Analogamente ad L e S , la componente del momento lungo un asse z si può scrivere come:

$$J_z = m_j \hbar$$

con

$$m_j = \pm j, \pm(j-1) \dots$$

Abbiamo dunque questa nuova caratterizzazione della struttura atomica: cerchiamo di individuare alcune relazioni utili tra L , S , J .

9.1.1 $S \cdot L$

Troviamo l'espressione di $S \cdot L$:

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$$

$$|\vec{J}|^2 = |\vec{L}|^2 + |\vec{S}|^2 + 2\vec{S} \cdot \vec{L}$$

da cui

$$\vec{S} \cdot \vec{L} = \frac{1}{2}(|\vec{J}|^2 - |\vec{L}|^2 - |\vec{S}|^2)$$

e in funzione dei numeri quantici, ricordando che $|\vec{J}| = \sqrt{j(j+1)}\hbar$ e $|\vec{L}| = \sqrt{l(l+1)}\hbar$ e $|\vec{S}| = \sqrt{s(s+1)}\hbar$:

$$\vec{S} \cdot \vec{L} = \frac{1}{2}(j(j+1) - l(l+1) - s(s+1))\hbar^2$$

Esempio Sia

$$l = 1, s = 1/2$$

allora

$$j = 1/2, j = 3/2$$

per cui

$$\vec{S} \cdot \vec{L} = \frac{1}{2}\hbar^2$$

e

$$\vec{S} \cdot \vec{L} = -\hbar^2$$

Per cui dalla relazione già vista:

$$U_m = \left(-\frac{e}{m}\right) f(r) \vec{S} \cdot \vec{L} =$$

nel primo caso:

$$\left(-\frac{e}{m}\right) f(r) \frac{1}{2}\hbar^2$$

e nel secondo

$$\left(-\frac{e}{m}\right) f(r) (-\hbar^2)$$

cioè c'è una separazione dei livelli dovuta all'interazione spin-orbita.

Abbiamo quindi un momento angolare totale J , dato da 2 contributi, S e L , $\vec{J} = \vec{S} + \vec{L}$ quest'ultimi sono costanti in modulo, ma possono ruotare in maniera solidale, in modo da lasciare costante \vec{J} , e vale

$$\vec{S} \cdot \vec{L} = \frac{1}{2}(|\vec{J}|^2 - |\vec{L}|^2 - |\vec{S}|^2)$$

Lasciare costante \vec{J} significa infatti lasciare costante $\vec{S} \cdot \vec{L}$, e quindi l'angolo compreso tra di loro.



ESERCIZIO:

Si stima l'intensità del campo magnetico prodotto dal moto orbitale dell'elettrone esterno del sodio (Na, Z=11) che causa la separazione delle 2 righe D relative a $\lambda = 5889.95 \text{ \AA}$ e $\lambda = 5895.92 \text{ \AA}$, con $\Delta\lambda = 5.97 \text{ \AA}$.

L'elettrone esterno è caratterizzato da $n=3, l=0, s=1/2$. Le transizioni sono dovute al passaggio $n=3, l=1, s=1/2 \rightarrow n=3, l=0, s=1/2$. Vale

$$\Delta E = \frac{hc}{\lambda} \rightarrow \delta E = \frac{hc}{\lambda^2} \delta\lambda = 2.13 \cdot 10^{-3}$$

l'energia trovata è l'energia magnetica che si può scrivere come:

$$\delta E = \delta U_m = \frac{e}{m} \hbar B$$

da cui

$$B = 18.4 T$$

◇◇◇

19/6/2003

9.2 Momento totale e campi magnetici esterni

Abbiamo visto come \vec{J} si comporta relativamente a campi magnetici interni: vediamo ora come si comporta relativamente a campi magnetici esterni.

Ricordiamo le due relazioni per il momento magnetico orbitale ed il momento magnetico intrinseco:

$$\vec{\mu}_L = \left(-\frac{e}{2m}\right) \vec{L}$$

e

$$\vec{\mu}_S = \left(-\frac{e}{m}\right) \vec{S}$$

Quindi per il momento totale vale

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$$

$$\vec{\mu}_J = \vec{\mu}_L + \vec{\mu}_S = -\frac{e}{2m} (\vec{L} + 2\vec{S})$$

Vediamo dunque che $\vec{\mu}_J$ e \vec{J} non sono paralleli, quindi ho un moto di precessione di $\vec{\mu}$.

Abbiamo 2 situazioni

B interno \gg **B esterno** μ_j ruota molto più velocemente attorno a J, rispetto a alla velocità di rotazione attorno a B

B esterno \gg **B interno** Il campo B esterno rompe il legame tra \vec{S} e \vec{L} e ciascuno ruota indipendentemente attorno a B.

