

# ВЕСЦІ

## НАЦЫЯНАЛЬнай АКАДЭМІІ НАВУК БЕЛАРУСІ

СЕРЫЯ ФІЗІКА-МАТЭМАТЫЧНЫХ НАВУК 2011 № 1

# ИЗВЕСТИЯ

## НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК БЕЛАРУСИ

СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК 2011 № 1

ЗАСНАВАЛЬНІК — НАЦЫЯНАЛЬНАЯ АКАДЭМІЯ НАВУК БЕЛАРУСІ

Часопіс выдаецца са студзеня 1956 г.

Выходзіць чатыры разы ў год

### ЗМЕСТ

#### МАТЭМАТЫКА

<b>Игнатенко М. В., Янович Л. А.</b> Обобщенные интерполяционные формулы для операторов, определенных на декартовом произведении функциональных пространств.....	5
<b>Жук А. И., Яблонский О. Л.</b> Системы дифференциальных уравнений в алгебре обобщенных функций....	12
<b>Гриб Н. В.</b> Аппроксимация сумматорными рациональными операторами типа Джексона в пространстве непрерывных $2\pi$ -периодических функций.....	17
<b>Расолько Г. А.</b> Решение сингулярного интегрального уравнения первого рода с ядром Коши и специальной правой частью методом ортогональных многочленов.....	25
<b>Бабуль О. В., Васильев Д. В.</b> О факторизации идеалов в кольцах целых алгебраических чисел .....	32
<b>Витько Е. А., Воробьев Н. Т.</b> О классах Фиттинга и холловых подгруппах конечных $\pi$ -разрешимых групп .....	37
<b>Каморников С. Ф., Шеметкова О. Л.</b> Новые свойства префраттиниевых подгрупп конечных разрешимых групп .....	43
<b>Малютин В. Б.</b> Решение некоторых стохастических дифференциальных уравнений с некоммутирующими коэффициентами.....	48

<b>Щукин М. В.</b> <i>n</i> -Однородные $C^*$ -алгебры с пространством примитивных идеалов, гомеоморфным неориентируемому компактному двумерному многообразию .....	55
<b>Харин Ю. С., Бодягин И. А.</b> Об оптимальном прогнозировании авторегрессионных временных рядов при наличии интервального цензурирования.....	60
<b>Кузьмина А. В.</b> Моделирование дисперсионного гамма-процесса.....	70
<b>Чэнь Хайлун.</b> Об оценке параметров $\alpha$ -устойчивых распределений.....	75

#### ФІЗІКА

<b>Кудряшов В. В., Баран А. В.</b> Объединение модифицированного квазиклассического метода и вариационного подхода для решения радиального уравнения Шрёдингера .....	82
<b>Гуделев В. Г., Кулак Г. В., Матвеева А. Г.</b> Угловое распределение гиперзвука, возбуждаемого лазерными импульсами в твердых телах.....	88
<b>Довыденко С. Н.</b> Особенности преобразования света плоскопараллельным биизотропным слоем .....	92
<b>Колос В. В., Маркевич М. И., Стельмах В. Ф., Чапланов А. М., Емельяненко Ю. С.</b> Формирование дисилицида титана в системе TiN/Ti/Si при быстрой термической обработке .....	98
<b>Гуртовой В. Г., Шелег А. У., Лиопо В. А.</b> Влияние электронного и гамма-излучения на диэлектрические свойства монокристаллов $KTiOPO_4$ .....	102
<b>Акимов А. И., Савчук Г. К.</b> Связь температуры сверхпроводящего перехода с параметрами кристаллической структуры таллийсодержащих сверхпроводников.....	106

#### ІНФАРМАТЫКА

<b>Шлык В. А.</b> О смежности вершин политопа разбиений чисел. Часть I.....	112
---	-----

#### КАРОТКІЯ ПАВЕДАМЛЕННІ

<b>Бударина Н. В., Берник В. И., О’Доннел Х.</b> Об условиях, при которых ближайший к аргументу корень целочисленного многочлена оказывается действительным числом.....	118
---	-----

#### ВУЧОНЫЯ БЕЛАРУСІ

Владимир Антонович Пилипович (К 80-летию со дня рождения).....	120
Віктар Сямёнавіч Буракоў (Да 80-годдзя з дня нараджэння).....	122

ІЗВЕСТИЯ НАЦИОНАЛЬНОЙ АКАДЕМИИ НАУК БЕЛАРУСИ 2011 № 1

Серия физико-математических наук

на русском и белорусском языках

Компьютерная верстка В. Л. Смольская

Здадзена ў набор 19.01.2011. Падпісана да друку 17.03.2011. Выхад у свет 24.03.2011. Фармат  $60 \times 84^{1/8}$ . Папера афсетная.

Ум. друк. арк. 14,88. Ул.-выд. арк. 16,4. Тыраж 110 экз. Заказ 45.

Кошт нумару: індывідуальная падпіска – 18850 руб.; ведамасная падпіска – 46794 руб.

Рэспубліканскае ўнітарнае прадпрыемства «Выдавецкі дом «Беларуская навука». ЛІ № 02330/0494405 ад 27.03.2009.

Вул. Ф. Скарыны, 40, 220141, Мінск. Пасведчанне аб рэгістрацыі № 392 ад 18.05.2009.

Надрукавана ў РУП «Выдавецкі дом «Беларуская навука».

© Выдавецкі дом «Беларуская навука»

Весці НАН Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных навук, 2011

# PROCEEDINGS OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF BELARUS

PHYSICS AND MATHEMATICS SERIES 2011 N 1

FOUNDER IS THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF BELARUS

The Journal has been published since January 1956

Issued four times a year

## CONTENTS

### MATHEMATICS

<b>Ignatenko M. V., Yanovich L. A.</b> Generalized interpolation formulas for operators defined on the Cartesian product of functional spaces.....	5
<b>Zhuk A. I., Yablonski A. L.</b> Systems of differential equations in the algebra of generalized functions.....	12
<b>Grib N. V.</b> Approximation by summatory rational operators of Jackson type in the space of continuous $2\pi$ -periodic functions.....	17
<b>Rasolko G. A.</b> Solution of the first-kind singular integral equation with Cauchy's kernel and a special right-hand side by the orthogonal polynomial method.....	25
<b>Babul O. V., Vasilyev D. V.</b> Ideals factorization in the number fields.....	32
<b>Vitko E. A., Vorob'ev N. T.</b> Fitting classes and Hall subgroups of finite $\pi$ -soluble groups.....	37
<b>Kamornikov S. F., Shemetkova O. L.</b> New properties of prefrattini subgroups in finite soluble groups.....	43
<b>Malyutin V. B.</b> Solution of some stochastic differential equations with noncommuting coefficients.....	48
<b>Shechukin M. V.</b> $n$ -Homogeneous $C^*$ -algebras with the primitive ideal space homeomorphic to a compact two-dimensional no-oriented manifold.....	55
<b>Kharin Yu. S., Badziahin I. A.</b> Optimal forecasting of autoregressive time series under interval censoring.....	60
<b>Kuzmina A. V.</b> Variance gamma process simulation.....	70
<b>Chen Hailong.</b> Estimation of parameters of $\alpha$ -stable distributions.....	75

### PHYSICS

<b>Kudryashov V. V., Baran A. V.</b> Unification of the modified semi-classical method and the variational approach for solution of the radial Schrödinger equation.....	82
<b>Gudelev V. G., Kulak G. V., Matveeva A. G.</b> Angle distribution of hypersound generated by laser pulses in solids.....	88
<b>Dovydenko S. N.</b> Peculiarities of light transformation by the plate-like biisotropic layer.....	92
<b>Kolos V. V., Markevich M. I., Stelmakh V. F., Chaplanov A. M., Emelyanenko Y. S.</b> Titanium disilicide formation in the TiN/Ti/Si system subject to rapid heat treatment.....	98
<b>Hurtavy V. G., Sheleg A. U., Liopo V. A.</b> Electronic and gamma-radiation influence on dielectric properties of single $\text{KTiOPO}_4$ crystals.....	102
<b>Akimov A. I., Savchuk G. K.</b> Relationship between the superconducting transition temperature and the crystal structure parameters in thallium-containing superconductors.....	106

#### INFORMATICS

<b>Shlyk V. A.</b> Adjacency of integer partition polytope vertices. Part I .....	112
---	-----

#### SHORT NOTES

<b>Budarina N. V., Bernik V. I., O'Donnell H.</b> Conditions when the closest root of an integral polynomial is a real .....	118
--	-----

#### SCIENTISTS OF BELARUS

Vladimir Antonovich Pilipovich (To the 80th Anniversary of Birthday) .....	120
Viktor Semenovich Burakov (To the 80 <sup>th</sup> Anniversary of Birthday).....	122

Национальная академия наук Беларуси

МАТЭМАТЫКА

УДК 519.65

М. В. ИГНАТЕНКО<sup>1</sup>, Л. А. ЯНОВИЧ<sup>2</sup>

ОБОБЩЕННЫЕ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ОПЕРАТОРОВ,  
ОПРЕДЕЛЕННЫХ НА ДЕКАРТОВОМ ПРОИЗВЕДЕНИИ  
ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВ

<sup>1</sup>Белорусский государственный университет

<sup>2</sup>Институт математики НАН Беларуси

(Поступила в редакцию 16.09.2010)

**Введение.** Рассмотрим на числовом множестве  $T \subseteq \mathbb{R}$  произвольную чебышевскую систему непрерывно дифференцируемых необходимое число раз на  $T$  функций  $\{\varphi_k(t)\}_{k=0}^q$  и соответствующие многочлены вида

$$P_q(t) = \sum_{k=0}^q c_k \varphi_k(t), \quad (1)$$

где  $c_k$  – комплексные или действительные числа ( $k = 0, 1, \dots, q$ ;  $q = 0, 1, 2, \dots$ ).

Пусть  $I = (\varepsilon_{ij})$  матрица размерности  $(m+1) \times (n+1)$ , элементы  $\varepsilon_{ij}$  ( $i = 0, 1, \dots, m$ ;  $j = 0, 1, \dots, n$ ) которой 0 или 1. Обобщенная интерполяционная задача Эрмита–Биркгофа для функции  $f(t)$  ( $t \in T$ ) состоит в построении многочлена  $B_{m,n}(t) \equiv B_{m,n}(f; t)$  вида (1), удовлетворяющего условиям

$$D_j B_{m,n}(t_i) = D_j f(t_i), \quad (i, j) \in N_{m,n}, \quad (2)$$

где узлы  $t_i$  ( $i = 0, 1, \dots, m$ ) – различные точки из  $T$ ; линейные дифференциальные операторы  $D_j f(t) = \sum_{\mu=1}^j a_{\mu j} f^{(\mu)}(t)$ , ( $j = 1, 2, \dots, n$ );  $a_{\mu j}$  – заданные числа,  $D_0 f(t) = f(t)$ , а  $N_{m,n}$  – множество пар чисел  $(i, j)$ , которые определяют индексы ненулевых элементов матрицы  $I$ , т. е.  $N_{m,n} = \{(i, j) : \varepsilon_{ij} = 1\}$ , в том числе  $N_{m,0} = \{(i, 0) : \varepsilon_{i0} = 1\}$ . В обычной постановке интерполяционной задачи Эрмита–Биркгофа оператор  $D_j f(t) = f^{(j)}(t)$ .

Предположим, что указанный интерполяционный многочлен  $B_{m,n}(f; t)$  существует и записан в виде

$$B_{m,n}(f; t) = \sum_{(i,j) \in N_{m,n}} H_{ij}^{(m)}(t) D_j f(t_i), \quad (3)$$

где  $H_{ij}^{(m)}(t)$  ( $i = 0, 1, \dots, m$ ;  $j = 0, 1, \dots, n$ ) – многочлены класса (1), удовлетворяющие условиям  $D_\mu H_{ij}^{(m)}(t_k) = \delta_{ik} \delta_{\mu j}$ , где  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера.

Для отдельных чебышевских систем функций в случае классической задачи Абеля–Гончарова интерполяционные многочлены вида (3), для которых справедливы равенства (2), ранее получены в работе [1], а для алгебраической системы функций и задачи Эрмита–Биркгофа специального вида – в работах [2–4].

Пусть  $X = X(T)$  и  $V = V(T)$  – заданные пространства гладких на  $T$  функций, на декартовом произведении которых определен оператор  $F : X \times V \rightarrow Y$  ( $Y$  – также некоторое функциональное пространство). Далее будем рассматривать только те операторы, для которых частные дифференциалы Гато  $\mu$ -го порядка по первой переменной  $\delta_x^\mu F[(x, v); h_1, h_2, \dots, h_\mu]$  содержат произведение функций  $h_1(t), h_2(t), \dots, h_\mu(t)$  ( $h_i(t) \in X$ ). Предположим, что если в качестве аргумента  $t$  функций  $\varphi_k(t)$  и  $f(t)$  и узлов интерполирования  $t_k$  взять соответственно  $x \equiv x(t)$  и  $x_k \equiv x_k(t)$  ( $t \in T$ ) – элементы пространства  $X$  (причем такие, что значения функций  $x(t)$ ,  $x_k(t)$  принадлежат  $T \subseteq \mathbb{R}$ ), то формулы вида (3) существуют и для них выполняются условия (2).

Будем рассматривать также операторные многочлены  $P_{q, \mu} : X \times V \rightarrow Y$  вида

$$P_{q, \mu}(x, v) = \sum_{k=0}^q \int_{k=0}^q a_k(\mu; s, t) \frac{d^\mu}{dt^\mu} \{ \varphi_k(x(t))v(t) \} dt \quad (\mu = 0, 1, 2, \dots), \quad (4)$$

где  $a_k(\mu; s, t)$  – фиксированные функции ( $s \in \mathbb{R}$ ,  $t \in T$ ). Предположим, что интегралы, входящие в формулу (4), существуют, а необходимые в дальнейшем преобразования допустимы.

В данной статье на основе многочленов вида (3) построены формулы интерполирования по одной переменной для операторов, заданных на декартовом произведении функциональных пространств. Полученные формулы инвариантны относительно многочленов вида (4).

**Формулы, содержащие дифференциалы интерполируемого оператора.** Рассмотрим операторно-дифференциальные выражения вида

$$\tilde{D}_{xj} F(x, v) = \sum_{\mu=1}^j a_{\mu j} \delta_x^\mu F[(x, v); h_1 h_2 \dots h_j], \quad (5)$$

где  $\delta_x^\mu F[(x, v); h_1 h_2 \dots h_j]$  – дифференциал Гато  $\mu$ -го порядка оператора  $F$  по переменной  $x$  в точке  $(x, v)$  по направлениям  $h_1, h_2, \dots, h_{\mu-1} \equiv 1$ , а  $\mu$ -е направление является произведением вида  $h_1 h_2 \dots h_j$  ( $h_\mu = h_\mu(t) \in X$ ). Далее считаем, что  $\tilde{D}_{x0} F(x, v) = F(x, v)$ . В частном случае при  $a_{\mu j} = \delta_{\mu j}$  будем иметь  $\tilde{D}_{xj} F(x, v) \equiv \tilde{D}_{xj} F[(x, v); h_1, h_2, \dots, h_j] = \delta_x^j F[(x, v); h_1 h_2 \dots h_j]$ . Через  $\tilde{D}_{xj} F[(x, v); h]$  будем обозначать оператор вида (5), когда  $h_\mu(t) \equiv 1$  для  $\mu = 1, 2, \dots, j-1$ , а  $j$ -е направление  $h_j(t) \equiv h(t)$ . Если  $F(x, v) = f(x(t), v(t))$ , а  $f(u, v)$  – числовая функция, имеющая производную порядка  $j$  по переменной  $u = x(t)$ , тогда справедливо равенство  $\tilde{D}_{xj} F(x, v) = D_{xj} f(x, v) h_1(t) h_2(t) \dots h_j(t)$ , где  $D_{xj} f(x, v) = \sum_{\mu=1}^j a_{\mu j} f_x^{(\mu)}(x, v)$ ;  $a_{\mu j}$  – заданные числа, а  $D_{x0} f(x, v) = f(x, v)$ .

Пусть сумма фундаментальных многочленов  $\sigma_m(x(t)) = \sum_{(i,0) \in N_{m,0}} H_{i0}^{(m)}(x(t))$  – постоянная или переменная на  $T$  величина, а  $M_{m,n} = N_{m,n} \setminus N_{m,0}$  – множество пар чисел  $(i, j)$ , соответствующих элементам  $\varepsilon_{ij} = 1$  ( $i = 0, 1, \dots, m$ ;  $j = 1, 2, \dots, n$ ) матрицы  $I$ .

Теорема 1. Для операторного многочлена

$$B_{m,n}(x, v) = F(x_p, v\sigma_m(x)) +$$

$$\sum_{(i,0) \in N_{m,0}} \int_0^1 \delta_x F[(x_p + \tau(x_i - x_p), v); H_{i0}^{(m)}(x)(x_i - x_p)] d\tau + \sum_{(i,j) \in M_{m,n}} \tilde{D}_{xj} F[(x_i, v); H_{ij}^{(m)}(x)], \quad (6)$$

где  $x_p$  – фиксированный узел, соответствующий элементу  $\varepsilon_{p0}$  множества  $N_{m,0}$ , выполняются интерполяционные условия

$$B_{m,n}(x_i, v) = F(x_i, v), (i, 0) \in N_{m,0}; \tilde{D}_{xj} B_{m,n}(x_i, v) = \tilde{D}_{xj} F(x_i, v), (i, j) \in M_{m,n}. \quad (7)$$

(Когда множество  $N_{m,0}$  пустое, то  $B_{m,n}(x, v) = \sum_{(i,j) \in M_{m,n}} \tilde{D}_{xj} F[(x_i, v); H_{ij}^{(m)}(x)]$  и первая группа равенств в (7) отсутствует.) Если формула (3) точна для обобщенных многочленов (1) при некотором фиксированном значении  $q$  и любых различных узлах  $t_i \in T$  ( $i = 0, 1, \dots, m$ ), то интерполяционная формула (6) будет инвариантна относительно операторных многочленов вида (4) с таким же значением  $q$ .

Доказательство. При  $x = x_k$  (здесь индексу  $k$  соответствует первый индекс элемента  $\varepsilon_{k0} = 1$  матрицы  $I$ ) значение  $\sigma_m(x_k) = 1$  и справедливы равенства  $\tilde{D}_{x0} H_{i0}^{(m)}(x_k) = \delta_{ik}$  для  $(i, 0) \in N_{m,0}$  и  $\tilde{D}_{x0} H_{ij}^{(m)}(x_k) = \delta_{ik} \delta_{0j} = 0$  для  $(i, j) \in M_{m,n}$ . Поэтому, в узлах  $x_k$ , где  $(k, 0) \in N_{m,0}$ ,

имеем  $B_{m,n}(x_k, v) = F(x_p, v) + \int_0^1 \delta_x F[(x_p + \tau(x_k - x_p), v); x_k - x_p] d\tau = F(x_k, v)$ . При  $(k, j) \in M_{m,n}$ ,

т. е. для  $j \geq 1$ , с учетом (5) получим  $\tilde{D}_{xj} B_{m,n}(x_k, v) = \sum_{\mu=1}^j a_{\mu j} \delta_x^\mu B_{m,n}[(x_k, v); h_1 h_2 \dots h_j]$ . Поэтому  $\tilde{D}_{xs} [H_{ij}^{(m)}(x_k)] = D_s [H_{ij}^{(m)}(x_k)] h_1(t) h_2(t) \dots h_s(t)$  для  $s \geq 1$ . Так как значение  $D_s [H_{ij}^{(m)}(x_k)] = \delta_{ik} \delta_{sj}$ , то из всех слагаемых в (6), содержащих выражения  $H_{ij}^{(m)}(x)$ , останутся только те, для которых  $i = k$  и  $s = j$ . Отсюда и следует вторая группа равенств в (7).

Пусть  $F(x, v) = \frac{d^\mu}{dt^\mu} \{ \varphi_k(x(t)) v(t) \}$  ( $k = 0, 1, \dots, q; \mu = 0, 1, 2, \dots$ ). Для такого вида операторов

$\tilde{D}_{xj} F(x, v) = \sum_{i=1}^j a_{ij} \frac{d^\mu}{dt^\mu} \left\{ \frac{d^i}{dx^i} [\varphi_k(x(t))] v(t) h_1(t) h_2(t) \dots h_j(t) \right\}$ , и, следовательно, справедлива формула

$\tilde{D}_{xj} F[(x_i, v); H_{ij}^{(m)}(x)] = \sum_{p=1}^j a_{pj} \frac{d^\mu}{dt^\mu} \left\{ \frac{d^p}{dx^p} [\varphi_k(x_i(t))] v(t) H_{ij}^{(m)}(x(t)) \right\}$ . Кроме того, для операторов  $F(x, v)$  будет выполняться равенство

$$\int_0^1 \delta_x F[(x_p + \tau(x_i - x_p), v); H_{i0}^{(m)}(x)(x_i - x_p)] d\tau = \frac{d^\mu}{dt^\mu} \{ H_{i0}^{(m)}(x(t)) v(t) [\varphi_k(x_i(t)) - \varphi_k(x_p(t))] \}.$$

Поэтому многочлен  $B_{m,n}(x, v)$ , заданный формулой (6), примет вид

$$B_{m,n}(x, v) = \frac{d^\mu}{dt^\mu} \{ v(t) (\varphi_k(x_p(t)) \sigma_m(x(t)) +$$

$$\sum_{(i,0) \in N_{m,0}} H_{i0}^{(m)}(x(t)) [\varphi_k(x_i(t)) - \varphi_k(x_p(t))] + \sum_{(i,j) \in M_{m,n}} H_{ij}^{(m)}(x(t)) D_j \varphi_k(x_i(t)) \Big\} = \\ \frac{d^\mu}{dt^\mu} \left\{ v(t) \left( \sum_{(i,0) \in N_{m,0}} H_{i0}^{(m)}(x(t)) \varphi_k(x_i(t)) + \sum_{(i,j) \in M_{m,n}} H_{ij}^{(m)}(x(t)) D_j \varphi_k(x_i(t)) \right) \right\}.$$

Отсюда следует, что  $B_{m,n}(x, v) = \frac{d^\mu}{dt^\mu} \left\{ v(t) \sum_{(i,j) \in N_{m,n}} H_{ij}^{(m)}(x(t)) D_j \varphi_k(x_i(t)) \right\}$ . Так как по условию теоремы справедливо тождество

$$\sum_{(i,j) \in N_{m,n}} H_{ij}^{(m)}(x(t)) D_j \varphi_k(x_i(t)) \equiv \varphi_k(x(t)) \quad (k = 0, 1, \dots, q), \quad (8)$$

окончательно получаем  $B_{m,n}(x, v) = \frac{d^\mu}{dt^\mu} \{v(t) \varphi_k(x(t))\} \equiv F(x, v)$ . Таким образом, интерполяционная формула (6) точна для операторов  $P_{q,\mu}(x, v)$  вида (4).