9.3 Effetto Zeeman anomalo

Si presenta nel caso in cui il campo B esterno è molto minore del campo B interno.

$$U_m = \vec{\mu} \cdot \vec{B} = \frac{e}{2m} (\vec{L} + 2\vec{S}) \cdot \vec{B}$$

Studiamo la proiezione di $\vec{\mu}$ lungo la direzione di \vec{J} , infatti l'oscillazione attorno \vec{J} è velocissima e si può ignorare.

$$U_m = \frac{e}{2m} (\vec{L} + 2\vec{S}) \cdot \frac{\vec{J}}{|\vec{J}|} \frac{\vec{J}}{|\vec{J}|} \cdot \vec{B}$$

$$U_m = \frac{e}{2m} \frac{(\vec{L} + 2\vec{S})(\vec{L} + 2\vec{S}) \cdot \vec{J}}{|\vec{J}|^2}$$

$$U_m = \frac{e}{2m} \frac{(|\vec{L}|^2 + 4|\vec{S}|^2 + 4\vec{L} \cdot \vec{S}) m_j \hbar B}{|\vec{J}|^2}$$

e ricordando le relazioni

$$|\vec{J}|^2 = j(j+1)\hbar^2$$

$$|\vec{L}|^2 = l(l+1)\hbar^2$$

$$|\vec{S}|^2 = s(s+1)\hbar^2$$

$$\vec{S} \cdot \vec{L} = \frac{1}{2}(j(j+1) - l(l+1) - s(s+1))\hbar^2$$

allora

$$U_m = \frac{e}{2m} g_L m_j \hbar B$$

dove g_L è il fattore di Landau, che vale

$$g_L = 1 + \frac{j(j+1) - l(l+1) + 2s(s+1)}{j(j+1)}$$

Abbiamo cioè ottenuto il valore dell'energia di separazione che è alla base del fenomeno osservato nell'effetto Zeeman anomalo.

Se il campo magnetico aumenta, l'effetto Zeeman anomalo scompare, e ciascun momento L e S interagisce con il campo magnetico indipendentemente: non si può più parlare di J .

$$U_m = -\mu_j B = \frac{e}{2m} (\vec{L} + 2\vec{S}) \cdot \vec{B} = \frac{e}{2m} (\vec{L} \cdot \vec{B}) + \frac{e}{m} \vec{S} \cdot \vec{B}$$

20/6/2003

Abbiamo dunque visto l'effetto Zeeman normale e anomalo: l'effetto Zeeman normale è formalizzato da

$$U_m = \mu_B m_l B$$

dove il numero quantico m_l varia da 0 a $\pm l$, per cui nell'effetto Zeeman normale ho un numero dispari di righe.

L'effetto Zeeman anomalo si presenta quando il campo magnetico esterno è piccolo rispetto al campo magnetico interno, ed è regolato dalla relazione:

$$U_m = \mu_B m_j g_L B$$

dove g_L è il fattore di Landau, ed m_j assume valori semiinteri, per cui ho un numero pari di righe.



NOTA:

Struttura iperfine Vi sono anche momenti dovuti al nucleo, e quindi vi sono interazioni con questi momenti: queste spiegano la struttura iperfine degli spettri, dovuta cioè all'interazione tra spin orbitale e momento del nucleo.

**ESERCIZIO: Effetto Zeeman anomalo**

Si colcoli l'energia di separazione dovuta all'effetto Zeeman anomalo degli strati $2s_{1/2}$, $2p_{1/2}$, $2s_{3/2}$, con $B = 0.05T$

Calcoliamo il fattore di Landau: vale

$$g_L = 2$$

$$g_L = 2/3$$

$$g_L = 4/3$$

da cui

$$\mu_m = \mu_b m_j g_L B$$

dove m_j vale 1/2 per i primi 2 casi, mentre per il terzo caso m_j vale 1/2 e 3/2, per cui ho 2 valori per U_m .

◇◇◇

9.4 Il punto della situazione

Abbiamo descritto la struttura atomica tramite una serie di numeri quantici: ricapitoliamo la situazione sui numeri quantici introdotti.

n	principale	$E_n = \frac{me^4}{8\epsilon_0^2 h^2} \frac{1}{n^2}$	
l	momento orbitale	$L = \sqrt{l(l+1)}\hbar$	$l = 0, 1, \dots, (n-1)$
m_l	magnetico	$L_z = m_l \hbar$	$m_l = 0, \pm 1, \dots, \pm l$
		$\mu = \frac{e}{2m} L$	
		$\mu_z = \frac{e\hbar}{2m} m_l$	
s	intrinseco	$\sqrt{s(s+1)}\hbar$	$s = \frac{1}{2}$
m_s	momento magnetico intrinseco	$\mu_z = \frac{e}{m} S_z$	$m_s = \pm \frac{1}{2}$
		$\mu_z = \frac{e\hbar}{m} m_s$	
j	momento totale	$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$	
		$J = \sqrt{j(j+1)}\hbar$	$j = l + s, l + s - 1, \dots, l - s $
m_j	momento magnetico totale	$J_z = m_j \hbar$	$m_j = \pm j, \pm(j-1), \dots, 0$

Capitolo 10

Richiami

Richiamiamo alcuni concetti, non strettamente legati al corso, ma la cui conoscenza è richiesta, in quanto si suppongono svolti in corsi precedenti o paralleli a questo.