**Формулы, содержащие дифференциалы и интеграл Стильтьеса интерполируемого оператора.** Введем числовую функцию  $\chi(\tau, t) = \begin{cases} 1, & \tau \geq t; \\ 0, & \tau < t, \end{cases}$  где  $0 < \tau < 1$ , а  $\chi(0, t) \equiv 0$  и  $\chi(1, t) \equiv 1$ .

**Т е о р е м а 2.** Операторный многочлен

$$B_{m,n}(x, v) = F(x_p, v \sigma_m(x)) + \sum_{(i,0) \in N_{m,0}} \int_0^1 H_{i0}^{(m)}[x(\tau)] d_\tau F[x_p(\cdot) + \chi(\tau, \cdot)(x_i(\cdot) - x_p(\cdot)), v(\cdot)] + \\ \sum_{(i,j) \in M_{m,n}} \tilde{D}_{xj} F[(x_i, v); H_{ij}^{(m)}(x)], \quad (9)$$

где, как и в теореме 1,  $x_p$  – фиксированный узел, соответствующий ненулевому элементу  $\varepsilon_{p0}$  матрицы  $I$ , удовлетворяет интерполяционным условиям (7). (Когда множество  $N_{m,0}$  пустое, то формула (9) имеет вид  $B_{m,n}(x, v) = \sum_{(i,j) \in M_{m,n}} \tilde{D}_{xj} F[(x_i, v); H_{ij}^{(m)}(x)]$  и первая группа равенств

в (7) отсутствует.) Если формула (3) точна для обобщенных многочленов (1) при некотором фиксированном значении  $q$  и любых различных узлах  $t_i \in T$  ( $i = 0, 1, \dots, m$ ), тогда интерполяционная формула (9) будет инвариантна относительно операторных многочленов вида (4) с таким же значением  $q$  в случае  $\mu = 0$  и  $T = [0, 1]$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** В узлах  $x_k$ , где  $(k, 0) \in N_{m,0}$ , для  $B_{m,n}(x, v)$  получим  $B_{m,n}(x_k, v) = F(x_p, v) + \int_0^1 d_\tau F[x_p(\cdot) + \chi(\tau, \cdot)(x_k(\cdot) - x_p(\cdot)), v(\cdot)] = F(x_k, v)$ . Так как формула (9) отличается от равенства (6) только второй группой слагаемых в правой части, то доказательство второй группы равенств в (7) аналогично доказательству, приведенному в теореме 1.

Пусть оператор  $F(x, v) = \int_0^1 a(s, t) \varphi_k[x(t)] v(t) dt$ , где  $a(s, t)$  – некоторая заданная функция ( $k = 0, 1, \dots, q; s \in \mathbb{R}$ ). Тогда, учитывая структуру операторов (5), получим, что

$$\tilde{D}_{xj} F[(x_i, v); H_{ij}^{(m)}(x)] = \sum_{p=1}^j a_{pj} \int_0^1 a(s, t) \frac{d^p}{dx^p} [\varphi_k(x_i(t))] v(t) H_{ij}^{(m)}(x(t)) dt.$$

Для слагаемого, соответствующего индексу  $(i, 0)$  первой суммы в (8), и этого класса операторов с учетом свойств функции  $\chi(\tau, t)$  будет выполняться равенство

$$\begin{aligned} & \int_0^1 H_{i_0}^{(m)}(x(\tau)) d_\tau F[x_p(\cdot) + \chi(\tau, \cdot)(x_i(\cdot) - x_p(\cdot)), v(\cdot)] = \\ & \int_0^1 H_{i_0}^{(m)}(x(\tau)) d_\tau \left\{ \int_0^\tau a(s, t) \varphi_k(x_i(t)) v(t) dt + \int_\tau^1 a(s, t) \varphi_k(x_p(t)) v(t) dt \right\} d\tau = \\ & \int_0^1 H_{i_0}^{(m)}(x(\tau)) a(s, \tau) \{ \varphi_k(x_i(\tau)) - \varphi_k(x_p(\tau)) \} v(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Отсюда, учитывая, как и ранее, тождество (8), получим

$$\begin{aligned} B_{m,n}(x, v) &= \int_0^1 a(s, t) v(t) \{ \varphi_k(x_p(t)) \sigma_m(x(t)) + \sum_{(i,0) \in N_{m,0}} H_{i_0}^{(m)}(x(t)) [\varphi_k(x_i(t)) - \varphi_k(x_p(t))] + \\ & \sum_{(i,j) \in M_{m,n}} H_{ij}^{(m)}(x(t)) D_j \varphi_k(x_i(t)) \} dt = \int_0^1 a(s, t) v(t) \sum_{(i,j) \in N_{m,n}} H_{ij}^{(m)}(x(t)) D_j \varphi_k(x_i(t)) dt \equiv F(x, v). \end{aligned}$$

Таким образом, интерполяционная формула (9) инвариантна относительно операторных многочленов  $P_{q,0}(x, v)$  класса (4) в случае  $T = [0, 1]$ .

**Частный случай формул Эрмита–Биркгофа.** Рассмотрим нечетную тригонометрическую систему функций  $\{\sin[(k+1)t]\}_{k=0}^m$ , которая является чебышевской на интервале  $(0, \pi)$ . В качестве узлов интерполирования выберем функции  $\{x_k(t)\}_{k=0}^m \in X = X(a, b)$ , удовлетворяющие условию  $x_i(t) \pm x_j(t) \neq 2k\pi, k \in \mathbb{Z}, t \in (a, b) \subseteq R$ . Пусть  $n=1$ , а операторы  $D_1 \varphi(t) = \varphi'(t)$ ,  $\tilde{D}_1 F(x, v) = \delta_x F[(x, v); h_1]$ . Рассмотрим частный случай матрицы  $I$ , когда первый из двух ее столбцов – единичный, а второй столбец состоит из элементов 0 или 1.

Введем следующие обозначения:

$$S_m(x) \equiv S_m(x(t)) = \prod_{k=0}^m (\cos x - \cos x_k), \quad l_{m,k}(x) \equiv l_{m,k}(x(t)) = \frac{S_m(x) \sin x_k}{S'_m(x_k) (\cos x_k - \cos x)},$$

$$H_{k_0}^{(m)}(x) \equiv H_{k_0}^{(m)}(x(t)) = l_{m,k}^2(x) \left[ \frac{\sin x}{\sin x_k} + \frac{S''_m(x_k) \sin x}{S'_m(x_k) \sin^2 x_k} (\cos x - \cos x_k) \right], \quad (10)$$

$$H_{k_1}^{(m)}(x) \equiv H_{k_1}^{(m)}(x(t)) = l_{m,k}^2(x) (\cos x_k - \cos x) \frac{\sin x}{\sin^2 x_k}, \quad (11)$$

где  $x = x(t), x_k = x_k(t), k = 0, 1, \dots, m$ .

Заметим, что функции  $H_{k_0}^{(m)}(t)$  и  $H_{k_1}^{(m)}(t)$ , определяемые соотношениями (10) и (11), являются фундаментальными интерполяционными многочленами Эрмита для рассматриваемой системы функций относительно узлов второй кратности, а формулы операторного интерполирования, полученные на их основе, приведены в работе [5].

Для интерполяционных многочленов Эрмита–Биркгофа (6) и (9), удовлетворяющих условиям

$$B_{m,1}(x_i, v) = F(x_i, v), \quad i = 0, 1, \dots, m; \quad \delta_x B_{m,1}(x_i, v) = \delta_x F(x_i, v), \quad (i, 1) \in M_{m,1}, \quad (12)$$

справедливы, соответственно, представления

$$B_{m,1}(x, v) = F(x_p, v\sigma_m(x)) +$$

$$\sum_{i=0}^{m-1} \int_{x_p}^{x_i} \delta_x F[(x_p + \tau(x_i - x_p), v); H_{i0}^{(m)}(x)(x_i - x_p)] d\tau + \sum_{(i,1) \in M_{m,1}} \delta_x F[(x_i, v); H_{i1}^{(m)}(x)], \quad (13)$$

и

$$B_{m,1}(x, v) = F(x_p, v\sigma_m(x)) +$$

$$\sum_{i=0}^{m-1} [H_{i0}^{(m)}[x(\tau)] d_\tau F[x_p(\cdot) + \chi(\tau, \cdot)(x_i(\cdot) - x_p(\cdot)), v(\cdot)] + \sum_{(i,1) \in M_{m,1}} \delta_x F[(x_i, v); H_{i1}^{(m)}(x)], \quad (14)$$

где, как и ранее,  $x_p$  – произвольный фиксированный узел, соответствующий элементу  $\varepsilon_{p0}$  ма-

трицы  $I$ , а  $\sigma_m(x) = \sum_{k=0}^m H_{k0}^{(m)}(x)$ .

**Пример 1.** Пусть  $X = C[0, \infty]$ , оператор  $F(x, v) = \sin\{I(s; x, v)\}$ , где  $I(s; x, v) \equiv I(x, v) = \int_0^\infty f(s, t)x(t)v(t)dt$ ;  $s \in \mathbb{R}^n$ , а функция  $f(s, t)$  такая, что интеграл  $I(s; x, v)$  существует. В этом случае  $\delta_x F[(x, v); h] = \cos\{I(s; x, v)\}I(s; h, v)$ , а интерполяционный многочлен Эрмита–Биркгофа (13) примет вид

$$B_{m,1}(x, v) = F(x_p, v\sigma_m(x)) + \sum_{i=0}^{m-1} \frac{F(x_i, v) - F(x_p, v)}{I(x_i, v) - I(x_p, v)} I\{H_{i0}^{(m)}(x)(x_i - x_p), v\} + \sum_{(i,1) \in M_{m,1}} \cos\{I(x_i, v)\} I\{H_{i1}^{(m)}(x), v\}.$$

Несложно убедиться, что интерполяционные условия (12) выполняются.

**Пример 2.** Пусть  $F(x, v) = \Phi\{I(s; x, v)\}$ , где  $I(s; x, v) \equiv I(x, v) = \int_a^b p(s, t)x(t)v(t)dt$ ;  $\Phi(u)$  – некоторая дифференцируемая функция, заданная на  $\mathbb{R}$ , а функция  $p(s, t)$  такая, что интеграл  $I(s; x, v)$  существует. В этом случае  $\delta_x F[(x, v); h] = \Phi'_x\{I(s; x, v)\}I(s; h, v)$ , а интерполяционный многочлен Эрмита–Биркгофа (14) примет вид

$$B_{m,1}(x, v) = F(x_p, v\sigma_m(x)) + \sum_{i=0}^{m-1} \int_a^b [p(s, \tau)\Phi'_x\{x_{ip}(s, \tau)\}H_{i0}^{(m)}[x(\tau)][x_i(\tau) - x_p(\tau)]v(\tau)d\tau + \sum_{(i,1) \in M_{m,1}} \Phi'_x\{I(s; x_i, v)\}I\{s; H_{i1}^{(m)}(x), v\},$$

где  $x_{ip}(s, \tau) = \int_a^\tau p(s, t)x_i(t)v(t)dt + \int_\tau^b p(s, t)x_p(t)v(t)dt$ . Интерполяционные условия (12) также справедливы.

В заключение отметим, что достаточно полная теория операторного интерполирования изложена в монографии [6].

## Литература

1. Янович Л. А., Дорошко В. В. // Вестник фонда фундаментальных исследований. 1999. № 4. С. 34–44.
2. Янович Л. А., Игнатенко М. В. // Докл. НАН Беларуси. 2009. Т. 53, № 5. С. 15–21.
3. Янович Л. А., Игнатенко М. В. // Актуальные проблемы анализа: Сб. науч. тр. Гродно, 2009. С. 198–215.
4. Янович Л. А., Игнатенко М. В. // Аналитические методы анализа и дифференциальных уравнений: Сб. науч. тр. Минск, 2010. Т. 1. С. 140–147.

5. Игнатенко М. В. // Статистический и прикладной анализ временных рядов: Сб. науч. тр. Брест, 1997. С. 178–188.

6. Макаров В. Л., Хлобыстов В. В., Янович Л. А. Интерполирование операторов. Киев, 2000.

*M. V. IGNATENKO, L. A. YANOVICH*

**GENERALIZED INTERPOLATION FORMULAS FOR OPERATORS DEFINED  
ON THE CARTESIAN PRODUCT OF FUNCTIONAL SPACES**

**Summary**

Generalized interpolation formulas of Hermite–Birkhoff type are constructed for operators defined on the Cartesian product of functional spaces. The obtained formulae are exact for a special class of operator polynomials. The construction of the operator interpolation formulas is based on the interpolation polynomials for scalar functions with respect to arbitrary Chebyshev systems of functions.

Национальная академия наук Беларуси

УДК 517.9

А. И. ЖУК, О. Л. ЯБЛОНСКИЙ

**СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ  
В АЛГЕБРЕ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ**

*Белорусский государственный университет*

*(Поступила в редакцию 26.03.2010)*

**Введение.** В настоящей работе рассматривается следующая система уравнений с обобщенными коэффициентами на отрезке  $T = [0, a] \subset R$  :

$$\dot{x}^i(t) = \sum_{j=1}^q f^{ij}(x(t)) \dot{L}^j(t), \quad i = \overline{1, p}, \quad (1)$$

$$x(0) = x_0, \quad (2)$$

где  $f^{ij}$ ,  $i = \overline{1, p}$ ,  $j = \overline{1, q}$  – липшицевы функции,  $x(t) = [x^1(t), x^2(t), \dots, x^p(t)]$ , а  $L^j(t)$ ,  $j = \overline{1, q}$  – непрерывные функции ограниченной вариации на отрезке  $T$ . Так как  $\dot{L}^j(t)$  являются обобщенными функциями и функции  $f^{ij}(x(t))$  не гладкие, то, вообще говоря, возникает проблема корректного определения произведения  $f^{ij}(x(t)) \dot{L}^j(t)$ .

Рассмотрим основные подходы к определению решения задачи (1) – (2). Согласно первому подходу [1, 2], привлекается аппарат теории обобщенных функций. Вводится определение произведения обобщенных функций из некоторых классов, а затем находится решение дифференциального уравнения. Решения уравнений (1) – (2), которые могут быть получены при использовании различных определений произведений в [1, 2], вообще говоря, не совпадают.

Второй подход предполагает формальный переход к интегральному уравнению (см., например, [3]), где интеграл понимается в определенном смысле, например в смысле Лебега–Стилтьеса, Перрона–Стилтьеса и т. д. Однако при таком подходе решение интегрального уравнения зависит от типа интеграла и определения функции  $x(t)$  в точках разрыва  $L(t)$ .

В соответствии с третьим подходом [2], под решением задачи (1) – (2) понимается предел решений уравнений, которые являются аппроксимациями исходного уравнения.

В данной работе уравнение (1) – (2) рассматривается в алгебре новых обобщенных функций, предложенной Н. В. Лазаковичем в работе [4] (см. также [5]). Общий метод построения подобных алгебр описан в [6], там же был использован термин «мнемофункция» для обозначения новой обобщенной функции. Важнейшая особенность новых обобщенных функций состоит в том, что они определяются, как классы эквивалентных последовательностей гладких функций и зависят от способа аппроксимации, что позволяет охватить решения, получающиеся в результате толкования задачи (1) – (2) с помощью трех описанных выше подходов.

Аналогичная задача в одномерном случае рассматривалась в работах [5, 7].

**Основные результаты.** Заменяя обычные функции, присутствующие в системе (1), на соответствующие им новые обобщенные функции, а обобщенные производные – на обобщенные дифференциалы, получим запись уравнения в дифференциалах в алгебре мнемофункций (см., напр., [4, 5]):

$$d_{\tilde{h}} \tilde{x}^i(\tilde{t}) = \sum_{j=1}^q \tilde{f}^{ij}(\tilde{x}(\tilde{t})) d_{\tilde{h}} \tilde{L}^j(\tilde{t}), \quad i = \overline{1, p}, \quad (3)$$

с начальным условием  $\tilde{x}|_{[\tilde{a}; \tilde{h}]} = \tilde{x}^0$ , где  $\tilde{h} = [\{h_n\}] \in H$ ,  $\tilde{a} = [\{a\}] \in \tilde{T}$  и  $\tilde{t} = [\{t_n\}] \in \tilde{T}$ ,  $\tilde{x} = [\{x_n(t)\}]$ ,  $\tilde{f} = [\{f_n(x)\}]$ ,  $\tilde{x}^0 = [\{x_n^0(t)\}]$ ,  $\tilde{L} = [\{L_n(t)\}]$ . Далее, если заменить в (3) каждую новую обобщенную функцию представителем класса, ее определяющего, получим запись задачи (3) на уровне представителей:

$$x_n^i(t+h_n) - x_n^i(t) = \sum_{j=1}^q f_n^{ij}(x_n(t)) [L_n^j(t+h_n) - L_n^j(t)], \quad i = \overline{1, p}, \quad (4)$$

$$x_n(t)|_{[0; h_n]} = x_{n0}(t). \quad (5)$$

В данной работе в качестве представителей рассматриваются следующие функции:

$$L_n(t) = (L * \rho_n)(t) = \int_0^{1/n} L(t+s) \rho_n(s) ds, \quad \text{где } \rho_n \in C^\infty(R), \quad \rho_n \geq 0, \quad \text{supp } \rho_n \subseteq [0; 1/n], \quad \int_0^{1/n} \rho_n(s) ds = 1,$$

$$\text{а } f_n = f * \tilde{\rho}_n, \quad \tilde{\rho}_n \in C^\infty(R^p), \quad \text{supp } \tilde{\rho}_n \subseteq [0; 1/n]^p, \quad \int_{[0; 1/n]^p} \tilde{\rho}_n(x_1, \dots, x_p) dx_1 \dots dx_p = 1, \quad \tilde{\rho}_n \geq 0.$$

Пусть  $t$  – произвольная фиксированная точка из отрезка  $T$ . Тогда  $t$  можно представить в виде  $t = \tau_i + m_i h_n$ , где  $\tau_i \in [0; h_n)$ ,  $m_i \in N$ . Несложно видеть, что решение системы (4) можно записать в виде

$$x_n^i(t) = x_{n0}^i(\tau_i) + \sum_{j=1}^q \sum_{k=0}^{m_i-1} f_n^{ij}(x_n(\tau_i + kh_n)) [L_n^j(\tau_i + (k+1)h_n) - L_n^j(\tau_i + kh_n)], \quad i = \overline{1, p}. \quad (6)$$

При некоторых необременительных дополнительных условиях (см., напр., [2]) функция  $x_n^j$  будет гладкой, поэтому при этих условиях решение задачи (4) – (5) определяет мнемофункцию, которая является решением задачи (3). В данной статье исследуются условия, при которых указанная мнемофункция ассоциирует некоторую обычную функцию, которую называют ассоциированным решением задачи (1) – (2) (см. [4, 5] по поводу определения ассоциированного решения). На уровне представителей указанная проблема сводится к описанию предельного поведения решений задачи (4) – (5). Поэтому в данной статье найден предел решений этой задачи.

Для описания указанного предела рассмотрим следующую систему интегральных уравнений:

$$x^i(t) = x_0^i + \sum_{j=1}^q \int_0^t f^{ij}(x(s)) dL^j(s), \quad i = \overline{1, p}. \quad (7)$$

Интеграл в последней формуле понимается в смысле Лебега–Стилтьеса, а существование и единственность решения данной системы для липшицевых функций  $f^{ij}$  доказаны в [8].

Приведем несколько вспомогательных результатов, которые нам понадобятся в дальнейшем. Лемма 1 [7]. Пусть для любого  $n$  справедливо неравенство

$$Z_{n+1} \leq \sum_{k=1}^n A_k + \sum_{k=1}^n B_k Z_k,$$

где  $A_k, B_k$  – некоторые неотрицательные константы и  $Z_k \geq 0$ ,  $k = \overline{0, n}$ . Тогда верно неравенство

$$Z_{n+1} \leq \sum_{k=1}^n A_k \exp\left(\sum_{j=1}^n B_j\right).$$

В дальнейшем модуль вектор-столбца  $x = [x^1, x^2, \dots, x^p]^T$  определим как  $|x| = \sum_{i=1}^p |x^i|$ , а модуль  $p \times q$  матрицы –  $|f| = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q |f^{ij}|$ . Вариацию вектор-функции  $L = [L^1, \dots, L^q]$  обозначим через  $\text{var}_{u \in A} L(u) = \sum_{j=1}^q \text{var}_{u \in A} L^j(u)$ .

**Лемма 2.** Пусть функция  $f$  удовлетворяет условию Липшица и ограничена константой  $M$ . Тогда для решений  $x$  и  $x_n$  систем уравнений (7) и (4) соответственно выполняются следующие неравенства для всех  $t, s \in T$ ,  $t > s$ ,  $u, l, n \in N$ :

$$1) |x(t)| \leq C(1 + |x_0|); |x_n(t)| \leq C(1 + |x_{n0}(\tau_t)|), \text{ где константа } C \text{ зависит только от } M, |T| \text{ и } \text{var}_{u \in T} L(u);$$

$$2) |x(t) - x(s)| \leq M \text{var}_{u \in (s;t]} L(u);$$

$$3) \text{var}_{u \in [0;t]} x(u) \leq M \text{var}_{u \in [0;t]} L(t).$$

Доказательство этих неравенств вытекает из определения  $x$  и  $x_n$ .