10.1 Fenomeni ondulatori

Un fenomeno ondulatorio stazionario è così caratterizzato:

$$f(x, t) = A \sin(kx - \omega t) \quad (10.1)$$

dove

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (10.2)$$

è chiamato **numero d'onda**. Vale anche

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu \quad (10.3)$$

e la quantità

$$\frac{\omega}{k} = \lambda\nu = v_f \quad (10.4)$$

è detta **velocità di fase**.

Sia

$$f(x, t) = a \sin(kx - \omega t) + a \sin(kx + \omega t)$$

cioè considero la composizione di 2 moti ondulatori che si propagano in direzioni opposte: si può sviluppare questa espressione, ottenendo:

$$f(x, t) = 2a \sin kx \sin \omega t$$

si tratta di un moto ondulatorio (seconda parte dell'espressione $\sin \omega t$) modulato in ampiezza (prima parte: $\sin kx$). Ho quindi una serie di nodi in cui l'ampiezza si azzera, in particolare

$$\frac{2\pi}{\lambda}x = kx = n\pi \quad \rightarrow \quad x = n\frac{\lambda}{2}$$

cioè l'ampiezza si azzera per

$$\boxed{x = n\frac{\lambda}{2}} \quad (10.5)$$

10.2 Relazioni relativistiche

8/5/2003

Per affrontare lo studio dell'effetto Compton, è necessario richiamare alcuni concetti di meccanica relativistica, in particolare in riferimento alla **conservazione dell'energia e della quantità di moto**.

Siano $\boxed{1}$ e $\boxed{2}$ due corpi prima di una interazione, e $\boxed{1'}$ e $\boxed{2'}$ gli stessi corpi dopo l'interazione. Dal punto di vista classico vale la **conservazione della quantità di moto** espressa da

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1 \vec{v}_1' + m_2 \vec{v}_2'$$

e, nel caso di **urto elastico**, vale la **conservazione dell'energia**:

$$m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 = m_1 v_1'^2 + m_2 v_2'^2$$

mentre se l'urto non è elastico possiamo avere una relazione del tipo

$$m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 = m_1 v_1'^2 + m_2 v_2'^2 + E$$

dove E può essere:

- ΔU , cioè variazione di energia potenziale
- $-\mathcal{L}_{attrito}$, cioè lavoro d'attrito
- $-\Delta E$, cioè variazione dell'energia cinetica

PROBLEMA (per la fisica classica): Se m cambia, cioè i corpi diventano qualcos'altro possiamo dire $m_1 + m_2 = m'_1 + m'_2$? Può essere valido se c'è semplicemente un trasferimento di massa, ma se i corpi interagenti si trasformano in qualcosa di diverso, come ad esempio un neutrone che decade in altre particelle, la somma delle masse finali è diversa dalla massa iniziale.

La descrizione relativistica tiene conto di questi fenomeni.

10.2.1 Conservazione della quantità di moto (relativistica)

Consideriamo la quantità di moto

$$p = mv$$

in una sola dimensione, sia

$$\beta = \frac{v}{c} \quad (10.6)$$

e

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (10.7)$$

allora possiamo scrivere

$$p = m\beta c\gamma$$

e nel caso che $v \ll c$ si ritorna alla definizione classica.

Il principio di conservazione della quantità di moto è valido in senso relativistico con questa definizione di p .

10.2.2 Conservazione dell'energia

L'energia cinetica

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2$$

viene modificata relativisticamente in

$$E_k = m(\gamma - 1)c^2$$

vediamo che anche in questo caso per velocità piccole si ritorna alla definizione classica.

L'energia totale di un corpo ha un contributo dovuto all'energia della massa a riposo, per cui

$$E = E_k + mc^2 = m\gamma c^2 \quad (10.8)$$

10.2.3 Relazione tra energia cinetica e quantità di moto

Classicamente si poteva scrivere la seguente relazione:

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m}$$

in maniera analoga si può scrivere, relativisticamente:

$$E^2 = (mc^2)^2 = (m_o\gamma c^2)^2 = \frac{m_o^2 c^4}{1 - (v/c)^2}$$

$$m^2 c^4 - (m^2 c^4) \frac{v^2}{c^2} = m_o^2 c^4$$

$$(mc^2)^2 = m_o^2 c^4 + (mv)^2 c^2$$

dunque

$$\boxed{E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4} \quad (10.9)$$

Capitolo 11

Fenomeni e Teorie

In fisica esistono molte teorie, e fondamentale in ogni teoria è la propria coerenza interna, ma ugualmente fondamentale è l'aderenza della teoria ai fenomeni osservati.

A volte da un fenomeno *strano* si costruisce una teoria che lo spiega, a volte da una teoria si traggono delle conclusioni, e poi si cerca sperimentalmente di verificarle. In questo capitolo si cerca di evidenziare in maniera molto sintetica il collegamento fra le teorie e gli esperimenti.

In fisica ogni teoria descrive un modello di un qualche fenomeno, ma, per quanto le teoria sia bella, verificata, riconosciuta valida da tutti, è sempre bene tener presente che si tratta della descrizione di un modello, e possono sempre presentarsi nuove esperienze che mostrano come una teoria sia o sbagliata, o limitata ad un ambito ristretto.

Emissione del Corpo Nero dopo vari tentativi per spiegare la legge di emissione del corpo nero, Planck ha introdotto l'ipotesi rivoluzionaria (ed anche per nulla intuitiva) che **l'energia sia emessa quantizzata**

legge di Rayleigh-Jeans Derivata da considerazioni classiche e ben accettate, ma in contrasto con le verifiche sperimentali

Effetto fotoelettrico per spiegare l'effetto fotoelettrico, Einstein ha introdotto l'ipotesi che **i quanti di energia permangono come tali nel campo di radiazione elettromagnetica**. L'ipotesi quantistica di Planck riceve ulteriori conferme da fenomeni completamente diversi da quello per la cui spiegazione era stata introdotta.

Effetto Compton Verifica della natura corpuscolare dei fotoni: sono particelle dotate di quantità di moto.

Esperienza di Rutherford dimostra che l'atomo ha un nucleo massivo.

Modello di Thomson dell'atomo viene scartato in quanto entra in contraddizione con i dati sperimentali

Spettri di emissione a righe e atomo con un nucleo massivo ipotesi di Bohr, relativa alla **quantizzazione del momento angolare orbitale** e **modello atomico di Bohr**

Modello di Bohr una delle prime conferme è la derivazione della formula di Rydberg (empirica) dal modello di Bohr.

Spettri di emissione: struttura fine viene spiegata ipotizzando lo **spin**

Capitolo 12

Costanti fisiche

c	299792458	m/s	Velocità della luce
ϵ_o	$8.854 \cdot 10^{-12}$	$C^2 N^{-1} m^{-2}$	C. dielettrica del vuoto
k	$1.380 \cdot 10^{-23}$	JK^{-1}	C. di Boltzmann
e	$1.602 \cdot 10^{-19}$	C	Carica dell'elettrone
h	$6.626 \cdot 10^{-34}$	$J \cdot s$	C. di Planck
ϵ	$2.897 \cdot 10^{-3}$	$m \cdot K$	C. di Wien
σ	$5.670 \cdot 10^{-8}$	$W m^{-2} K^{-4}$	C. di Stefan-Boltzmann
R_∞	10973731.534	m^{-1}	C. di Rydberg $\frac{\mu_o^2 c^3 m_e e^4}{8h^3}$
a_o	$5.29 \cdot 10^{-11}$	m	Raggio di Bohr $\frac{\mu_o c e^2}{8\pi h R_{inf}}$
hc	$1.24 \cdot 10^{-6}$		
$\frac{m_e^4}{8\epsilon_o^2 h^2}$	13.6	eV	Energia di legame allo stato fondamentale dell'H
μ_B	$9.2740 \cdot 10^{-24}$	J/T	Magnetone di Bohr, $\frac{e\hbar}{2m_e}$

Capitolo 13

Formule

Onde $k = \frac{2\pi}{\lambda}$
 $\omega = \frac{2\pi}{T}$
 $v_{fase} = \frac{\omega}{k}$
 $v_{fase} = \lambda\nu$
 $E = h\nu$
 $I = \sigma T^4$
 $\lambda_{MAX}T = \epsilon$
 $u(\lambda)d\lambda = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \frac{d\lambda}{e^{\frac{hc}{\lambda T}} - 1}$
 $h\nu = eV_o + \Phi$
 $E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$
 $\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c} (1 - \cos \theta)$
 $\frac{1}{\lambda} = R_H \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{j^2} \right)$

Bohr $L_n = n \frac{h}{2\pi}$
 $K_n = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_o} \frac{1}{2r_n}$
 $r_n = \frac{\epsilon_o h^2}{\pi m e^2} n^2 = a_o n^2$
 $E_n = \frac{m e^4}{8\epsilon_o^2 h^2} \frac{1}{n^2}$
 $\frac{1}{\lambda} = \frac{m e^4}{8\epsilon_o^2 h^3 c} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{j^2} \right)$