**Теорема.** Пусть функции  $f^{ij}$ ,  $i = \overline{1, p}$ ,  $j = \overline{1, q}$  удовлетворяют условию Липшица и ограничены,  $L^j$ ,  $j = \overline{1, q}$  – функции ограниченной вариации и непрерывны. Тогда при  $n \rightarrow \infty$ ,  $h_n \rightarrow 0$  при каждом  $t \in T$  решение  $x_n(t)$  задачи Коши (4) – (5) сходится к решению системы уравнений (7), если для любого  $t \in T$  выполняется  $x_{n0}(\tau_t) \rightarrow x_0$ .

**Доказательство.** Проведем следующие преобразования:

$$\begin{aligned} & \left| x_n^1(t) - x^1(t) \right| \leq \left| x_{n0}^1(\tau_t) - x_0^1 \right| + \sum_{j=1}^q \left| \int_0^{\tau_t} f^{1j}(x(s)) dL^j(s) \right| + \\ & \sum_{j=1}^q \left| \sum_{k=0}^{m_j-1} (f_n^{1j}(x_n(\tau_t + kh_n)) - f^{1j}(x(\tau_t + kh_n))) [L_n^j(\tau_t + (k+1)h_n) - L_n^j(\tau_t + kh_n)] \right| + \\ & \sum_{j=1}^q \left| \sum_{k=0}^{m_j-1} f^{1j}(x(\tau_t + kh_n)) [L_n^j(\tau_t + (k+1)h_n) - L_n^j(\tau_t + kh_n)] - \sum_{k=0}^{m_j-1} f^{1j}(x(\tau_t + kh_n)) \times \right. \\ & \left. [L^j(\tau_t + (k+1)h_n) - L^j(\tau_t + kh_n)] \right| + \sum_{j=1}^q \left| \sum_{k=0}^{m_j-1} f^{1j}(x(\tau_t + kh_n)) [L^j(\tau_t + (k+1)h_n) - \right. \\ & \left. L^j(\tau_t + kh_n)] - \int_{\tau_t}^t f^{1j}(x(s)) dL^j(s) \right| = I_0(t) + \sum_{j=1}^q (I_1^j(t) + I_2^j(t) + I_3^j(t) + I_4^j(t)). \end{aligned}$$

Пусть везде далее  $C$  – константа, не зависящая от  $n$ ,  $t$ ,  $h_n$ . Так как  $f^{ij}$  удовлетворяют условию Липшица и ограничены  $i = \overline{1, p}$ ,  $j = \overline{1, q}$ , а функции  $L^j$ ,  $j = \overline{1, q}$  имеют ограниченную вариацию, то  $I_1^j(t) \leq C \text{var}_{t \in [0;h_n]} L^j(t)$ ,  $j = \overline{1, q}$ .

Аналогично получаем

$$I_2^j(t) = \left| \sum_{k=0}^{m_t-1} (f_n^{1j}(x_n(\tau_t + kh_n)) - f^{1j}(x(\tau_t + kh_n)))[L_n^j(\tau_t + (k+1)h_n) - L_n^j(\tau_t + kh_n)] \right| \leq \\ C \sum_{k=0}^{m_t-1} \left( |x_n(\tau_t + kh_n) - x(\tau_t + kh_n)| + \frac{1}{n} \right) |L_n^j(\tau_t + (k+1)h_n) - L_n^j(\tau_t + kh_n)|.$$

Для оценки слагаемых вида  $I_3^j(t)$   $j = \overline{1, q}$  разобьем сумму на две, затем в первой сделаем замену индексов суммирования, после чего воспользуемся условием Липшица и  $L_n^j$ :

$$I_3^j(t) = \left| \sum_{k=0}^{m_t-1} f^{1j}(x(\tau_t + kh_n))[L_n^j(\tau_t + (k+1)h_n) - L^j(\tau_t + (k+1)h_n)] - \right. \\ \left. \sum_{k=0}^{m_t-1} f^{1j}(x(\tau_t + kh_n))[L_n^j(\tau_t + kh_n) - L^j(\tau_t + kh_n)] \right| = \\ \left| \sum_{k=1}^{m_t-1} (f^{1j}(x(\tau_t + (k-1)h_n)) - f^{1j}(x(\tau_t + kh_n)))[L_n^j(\tau_t + kh_n) - L^j(\tau_t + kh_n)] + \right. \\ \left. f^{1j}(x(\tau_t + (m_t-1)h_n))[L_n^j(\tau_t + m_t h_n) - L^j(\tau_t + m_t h_n)] - f^{1j}(x(\tau_t))[L_n^j(\tau_t) - L^j(\tau_t)] \right| \leq \\ C \sum_{k=1}^{m_t-1} \operatorname{var}_{t \in [\tau_t + kh_n, \tau_t + kh_n + \frac{1}{n}]} L^j(t) |x(\tau_t + (k-1)h_n) - x(\tau_t + kh_n)| + h_n + C \operatorname{var}_{t \in [\tau_t, \tau_t + \frac{1}{n}]} L^j(t) + \\ C \operatorname{var}_{t \in [\tau_t + m_t h_n, \tau_t + m_t h_n + \frac{1}{n}]} L^j(t) \leq C \max_{\substack{t_1, t_2 \in T \\ |t_1 - t_2| \leq \frac{1}{n}}} \operatorname{var}_{t \in [t_1, t_2]} L^j(t) + Ch_n.$$

Обозначим  $\bar{s}(s) = \tau_t + kh_n$ , при  $s \in [\tau_t + kh_n, \tau_t + (k+1)h_n)$ . Тогда из свойств интеграла Стильеса вытекает оценка для  $I_4^j(t)$ :

$$I_4^j(t) = \left| \sum_{k=0}^{m_t-1} f^{1j}(x(\tau_t + kh_n))[L^j(\tau_t + (k+1)h_n) - L^j(\tau_t + kh_n)] - \int_{\tau_t}^t f^{1j}(x(s)) dL^j(s) \right| = \\ \left| \int_{\tau_t}^t [f^{1j}(x(\bar{s}(s))) - f^{1j}(x(s))] dL^j(s) \right| \leq C \sum_{k=1}^{m_t-1} \left( \operatorname{var}_{t \in [\tau_t + kh_n, \tau_t + (k+1)h_n]} x(t) + h_n \right) \operatorname{var}_{t \in [\tau_t + kh_n, \tau_t + (k+1)h_n]} L^j(t) \leq \\ C \max_{\substack{t_1, t_2 \in T \\ |t_1 - t_2| \leq \frac{1}{n} + h_n}} \operatorname{var}_{t \in [t_1, t_2]} L^j(t) + Ch_n.$$

Таким образом,

$$\left| x_n^1(t) - x^1(t) \right| \leq \left| x_{n0}^1(\tau_t) - x_0^1 \right| + C \sum_{j=1}^q \operatorname{var}_{t \in [0; h_n]} L^j(t) + \\ C \sum_{j=1}^q \sum_{k=0}^{m_t-1} \left( |x_n(\tau_t + kh_n) - x(\tau_t + kh_n)| + \frac{1}{n} \right) |L_n^j(\tau_t + (k+1)h_n) - L_n^j(\tau_t + kh_n)| + C \sum_{j=1}^q \max_{\substack{t_1, t_2 \in T \\ |t_1 - t_2| \leq \frac{1}{n} + h_n}} \operatorname{var}_{t \in [t_1; t_2]} L^j(t) + Ch_n.$$

Аналогичное неравенство получаем и для остальных  $x_n^i$ ,  $i = \overline{1, p}$ :

$$\begin{aligned} |x_n^i(t) - x^i(t)| &\leq |x_{n0}^i(\tau_t) - x_0^i| + C \sum_{j=1}^q \operatorname{var}_{t \in [0; h_n]} L^j(t) + C \sum_{j=1}^q \sum_{k=0}^{m_t-1} (|x_n(\tau_t + kh_n) - x(\tau_t + kh_n)| + \\ &+ \frac{1}{n}) |L_n^j(\tau_t + (k+1)h_n) - L_n^j(\tau_t + kh_n)| + C \sum_{j=1}^q \max_{\substack{t_1, t_2 \in T \\ |t_1 - t_2| \leq \frac{1}{n} + h_n}} \operatorname{var}_{t \in [t_1; t_2]} L^j(t) + Ch_n. \end{aligned}$$

Складывая последние неравенства, получаем

$$\begin{aligned} |x_n(t) - x(t)| &\leq \sum_{i=1}^p |x_{n0}^i(\tau_t) - x_0^i| + C \sum_{j=1}^q \operatorname{var}_{t \in [0; h_n]} L^j(t) + C \sum_{j=1}^q \sum_{k=0}^{m_t-1} (|x_n(\tau_t + kh_n) - x(\tau_t + kh_n)| + \\ &+ \frac{1}{n}) |L_n^j(\tau_t + (k+1)h_n) - L_n^j(\tau_t + kh_n)| + C \sum_{j=1}^q \max_{\substack{t_1, t_2 \in T \\ |t_1 - t_2| \leq \frac{1}{n} + h_n}} \operatorname{var}_{t \in [t_1; t_2]} L^j(t) + Ch_n. \end{aligned}$$

Применяя лемму 1 к последнему неравенству, получим

$$|x_n(t) - x(t)| \leq \sum_{i=1}^p |x_{n0}^i(\tau_t) - x_0^i| + C \sum_{j=1}^q \operatorname{var}_{t \in [0; h_n]} L^j(t) + C \sum_{j=1}^q \max_{\substack{t_1, t_2 \in T \\ |t_1 - t_2| \leq \frac{1}{n} + h_n}} \operatorname{var}_{t \in [t_1; t_2]} L^j(t) + Ch_n.$$

Устремляя  $n \rightarrow \infty$ ,  $h_n \rightarrow 0$  из непрерывности  $L^j$ ,  $j = \overline{1, q}$  на отрезке  $T$ , а значит, и равномерной непрерывности на нем, получим  $x_n(t) \rightarrow x(t)$  для любого  $t \in T$ . Теорема доказана.

Замечание. Если  $\sup_{t \in [0; h_n]} |x_{n0}(t) - x_0| \rightarrow 0$ , то  $\sup_{t \in T} |x_n(t) - x(t)| \rightarrow 0$ .

## Литература

1. Антосик П., Микусинский Я., Сикорский Р. Теория обобщенных функций: секвенциальный подход. М., 1976.
2. Завалишин С. Т., Сесекин А. Н. Импульсные процессы: модели и приложения. М., 1991.
3. Das P. C., Sharma R. R. // Czech. Math. J. 1972. Vol. 22, N 1. P. 145–158.
4. Лазакевич Н. В. // Докл. АН Беларуси. 1994. Т. 38, № 5. С. 23–27.
5. Yablonski A. // Nonlinear Analysis. 2005. Vol. 63. P. 171–197.
6. Антонец А. Б., Радыно Я. В. // Докл. АН СССР. 1991. Т. 318. № 2. С. 267–270.
7. Ковальчук А. Н., Новохрост В. Г., Яблонский О. Л. // Изв. вузов. Математика. 2005. № 3. С. 23–31.
8. Goh J. // Illinois J. Math. 1980. Vol. 24 (2). P. 244–263.
9. Каримова Т. И., Яблонский О. Л. // Вестник БГУ. Сер. 1. 2009. № 2. С. 81–86.