De Broglie $\lambda p = h$

Heisenberg $\Delta x \Delta p >= \frac{h}{2\pi}$

Capitolo 14

The Small print

Pare che al giorno d'oggi tutto sia coperto da copyright e che i brevetti vengano dati per le cose più impensate, e se di qualcosa non si vede dichiarato esplicitamente il copyright a cui è soggetta ci si pone mille domande sul fatto che si possa o meno usare: la mia idea è che il presente lavoro possa essere utilizzato liberamente da chi lo ritiene interessante o utile, e se qualcuno lo vuole integrare, modificare, correggere è il benvenuto.

Quanto segue dovrebbe essere la formalizzazione di questa mia intenzione: se volete leggere tutto il “Small Print”, dall’inizio alla fine, con attenzione, e magari vi divertite a farlo, forse dovrete considerare di studiare legge invece di fisica...

GNU GENERAL PUBLIC LICENSE
Version 2, June 1991

Copyright (C) 1989, 1991 Free Software Foundation, Inc.
59 Temple Place, Suite 330, Boston, MA 02111-1307 USA
Everyone is permitted to copy and distribute verbatim copies
of this license document, but changing it is not allowed.

Preamble

The licenses for most software are designed to take away your freedom to share and change it. By contrast, the GNU General Public License is intended to guarantee your freedom to share and change free software--to make sure the software is free for all its users. This General Public License applies to most of the Free Software Foundation's software and to any other program whose authors commit to using it. (Some other Free Software Foundation software is covered by the GNU Library General Public License instead.) You can apply it to your programs, too.

When we speak of free software, we are referring to freedom, not price. Our General Public Licenses are designed to make sure that you have the freedom to distribute copies of free software (and charge for this service if you wish), that you receive source code or can get it if you want it, that you can change the software or use pieces of it in new free programs; and that you know you can do these things.

To protect your rights, we need to make restrictions that forbid anyone to deny you these rights or to ask you to surrender the rights. These restrictions translate to certain responsibilities for you if you distribute copies of the software, or if you modify it.

For example, if you distribute copies of such a program, whether gratis or for a fee, you must give the recipients all the rights that you have. You must make sure that they, too, receive or can get the source code. And you must show them these terms so they know their rights.

We protect your rights with two steps: (1) copyright the software, and (2) offer you this license which gives you legal permission to copy, distribute and/or modify the software.

Also, for each author's protection and ours, we want to make certain that everyone understands that there is no warranty for this free software. If the software is modified by someone else and passed on, we want its recipients to know that what they have is not the original, so that any problems introduced by others will not reflect on the original authors' reputations.

Finally, any free program is threatened constantly by software patents. We wish to avoid the danger that redistributors of a free program will individually obtain patent licenses, in effect making the program proprietary. To prevent this, we have made it clear that any patent must be licensed for everyone's free use or not licensed at all.

The precise terms and conditions for copying, distribution and modification follow.

GNU GENERAL PUBLIC LICENSE
TERMS AND CONDITIONS FOR COPYING, DISTRIBUTION AND MODIFICATION

0. This License applies to any program or other work which contains a notice placed by the copyright holder saying it may be distributed under the terms of this General Public License. The "Program", below, refers to any such program or work, and a "work based on the Program" means either the Program or any derivative work under copyright law: that is to say, a work containing the Program or a portion of it, either verbatim or with modifications and/or translated into another language. (Hereinafter, translation is included without limitation in the term "modification".) Each licensee is addressed as "you".

Activities other than copying, distribution and modification are not covered by this License; they are outside its scope. The act of running the Program is not restricted, and the output from the Program is covered only if its contents constitute a work based on the Program (independent of having been made by running the Program). Whether that is true depends on what the Program does.

1. You may copy and distribute verbatim copies of the Program's source code as you receive it, in any medium, provided that you conspicuously and appropriately publish on each copy an appropriate copyright notice and disclaimer of warranty; keep intact all the notices that refer to this License and to the absence of any warranty; and give any other recipients of the Program a copy of this License along with the Program.

You may charge a fee for the physical act of transferring a copy, and you may at your option offer warranty protection in exchange for a fee.

2. You may modify your copy or copies of the Program or any portion of it, thus forming a work based on the Program, and copy and distribute such modifications or work under the terms of Section 1 above, provided that you also meet all of these conditions:

- a) You must cause the modified files to carry prominent notices stating that you changed the files and the date of any change.
- b) You must cause any work that you distribute or publish, that in whole or in part contains or is derived from the Program or any part thereof, to be licensed as a whole at no charge to all third parties under the terms of this License.
- c) If the modified program normally reads commands interactively when run, you must cause it, when started running for such interactive use in the most ordinary way, to print or display an announcement including an appropriate copyright notice and a notice that there is no warranty (or else, saying that you provide a warranty) and that users may redistribute the program under

these conditions, and telling the user how to view a copy of this License. (Exception: if the Program itself is interactive but does not normally print such an announcement, your work based on the Program is not required to print an announcement.)