A. I. ZHUK, A. L. YABLONSKI

## SYSTEMS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS IN THE ALGEBRA OF GENERALIZED FUNCTIONS

### Summary

Some systems of differential equations with generalized coefficients are investigated in the algebra of generalized functions. The associated solutions of such systems of differential equations are obtained.

УДК 517.53

Н. В. ГРИБ

**АППРОКСИМАЦИЯ СУММАТОРНЫМИ РАЦИОНАЛЬНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ  
 ТИПА ДЖЕКSONA В ПРОСТРАНСТВЕ НЕПРЕРЫВНЫХ  
 2π-ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ**

*Белорусский государственный педагогический университет им. Максима Танка*

*(Поступила в редакцию 06.05.2010)*

Интегральные рациональные операторы типа Джексона на прямой и окружности впервые были построены В. Н. Русаком [1]. Е. А. Ровба построил аналогичные операторы сумматорного типа для прямой [2], случай же окружности до сих пор не был исследован (см., например, [3, с. 281]). В настоящей работе построены сумматорные рациональные операторы типа Джексона на окружности, исследуется сходимость задаваемых ими последовательностей рациональных функций к непрерывным  $2\pi$ -периодическим функциям и  $2\pi$ -периодическим гельдеровским функциям ограниченной вариации.

Для заданной последовательности комплексных чисел  $\{\alpha_k\}_{k=1}^n$ ,  $0 \leq |\alpha_k| < 1$  соответствующее произведение Бляшке имеет вид

$$\pi_n(z) = \prod_{k=1}^n \frac{z - \alpha_k}{1 - \bar{\alpha}_k z}.$$

Если точку  $z$  повернуть вдоль единичной окружности на угол  $2\pi$ , то  $\arg \pi_n^2(z)$  изменится на  $4\pi n$ , непрерывно возрастаая. Поэтому уравнение  $\pi_n^2(z) - 1 = 0$  имеет  $2n$  различных корней  $z_j = e^{iu_j}$ ,  $j = \overline{1, 2n}$ , расположенных на окружности  $|z| = 1$ .

В пространстве  $C(L)$  непрерывных на единичной окружности функций введем сумматорный рациональный оператор типа Джексона

$$D_{4n-2}(z, f) = \frac{1}{\Psi_n(z)} \sum_{j=1}^{2n} \frac{K_n^2(z, z_j)}{\rho_n(z_j)} f(z_j), \quad (1)$$

где

$$\rho_n(z) = z \sum_{k=1}^n \frac{1 - |\alpha_k|^2}{(1 - \bar{\alpha}_k z)(z - \alpha_k)}, \quad K_n(z, \xi) = \left( \frac{\pi_n(z)}{\pi_n(\xi)} + \frac{\pi_n(\xi)}{\pi_n(z)} - 2 \right) \frac{z\xi}{(z - \xi)^2},$$

$$\Psi_n(z) = \frac{2}{3} (2\rho_n^3(z) + \rho_n(z) - z\rho_n'(z) - z^2\rho_n''(z)).$$

Непосредственно проверяется, что  $D_{4n-2}$  – положительный оператор, значениями которого являются тригонометрические рациональные функции степени не выше  $4n - 2$ .

Введем также обозначения

$$\Phi_n(u) = \arg \pi_n(e^{iu}), \quad \Psi_n(u) = \Psi_n(e^{iu}). \quad (2)$$

Без доказательства приведем ряд лемм, необходимых нам далее.

Л е м м а 1. Если  $z = e^{iu}$ ,  $\xi = e^{iv}$ , то справедливо равенство

$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin^4 \frac{1}{2}(\Phi_n(v) - \Phi_n(u))}{\sin^4 \frac{v-u}{2}} dv = \oint_{|\xi|=1} K_n^2(z, \xi) \frac{d\xi}{i\xi} = \pi \Psi_n(z).$$

Л е м м а 2. Оператор  $D_{4n-2}(z, f)$  является точным на константах.

Л е м м а 3. При  $|z|=1$  справедливо равенство

$$\frac{1}{2\rho_n(z)} \sum_{j=1}^{2n} \frac{K_n(z, z_j)}{\rho_n(z_j)} = 1.$$

Л е м м а 4. Имеют место соотношения

$$\Psi_n(u) > (\Phi'_n(u))^3,$$

$$\Psi_n(u) > \frac{2}{3} \sum_{k=1}^n \frac{1 - |\alpha_k|^2}{\left( (1 - |\alpha_k|)^2 + 4|\alpha_k| \sin^2 \frac{u - \arg \alpha_k}{2} \right)^2}.$$

Теперь получим другое представление оператора  $D_{4n-2}$ . Из (2) находим  $e^{i\Phi_n(u)} = \pi_n(e^{iu})$ . Продифференцируем обе части по  $u$ :

$$ie^{i\Phi_n(u)} \Phi'_n(u) = \pi'_n(e^{iu}) ie^{iu}.$$

С учетом соотношения

$$\pi'_n(z) = \sum_{k=1}^n \pi_n(z) \frac{1 - \bar{\alpha}_k z}{z - \alpha_k} \left( \frac{z - \alpha_k}{1 - \bar{\alpha}_k z} \right)' = \pi_n(z) \sum_{k=1}^n \frac{1 - |\alpha_k|^2}{(1 - \bar{\alpha}_k z)(z - \alpha_k)} = \frac{\pi_n(z) \rho_n(z)}{z}$$

будем иметь

$$\Phi'_n(u) = \frac{\pi'_n(e^{iu}) e^{iu}}{\pi_n(e^{iu})} = \rho_n(e^{iu}). \quad (3)$$

При  $z = e^{iu}$ ,  $z_j = e^{iu_j}$ ,  $f(e^{iu}) = \varphi(u)$  из (1), (3) и леммы 1 получим

$$D_{4n-2}(u, \varphi) = \frac{1}{\Psi_n(u)} \sum_{j=1}^{2n} \frac{\varphi(u_j)}{\Phi'_n(u_j)} \frac{\sin^4 \frac{1}{2}(\Phi_n(u) - \Phi_n(u_j))}{\sin^4 \frac{u - u_j}{2}}. \quad (4)$$

Т е о р е м а 1. Если  $\varphi(u) \in C_{2\pi}$ , то имеет место неравенство

$$|D_{4n-2}(u, \varphi) - \varphi(u)| \leq (1 + \pi\sqrt{2}) \omega((\Phi'_n(u))^{-1}),$$

где  $\omega(\delta)$  – модуль непрерывности функции  $\varphi(u)$ .

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим  $E = \{j | j = \overline{1..2n}, |u - u_j| < (\Phi'_n(u))^{-1}\}$ ,  $CE = \{1, 2, \dots, 2n\} \setminus E$ . Тогда с учетом определения модуля непрерывности для уклонения функции  $\varphi(u)$  от оператора  $D_{4n-2}(u, \varphi)$  будем иметь

$$\begin{aligned}
|\varphi(u) - D_{4n-2}(u, \varphi)| &= \frac{1}{\Psi_n(u)} \sum_{j=1}^{2n} \frac{|\varphi(u_j) - \varphi(u)| \sin^4 \frac{1}{2}(\Phi_n(u) - \Phi_n(u_j))}{\Phi_n'(u_j) \sin^4 \frac{u-u_j}{2}} \leq \\
&\frac{1}{\Psi_n(u)} \sum_{j \in E} \frac{\omega(|u-u_j|) \sin^4 \frac{1}{2}(\Phi_n(u) - \Phi_n(u_j))}{\Phi_n'(u_j) \sin^4 \frac{u-u_j}{2}} + \\
&\frac{1}{\Psi_n(u)} \sum_{j \in CE} \frac{\omega(|u-u_j|) \sin^4 \frac{1}{2}(\Phi_n(u) - \Phi_n(u_j))}{\Phi_n'(u_j) \sin^4 \frac{u-u_j}{2}} = S_1 + S_2.
\end{aligned}$$

Воспользовавшись неравенством  $\omega(|u-u_j|) \leq \omega((\Phi_n'(u))^{-1})(|u-u_j| \Phi_n'(u) + 1)$ , получим

$$\begin{aligned}
S_1 + S_2 &\leq \frac{\omega((\Phi_n'(u))^{-1})}{\Psi_n(u)} \sum_{j=1}^{2n} \frac{1}{\Phi_n'(u_j)} \frac{\sin^4 \frac{1}{2}(\Phi_n(u) - \Phi_n(u_j))}{\sin^4 \frac{u-u_j}{2}} + \\
&\frac{\omega((\Phi_n'(u))^{-1}) \Phi_n'(u)}{\Psi_n(u)} \sum_{j \in CE} \frac{|u-u_j| \sin^4 \frac{1}{2}(\Phi_n(u) - \Phi_n(u_j))}{\Phi_n'(u_j) \sin^4 \frac{u-u_j}{2}} = \\
&\omega((\Phi_n'(u))^{-1}) \left( 1 + \frac{\Phi_n'(u)}{\Psi_n(u)} \sum_{j \in CE} \frac{|u-u_j| \sin^4 \frac{1}{2}(\Phi_n(u) - \Phi_n(u_j))}{\Phi_n'(u_j) \sin^4 \frac{u-u_j}{2}} \right) \leq \\
&\omega((\Phi_n'(u))^{-1}) \left( 1 + \frac{\pi \Phi_n'(u)}{\Psi_n(u)} \sum_{j \in CE} \frac{\left| \frac{\sin^3 \frac{1}{2}(\Phi_n(u) - \Phi_n(u_j))}{\Phi_n'(u_j) \sin^3 \frac{u-u_j}{2}} \right|}{\Phi_n'(u_j) \sin^3 \frac{u-u_j}{2}} \right) = \omega((\Phi_n'(u))^{-1})(1 + S_3). \quad (5)
\end{aligned}$$

К сумме  $S_3$  применим неравенство Коши–Буняковского и воспользуемся леммами 2–4:

$$\begin{aligned}
S_3 &= \frac{\pi \Phi_n'(u)}{\Psi_n(u)} \sum_{j \in CE} \left( \frac{\left| \sin \frac{1}{2}(\Phi_n(u) - \Phi_n(u_j)) \right|}{\sqrt{\Phi_n'(u_j)} \left| \sin \frac{u-u_j}{2} \right|} \right) \left( \frac{\sin^2 \frac{1}{2}(\Phi_n(u) - \Phi_n(u_j))}{\sqrt{\Phi_n'(u_j)} \sin^2 \frac{u-u_j}{2}} \right) \leq \\
&\frac{\pi (\Phi_n'(u))^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\Psi_n(u)}} \sqrt{\sum_{j=1}^{2n} \frac{\sin^4 \frac{1}{2}(\Phi_n(u) - \Phi_n(u_j))}{\Psi_n(u) \Phi_n'(u_j) \sin^4 \frac{u-u_j}{2}}} \sqrt{\sum_{j=1}^{2n} \frac{\sin^2 \frac{1}{2}(\Phi_n(u) - \Phi_n(u_j))}{\Phi_n'(u) \Phi_n'(u_j) \sin^2 \frac{u-u_j}{2}}} = \\
&\frac{\pi \sqrt{2} (\Phi_n'(u))^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\Psi_n(u)}} \leq \frac{\pi \sqrt{2} \sqrt{\Psi_n(u)}}{\sqrt{\Psi_n(u)}} = \pi \sqrt{2}.
\end{aligned}$$

Подставив данное выражение в (5), получим утверждение теоремы 1.

С л е д с т в и е 1. Если  $\varphi(u) \in C_{2\pi}$  и  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (1 - |\alpha_k|) = \infty$ , то последовательность рациональных функций  $D_{4n-2}(u, \varphi)$  равномерно сходится к функции  $\varphi(u)$  на отрезке  $[0, 2\pi]$ .

Это следствие верно в силу оценки при  $|z| = 1$ :

$$\begin{aligned} \Phi'_n(u) &= e^{iu} \sum_{k=1}^n \frac{1 - |\alpha_k|^2}{(1 - \bar{\alpha}_k e^{iu})(e^{iu} - \alpha_k)} = \sum_{k=1}^n \frac{1 - |\alpha_k|^2}{1 + |\alpha_k|^2 - 2|\alpha_k| \cos(u - \arg \alpha_k)} \geq \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1 - |\alpha_k|^2}{(1 + |\alpha_k|)^2} = \sum_{k=1}^n \frac{1 - |\alpha_k|}{1 + |\alpha_k|} > \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (1 - |\alpha_k|) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty. \end{aligned}$$

С л е д с т в и е 2. Если  $\varphi(u)$  удовлетворяет условию Литвица

$$|\varphi(u') - \varphi(u'')| \leq M |u' - u''|^\alpha, \quad 0 < \alpha \leq 1,$$

то имеет место неравенство

$$|D_{4n-2}(u, \varphi) - \varphi(u)| \leq \frac{M(1 + \pi\sqrt{2})}{(\Phi'_n(u))^\alpha}.$$

Следствие вытекает из свойств модуля непрерывности.

Обозначим через  $VH_{2\pi}^\alpha$  класс функций из пространства  $C_{2\pi}$ , имеющих ограниченную вариацию на отрезке  $[0, 2\pi]$ ,  $V_0^{2\pi}[\varphi] \leq 1$ , и удовлетворяющих условию Липшица  $Lip \alpha$ ,  $0 < \alpha < 1$ .

Рациональные равномерные приближения таких функций изучались Е. П. Долженко и А. А. Абдугаппаровым (см., например, [4]), Г. Фройдом [5], А. П. Булановым [6]. В случае отрезка окончательный результат принадлежит А. А. Пекарскому [7] и П. П. Петрушеву [8], в периодическом случае – А. А. Пекарскому [9]. Он состоит в том, что наилучшие равномерные рациональные приближения гельдеровских функций ограниченной вариации имеют порядок  $\ln n/n$ .

Т е о р е м а 2. Если  $\varphi \in VH_{2\pi}^\alpha$ , то при подходящем выборе параметров  $\{\alpha_k\}_1^n$  справедлива оценка

$$\|D_{4n-2}(u, \varphi) - \varphi(u)\| = O\left(\frac{\ln n}{n}\right).$$

Опишем выбор параметров  $\{\alpha_k\}_1^n$ , на котором реализуется оценка теоремы. Для каждого фиксированного  $n \in \mathbb{N}$  определим числа

$$\delta_n^1 = \left(\frac{4 \ln^2 n}{\alpha^2 n}\right)^{\frac{1}{\alpha}}, \quad N_1 = \left[\frac{\ln^2 n}{\alpha^2} + 1\right], \quad \delta_n^2 = \left(\frac{4 \ln n}{\alpha^2 n}\right)^{\frac{1}{\alpha}}, \quad N_2 = \left[\frac{\ln n}{\alpha^2} + 1\right]. \quad (6)$$

Построим разбиение отрезка  $[0, 2\pi]$  точками  $\{\tau_j\}_0^{m_2}$ ,  $0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_{m_2} = 2\pi$  по правилу

$$\tau_k = \max\{\tau : \tau_{k-1} < \tau \leq 2\pi, V_{\tau_{k-1}}^\tau[\varphi] \leq \omega(\delta_n^2)\}.$$

Количество таких параметров, согласно (6), удовлетворяет условию

$$m_2 \leq \left[\frac{1}{\omega(\delta_n^2)}\right] + 1 = \left[\frac{\alpha^2 n}{4 \ln n}\right] + 1.$$

Построим также разбиение отрезка  $[0, 2\pi]$  точками  $\{\theta_j\}_0^{m_1}$ , объединяя по  $[\ln n]$  отрезков, соответствующих первому разбиению. Тогда точки  $\{\theta_j\}_0^{m_1}$  удовлетворяют условию

$$V_{\theta_k}^{\theta_{k+1}}[\varphi] \leq \omega(\delta_n^1) = \frac{4 \ln^2 n}{\alpha^2 n}, \quad m_1 \leq \left[ \frac{\alpha^2 n}{4 \ln^2 n} \right] + 1.$$

Будем называть точки  $\{\theta_j\}_0^{m_1}$  и  $\{\tau_j\}_0^{m_2}$  точками разбиения отрезка  $[0, 2\pi]$  соответственно первого и второго ранга.

Поскольку  $\varphi(u)$  –  $2\pi$ -периодическая функция, то можно считать, что вместе с разбиением отрезка  $[0, 2\pi]$  точками  $\{\theta_j\}_0^{m_1}$  и  $\{\tau_j\}_0^{m_2}$  происходит разбиение отрезка  $[2\pi, 4\pi]$  соответственно точками  $\theta_{j+m_1} = \theta_j + 2\pi$ ,  $j = \overline{0, m_1}$ ,  $\tau_{j+m_2} = \tau_j + 2\pi$ ,  $j = \overline{0, m_2}$ , и разбиение отрезка  $[-2\pi, 0]$  точками  $\theta_{j-m_1} = \theta_j - 2\pi$ ,  $j = \overline{1, m_1}$ ,  $\tau_{j-m_2} = \tau_j - 2\pi$ ,  $j = \overline{0, m_2}$ , причем для расширенного разбиения отрезка  $[-2\pi, 4\pi]$  сохраняются свойства первоначального разбиения отрезка  $[0, 2\pi]$ .

На каждом луче  $\arg z = \theta_k$  разместим  $N_1$  точек  $\alpha_k = (1 - \rho^j) e^{i\theta_k}$ ,  $k = \overline{0, m_1}$ ,  $j = \overline{1, N_1}$ , где  $\rho = \exp(-1/\sqrt{N_1})$ . Разместим также  $2m_2$  параметров  $\{\alpha_k\}$  в точках  $(1 - \Delta\tau_k/2\pi) e^{i\tau_k}$ ,  $k = \overline{1, m_2}$  и  $(1 - \Delta\tau_{k+1}/2\pi) e^{i\tau_k}$ ,  $k = \overline{0, m_2 - 1}$ ,  $\Delta\tau_k = \tau_k - \tau_{k-1}$ , полагая кратность каждой точки, равной  $N_2$ . Остальные параметры  $\{\alpha_k\}$  принимаем равными 0, их количество удовлетворяет соотношению

$$n - (m_1 + 1)N_1 - 2m_2N_2 \geq n - \left( \frac{\alpha^2 n}{4 \ln^2 n} + 2 \right) \left( \frac{\ln^2 n}{\alpha^2} + 1 \right) - 2 \left( \frac{\alpha^2 n}{4 \ln n} + 1 \right) \left( \frac{\ln n}{\alpha^2} + 1 \right) > \frac{n}{8}.$$

При указанном выборе параметров  $\{\alpha_k\}_1^n$  имеет место следующая лемма.

*Л е м м а 5. Выполняется асимптотическое равенство*

$$\begin{aligned} \Phi'_n(u) \asymp & n + \ln n \sum_{k=0}^{m_1} \min \left\{ \left| \sin^{-1} \frac{u - \theta_k}{2} \right|, n^{\frac{1}{\alpha}} \right\} + \\ & + \ln n \sum_{k=1}^{m_2} \min \left\{ \frac{1}{\Delta\tau_k}, \Delta\tau_k \sin^{-2} \frac{u - \tau_k}{2} \right\} + \ln n \sum_{k=0}^{m_2-1} \min \left\{ \frac{1}{\Delta\tau_{k+1}}, \Delta\tau_{k+1} \sin^{-2} \frac{u - \tau_k}{2} \right\}. \end{aligned}$$

Константы в нижней и верхней оценках  $\Phi'_n(u)$  обозначим соответственно через  $C^*$  и  $C^*$ .

*Л е м м а 6. Если  $\tau_s \leq u < v \leq \tau_{s+1}$ ,  $v - u < \tau_{s+1} - v$ , где  $\tau_s, \tau_{s+1}$  – подряд идущие точки разбиения второго ранга, то имеет место неравенство*

$$\frac{\Phi'_n(v)}{\Phi'_n(u)} < 5.$$

*Д о к а з а т е л ь с т в о.* Пусть  $\Phi'_{n,1}(u)$  – сумма тех слагаемых, для которых  $u - \pi \leq \arg \alpha_k < u$ , соответственно  $\Phi'_{n,2}(u)$  – сумма слагаемых, для которых  $u < \arg \alpha_k < u + \pi$ . Очевидно,  $\Phi'_{n,1}(u) > \Phi'_{n,1}(v)$ , поэтому

$$\frac{\Phi'_n(v)}{\Phi'_n(u)} = \frac{\Phi'_{n,1}(v) + \Phi'_{n,2}(v)}{\Phi'_{n,1}(u) + \Phi'_{n,2}(u)} < \frac{\Phi'_{n,1}(v) + \Phi'_{n,2}(v)}{\Phi'_{n,1}(v) + \Phi'_{n,2}(u)} < 1 + \frac{\Phi'_{n,2}(v)}{\Phi'_{n,2}(u)}. \quad (7)$$

Во второй сумме на основании условия леммы  $u - \arg \alpha_k < 2(v - \arg \alpha_k)$ , значит

$$\Phi'_{n,2}(u) > \sum \frac{1 - |\alpha_k|^2}{(1 - |\alpha_k|)^2 + 16|\alpha_k| \sin^2 \frac{v - \arg \alpha_k}{2}} > \frac{1}{4} \sum \frac{1 - |\alpha_k|^2}{(1 - |\alpha_k|)^2 + 4|\alpha_k| \sin^2 \frac{v - \arg \alpha_k}{2}}.$$

Подставляя полученное соотношение в (7), получим утверждение леммы 6.