These requirements apply to the modified work as a whole. If identifiable sections of that work are not derived from the Program, and can be reasonably considered independent and separate works in themselves, then this License, and its terms, do not apply to those sections when you distribute them as separate works. But when you distribute the same sections as part of a whole which is a work based on the Program, the distribution of the whole must be on the terms of this License, whose permissions for other licensees extend to the entire whole, and thus to each and every part regardless of who wrote it.

Thus, it is not the intent of this section to claim rights or contest your rights to work written entirely by you; rather, the intent is to exercise the right to control the distribution of derivative or collective works based on the Program.

In addition, mere aggregation of another work not based on the Program with the Program (or with a work based on the Program) on a volume of a storage or distribution medium does not bring the other work under the scope of this License.

3. You may copy and distribute the Program (or a work based on it, under Section 2) in object code or executable form under the terms of Sections 1 and 2 above provided that you also do one of the following:

- a) Accompany it with the complete corresponding machine-readable source code, which must be distributed under the terms of Sections 1 and 2 above on a medium customarily used for software interchange; or,
- b) Accompany it with a written offer, valid for at least three years, to give any third party, for a charge no more than your cost of physically performing source distribution, a complete machine-readable copy of the corresponding source code, to be distributed under the terms of Sections 1 and 2 above on a medium customarily used for software interchange; or,
- c) Accompany it with the information you received as to the offer to distribute corresponding source code. (This alternative is allowed only for noncommercial distribution and only if you received the program in object code or executable form with such an offer, in accord with Subsection b above.)

The source code for a work means the preferred form of the work for making modifications to it. For an executable work, complete source code means all the source code for all modules it contains, plus any associated interface definition files, plus the scripts used to control compilation and installation of the executable. However, as a special exception, the source code distributed need not include anything that is normally distributed (in either source or binary form) with the major components (compiler, kernel, and so on) of the operating system on which the executable runs, unless that component itself accompanies the executable.

If distribution of executable or object code is made by offering access to copy from a designated place, then offering equivalent access to copy the source code from the same place counts as distribution of the source code, even though third parties are not compelled to copy the source along with the object code.

4. You may not copy, modify, sublicense, or distribute the Program except as expressly provided under this License. Any attempt otherwise to copy, modify, sublicense or distribute the Program is void, and will automatically terminate your rights under this License. However, parties who have received copies, or rights, from you under this License will not have their licenses terminated so long as such parties remain in full compliance.

5. You are not required to accept this License, since you have not signed it. However, nothing else grants you permission to modify or distribute the Program or its derivative works. These actions are prohibited by law if you do not accept this License. Therefore, by modifying or distributing the Program (or any work based on the

Program), you indicate your acceptance of this License to do so, and all its terms and conditions for copying, distributing or modifying the Program or works based on it.

6. Each time you redistribute the Program (or any work based on the Program), the recipient automatically receives a license from the original licensor to copy, distribute or modify the Program subject to these terms and conditions. You may not impose any further restrictions on the recipients' exercise of the rights granted herein. You are not responsible for enforcing compliance by third parties to this License.

7. If, as a consequence of a court judgment or allegation of patent infringement or for any other reason (not limited to patent issues), conditions are imposed on you (whether by court order, agreement or otherwise) that contradict the conditions of this License, they do not excuse you from the conditions of this License. If you cannot distribute so as to satisfy simultaneously your obligations under this License and any other pertinent obligations, then as a consequence you may not distribute the Program at all. For example, if a patent license would not permit royalty-free redistribution of the Program by all those who receive copies directly or indirectly through you, then the only way you could satisfy both it and this License would be to refrain entirely from distribution of the Program.

If any portion of this section is held invalid or unenforceable under any particular circumstance, the balance of the section is intended to apply and the section as a whole is intended to apply in other circumstances.

It is not the purpose of this section to induce you to infringe any patents or other property right claims or to contest validity of any such claims; this section has the sole purpose of protecting the integrity of the free software distribution system, which is implemented by public license practices. Many people have made generous contributions to the wide range of software distributed through that system in reliance on consistent application of that system; it is up to the author/donor to decide if he or she is willing to distribute software through any other system and a licensee cannot impose that choice.

This section is intended to make thoroughly clear what is believed to be a consequence of the rest of this License.

8. If the distribution and/or use of the Program is restricted in certain countries either by patents or by copyrighted interfaces, the original copyright holder who places the Program under this License may add an explicit geographical distribution limitation excluding those countries, so that distribution is permitted only in or among countries not thus excluded. In such case, this License incorporates the limitation as if written in the body of this License.

9. The Free Software Foundation may publish revised and/or new versions of the General Public License from time to time. Such new versions will be similar in spirit to the present version, but may differ in detail to address new problems or concerns.

Each version is given a distinguishing version number. If the Program specifies a version number of this License which applies to it and "any later version", you have the option of following the terms and conditions either of that version or of any later version published by the Free Software Foundation. If the Program does not specify a version number of this License, you may choose any version ever published by the Free Software Foundation.

10. If you wish to incorporate parts of the Program into other free programs whose distribution conditions are different, write to the author to ask for permission. For software which is copyrighted by the Free Software Foundation, write to the Free Software Foundation; we sometimes make exceptions for this. Our decision will be guided by the two goals of preserving the free status of all derivatives of our free software and of promoting the sharing and reuse of software generally.

NO WARRANTY

11. BECAUSE THE PROGRAM IS LICENSED FREE OF CHARGE, THERE IS NO WARRANTY

FOR THE PROGRAM, TO THE EXTENT PERMITTED BY APPLICABLE LAW. EXCEPT WHEN OTHERWISE STATED IN WRITING THE COPYRIGHT HOLDERS AND/OR OTHER PARTIES PROVIDE THE PROGRAM "AS IS" WITHOUT WARRANTY OF ANY KIND, EITHER EXPRESSED OR IMPLIED, INCLUDING, BUT NOT LIMITED TO, THE IMPLIED WARRANTIES OF MERCHANTABILITY AND FITNESS FOR A PARTICULAR PURPOSE. THE ENTIRE RISK AS TO THE QUALITY AND PERFORMANCE OF THE PROGRAM IS WITH YOU. SHOULD THE PROGRAM PROVE DEFECTIVE, YOU ASSUME THE COST OF ALL NECESSARY SERVICING, REPAIR OR CORRECTION.

12. IN NO EVENT UNLESS REQUIRED BY APPLICABLE LAW OR AGREED TO IN WRITING WILL ANY COPYRIGHT HOLDER, OR ANY OTHER PARTY WHO MAY MODIFY AND/OR REDISTRIBUTE THE PROGRAM AS PERMITTED ABOVE, BE LIABLE TO YOU FOR DAMAGES, INCLUDING ANY GENERAL, SPECIAL, INCIDENTAL OR CONSEQUENTIAL DAMAGES ARISING OUT OF THE USE OR INABILITY TO USE THE PROGRAM (INCLUDING BUT NOT LIMITED TO LOSS OF DATA OR DATA BEING RENDERED INACCURATE OR LOSSES SUSTAINED BY YOU OR THIRD PARTIES OR A FAILURE OF THE PROGRAM TO OPERATE WITH ANY OTHER PROGRAMS), EVEN IF SUCH HOLDER OR OTHER PARTY HAS BEEN ADVISED OF THE POSSIBILITY OF SUCH DAMAGES.

END OF TERMS AND CONDITIONS

How to Apply These Terms to Your New Programs

If you develop a new program, and you want it to be of the greatest possible use to the public, the best way to achieve this is to make it free software which everyone can redistribute and change under these terms.

To do so, attach the following notices to the program. It is safest to attach them to the start of each source file to most effectively convey the exclusion of warranty; and each file should have at least the "copyright" line and a pointer to where the full notice is found.

```
<one line to give the program's name and a brief idea of what it does.>
Copyright (C) <year> <name of author>
```

```
This program is free software; you can redistribute it and/or modify
it under the terms of the GNU General Public License as published by
the Free Software Foundation; either version 2 of the License, or
(at your option) any later version.
```

```
This program is distributed in the hope that it will be useful,
but WITHOUT ANY WARRANTY; without even the implied warranty of
MERCHANTABILITY or FITNESS FOR A PARTICULAR PURPOSE. See the
GNU General Public License for more details.
```

```
You should have received a copy of the GNU General Public License
along with this program; if not, write to the Free Software
Foundation, Inc., 59 Temple Place, Suite 330, Boston, MA 02111-1307 USA
```

Also add information on how to contact you by electronic and paper mail.

If the program is interactive, make it output a short notice like this when it starts in an interactive mode:

```
Gnomovision version 69, Copyright (C) year name of author
Gnomovision comes with ABSOLUTELY NO WARRANTY; for details type 'show w'.
This is free software, and you are welcome to redistribute it
under certain conditions; type 'show c' for details.
```

The hypothetical commands 'show w' and 'show c' should show the appropriate parts of the General Public License. Of course, the commands you use may be called something other than 'show w' and 'show c'; they could even be mouse-clicks or menu items--whatever suits your program.

You should also get your employer (if you work as a programmer) or your school, if any, to sign a "copyright disclaimer" for the program, if necessary. Here is a sample; alter the names:

```
Yoyodyne, Inc., hereby disclaims all copyright interest in the program
'Gnomovision' (which makes passes at compilers) written by James Hacker.
```

```
<signature of Ty Coon>, 1 April 1989
Ty Coon, President of Vice
```

This General Public License does not permit incorporating your program into

proprietary programs. If your program is a subroutine library, you may consider it more useful to permit linking proprietary applications with the library. If this is what you want to do, use the GNU Library General Public License instead of this License.

Elenco delle figure

2.1	Spettro di emissione del corpo nero	8
2.2	Pressione di Radiazione	10
2.3	Il ciclo di Carnot considerato nella deduzione della legge di Stefan-Boltzmann	11
2.4	Contronto tra andamento sperimentale dello spettro e quello previsto dalla “catastrofe ultravioletta”	15
3.1	Dispositivo per lo studio dell’effetto fotoelettrico	22
3.2	Grafico frequenza contro potenziale d’arresto	24
3.3	L’elettrone che “salta fuori” dalla sua buca	25
4.1	Dai diagrammi originali di Compton, pubblicati su Physical Review del 1923	31
4.2	Interazione tra fotone ed elettrone	32
4.3	Un fotone in “caduta libera”	38
5.1	Angolo di diffusione nell’esperimento Rutherford	42
5.2	Angolo di diffusione nel Modello di Thomson	45
5.3	Andamento V/i nell’esperimento di Franck-Hertz	55
5.4	Spettro dei Raggi X	58
6.1	Un pacchetto d’onda	79

Indice

1	Introduzione	5
2	Il corpo nero	7
2.1	Radiazione termica	7
2.2	La legge di Stefan-Boltzmann	8
2.2.1	Pressione di radiazione	8
2.2.2	Deduzione della legge di Stefan-Boltzmann	11
2.3	La legge di Wien	13
2.4	La legge di Planck sull'emissione	13
2.4.1	La legge di Rayleigh-Jeans	13
2.4.2	L'ipotesi di Planck	15
2.4.3	Il punto della situazione	17
3	Effetto Fotoelettrico	21
3.1	Il punto della situazione	27
4	Effetto Compton	29
4.1	Raggi X	30
4.2	L'esperimento	30
4.3	Fotoni e gravità	37
5	La struttura atomica	41
5.1	L'esperimento di Rutherford	41
5.1.1	Il modello di Thomson	44
5.1.2	Diametri nucleari	46
5.2	Spettri atomici	48
5.3	Il modello di Bohr	48
5.3.1	Le transizioni	50
5.4	Il punto della situazione	50
5.5	Esperienza di Franck-Hertz	55

5.6	Raggi X	57
5.7	La legge di Moseley	58
5.8	Modello a strati del nucleo	59
5.9	Emissione stimolata	59
5.9.1	La legge di Planck	61
5.10	Maser e Laser	62
6	Proprietà Ondulatorie della materia	67
6.1	L'ipotesi di De Broglie	67
6.1.1	De Broglie e Bohr	68
6.1.2	Diffrazione degli elettroni — Davisson e Germer — 1927	69
6.1.3	Microscopio elettronico	70
6.1.4	L'onda di De Broglie	70
6.1.5	Ipotesi di Born	71
6.1.6	Il punto della situazione	71
6.2	Principio di indeterminazione di Heisenberg	77
6.2.1	Microscopio ideale di Bohr	77
6.2.2	Velocità di fase	78
6.2.3	Pacchetto d'onda	79
7	Equazione di Schrödinger	83
7.1	Il punto della situazione	87
7.2	L'oscillatore armonico	87
7.3	Regole di Selezione	88
7.4	Effetto Zeeman	91
8	Lo spin	93
8.0.1	L'esperienza di Stern-Gerlach	93
8.1	Principio di esclusione di Pauli	95
8.2	Il punto della situazione	95
8.2.1	Limiti del modello semplificato di Bohr	96
8.3	Elio, paraelio e ortoelio	96
8.4	Ancora sull'effetto Zeeman	96
9	Momento totale	103
9.1	Lo spin e il momento magnetico intrinseco	103
9.1.1	$S \cdot L$	105
9.2	Momento totale e campi magnetici esterni	107
9.3	Effetto Zeeman anomalo	108
9.4	Il punto della situazione	110

<i>INDICE</i>	131
10 Richiami	111
10.1 Fenomeni ondulatori	111
10.2 Relazioni relativistiche	112
10.2.1 Conservazione della quantità di moto (relativistica)	113
10.2.2 Conservazione dell'energia	113
10.2.3 Relazione tra energia cinetica e quantità di moto	114
11 Fenomeni e Teorie	115
12 Costanti fisiche	117
13 Formule	119
14 The Small print	121