**Доказательство теоремы 2.** Пусть  $u \in [\theta_v, \theta_{v+1}]$  при некотором  $v$ ,  $0 \leq v \leq m_1$ .

Пусть также  $\theta_p$  – наименьшая точка первого ранга такая, что  $u - \pi < \theta_p$ . Тогда

$$|\varphi(u) - D_{4n-2}(u, \varphi)| \leq \left( \sum_{\theta_p \leq u_j \leq \theta_{v-1}} + \sum_{\theta_{v-1} < u_j \leq \theta_{v+2}} + \sum_{\theta_{v+2} < u_j < \theta_{p+2\pi}} \right) \times \frac{|\varphi(u_j) - \varphi(u)| \sin^4 \frac{1}{2} (\Phi_n(u) - \Phi_n(u_j))}{\Psi_n(u) \Phi_n'(u_j) \sin^4 \frac{u - u_j}{2}} = \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3. \quad (8)$$

Для  $\Sigma_3$  имеем оценку

$$\begin{aligned} \Sigma_3 &\leq \frac{1}{\Psi_n(u)} \sum_{k=v+2}^{p+m_1-1} \sum_{\theta_k < u_j \leq \theta_{k+1}} \frac{|\varphi(u_j) - \varphi(u)|}{\Phi_n'(u_j) \sin^4 \frac{u - u_j}{2}} \leq \\ &\frac{1}{\Psi_n(u)} \sum_{k=v+2}^{p+m_1-1} 2(k-v) \omega(\delta_n^1) \sum_{i=t_k}^{t_{k+1}-1} \sum_{\tau_i < u_j \leq \tau_{i+1}} \frac{1}{\Phi_n'(u_j) \sin^4 \frac{u - u_j}{2}} \leq \\ &\frac{2\omega(\delta_n^1)}{\Psi_n(u)} \sum_{k=v+2}^{p+m_1-1} (k-v) \sum_{i=t_k}^{t_{k+1}-1} \sum_{\tau_i < u_j \leq \tau_{i+1}} \frac{\Phi_n'(\xi_j)(u_{j+1} - u_j) / \pi}{\Phi_n'(u_j) \sin^4 \frac{u - u_j}{2}} + \\ &\frac{2\omega(\delta_n^1)}{\Psi_n(u)} \sum_{k=v+2}^{p+m_1-1} (k-v) \sum_{i=t_k}^{t_{k+1}-1} \sum_{\bar{u}_i < u_j \leq \tau_{i+1}} \frac{\Phi_n'(\zeta_j)(u_j - u_{j-1}) / \pi}{\Phi_n'(u_j) \sin^4 \frac{u - u_j}{2}}, \end{aligned}$$

где  $t_k, t_{k+1}$  – номера точек разбиения второго ранга, совпадающих с точками  $\theta_k, \theta_{k+1}$ ,  $\bar{u}_i$  – ближайший к середине отрезка  $[\tau_i, \tau_{i+1}]$  нуль функции  $\sin 2\Phi_n(u)$ ,  $\xi_j \in [u_j, u_{j+1}]$ ,  $\zeta_j \in [u_{j-1}, u_j]$ .

Отношения  $\frac{\Phi_n'(\xi_j)}{\Phi_n'(u_j)}$ ,  $\frac{\Phi_n'(\zeta_j)}{\Phi_n'(u_j)}$  ограничены в силу леммы 6, поэтому, заменяя интегральные

суммы интегралами, получим

$$\begin{aligned} \Sigma_3 &\leq \frac{C_1 \omega(\delta_n^1)}{\Psi_n(u)} \sum_{k=v+2}^{p+m_1-1} (k-v) \int_{\theta_k}^{\theta_{k+1}} \frac{dt}{(u-t)^4} = \frac{C_1 \omega(\delta_n^1)}{3\Psi_n(u)} \sum_{k=v+2}^{p+m_1-1} (k-v) \left( \frac{1}{(\theta_k - u)^3} - \frac{1}{(\theta_{k+1} - u)^3} \right) \leq \\ &\frac{C_1 \omega(\delta_n^1)}{3\Psi_n(u)} \sum_{k=v+2}^{p+m_1-1} \frac{1}{(\theta_k - u)^3} \leq \frac{C_1 \omega(\delta_n^1)}{24\Psi_n(u)} \sum_{k=v+2}^{p+m_1-1} \frac{1}{\sin^3 \frac{\theta_k - u}{2}}. \end{aligned} \quad (9)$$

Если  $\sin^{-1} \frac{\theta_k - u}{2} < n^{-\alpha}$  для всех  $k$ ,  $v+2 \leq k \leq p+m-1$ , то по леммам 4 и 5

$$C_*^3 \ln^3 n \sum_{k=v+2}^{p+m} \sin^{-3} \frac{\theta_k - u}{2} < (\Phi_n'(u))^3 < \Psi_n(u)$$

и для  $\Sigma_3$  с учетом (6) и (9) будет верна оценка

$$\Sigma_3 \leq \frac{C_1 \omega(\delta_n^1)}{24 C_*^3 \ln^3 n} = \frac{C_2}{n \ln n}. \quad (10)$$

Если же  $\sin^{-1} \frac{\theta_k - u}{2} \geq n^{\frac{1}{\alpha}}$  для некоторого  $k$ ,  $v+2 \leq k \leq p+m-1$ , то по лемме 5  $\Phi'_n(u) > C_* n^{\frac{1}{\alpha}} \ln n$ , и тогда с учетом следствия из теоремы 1 получим

$$|D_{4n-2}(u, \varphi) - \varphi(u)| \leq \frac{1 + \pi\sqrt{2}}{(\Phi'_n(u))^\alpha} < \frac{(1 + \pi\sqrt{2})}{C_*^\alpha n \ln^\alpha n}. \quad (11)$$

Для  $\Sigma_1$  верна аналогичная оценка.

Оценим слагаемое  $\Sigma_2$ . Пусть число  $\mu$  такое, что  $u \in [\tau_\mu, \tau_{\mu+1}]$ . Тогда

$$\Sigma_2 \leq \left( \sum_{\theta_{v-1} < u_j \leq \tau_{\mu-1}} + \sum_{\tau_{\mu-1} < u_j \leq \tau_{\mu+2}} + \sum_{\tau_{\mu+2} < u_j < \theta_{v+2}} \right) \times \frac{|\varphi(u_j) - \varphi(u)| \sin^4 \frac{1}{2} (\Phi_n(u) - \Phi_n(u_j))}{\Psi_n(u) \Phi'_n(u_j) \sin^4 \frac{u - u_j}{2}} = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3. \quad (12)$$

Для  $\sigma_2$  очевидна оценка

$$\sigma_2 \leq 3\omega(\delta_n^2) = \frac{12 \ln n}{\alpha^2 n}. \quad (13)$$

Оценим  $\sigma_1$  аналогично  $\Sigma_3$

$$\sigma_1 \leq \frac{2\omega(\delta_n^1)}{\Psi_n(u)} \sum_{\theta_{v-1} < u_j \leq \tau_{\mu-1}} \frac{1}{\Phi'_n(u_j) \sin^4 \frac{u - u_j}{2}} \leq \frac{160\omega(\delta_n^1)}{\Psi_n(u)} \sum_{j=l}^{\mu-2} \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} \frac{dt}{16 \sin^4 \frac{u-t}{2}}, \quad (14)$$

где  $l$  – номер точки разбиения второго ранга, совпадающей с точкой  $\theta_{v-1}$ .

Для тех  $j$ , для которых  $2 \sin \frac{u - \tau_{j+1}}{2} > \frac{\Delta \tau_{j+1}}{2\pi}$ , будем иметь

$$\int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} \frac{dt}{16 \sin^4 \frac{u-t}{2}} \leq \frac{\Delta \tau_{j+1}}{16 \sin^4 \frac{u - \tau_{j+1}}{2}} < \frac{8\pi \frac{\Delta \tau_{j+1}}{2\pi}}{\left( \frac{\Delta \tau_{j+1}^2}{4\pi^2} + 4 \left( 1 - \frac{\Delta \tau_{j+1}}{2\pi} \right) \sin^2 \frac{u - \tau_{j+1}}{2} \right)^2}.$$

Если же  $2 \sin \frac{u - \tau_{j+1}}{2} \leq \frac{\Delta \tau_{j+1}}{2\pi}$ , то

$$\int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} \frac{dt}{16 \sin^4 \frac{u-t}{2}} \leq \frac{1}{8 \sin^3 \frac{u - \tau_{j+1}}{2}} < \frac{8\pi \frac{\Delta \tau_{j+2}}{2\pi}}{\left( \frac{\Delta \tau_{j+2}^2}{2\pi} + 4 \left( 1 - \frac{\Delta \tau_{j+2}}{2\pi} \right) \sin^2 \frac{u - \tau_{j+2}}{2} \right)^2}.$$

В таком случае соотношение (14) можно переписать в виде

$$\sigma_1 \leq \frac{C_3 \omega(\delta_n^1)}{\Psi_n(u)} \sum_{j=1}^{n-2} \left( 1 - \left( 1 - \frac{\Delta \tau_{j+1}}{2\pi} \right)^2 \right) \left( \frac{\Delta \tau_{j+1}^2}{4\pi^2} + 4 \left( 1 - \frac{\Delta \tau_{j+1}}{2\pi} \right) \sin^2 \frac{u - \tau_{j+1}}{2} \right)^{-2}. \quad (15)$$

Так как кратность точек второго ранга равна  $N_2 = \left[ \frac{\ln n}{\alpha^2} + 1 \right]$ , то из (15) и леммы 4 для  $\sigma_1$  следует оценка

$$\sigma_1 \leq \frac{C_3 \alpha^2 \omega(\delta_n^1)}{\ln n} = \frac{4C_3 \ln n}{n}. \quad (16)$$

Такая же оценка справедлива и для  $\sigma_3$ , что в совокупности с соотношениями (8), (10), (11), (12), (13), (16) и доказывает теорему 2.

Из теоремы 2 следует, что операторы типа Джексона на классе  $VH_{2\pi}^\alpha$  осуществляют приближение порядка наилучшего рационального.

### Литература

1. Русак В. Н. Рациональные функции как аппарат приближения. Минск, 1979.
2. Ровба Е. А. Интерполяция и ряды Фурье в рациональной аппроксимации. Гродно, 2001.
3. Peкарский А. А. // East journal on approximations. 2007. Vol. 13, N 3. P. 227–319.
4. Абдугаппаров А. А. Приближение функций с выпуклой производной посредством рациональных функций: автореф. ... дис. канд. физ.-мат. наук. Калинин, 1974.
5. Freud G. // Acta. Math. Acad. Sci. Hung. 1966. Vol. 17, N 3–4. P. 313–324.
6. Буланов А. П. // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1975. Т. 39, № 5. С. 1142–1181.
7. Пекарский А. А. // Весті АН БССР. Сер. фіз.-мат. наук. 1978. № 5. С. 34–39.
8. Petrushev P. // Pliska Studia Math. Bulgarica. 1997. Vol. 1. P. 145–155.
9. Пекарский А. А. // Матем. сб. 1982. Т. 117, № 1. С. 114–130.

*N. V. GRIB*

### APPROXIMATION BY SUMMATORY RATIONAL OPERATORS OF JACKSON TYPE IN THE SPACE OF CONTINUOUS $2\pi$ -PERIODIC FUNCTIONS

#### Summary

In this article summatory rational operators of Jackson type on a circle are constructed. It is proved, that if the  $2\pi$ -periodic function  $\varphi$  has a limited variation and satisfies the Lipschitz condition of the order  $\alpha$ ,  $0 < \alpha < 1$ , there exists a set of points  $\{\alpha_k\}_1^n$ , depending on  $\varphi$ , such that the corresponding operator  $D_{4n-2}$  satisfies the condition

$$|D_{4n-2}(u, \varphi) - \varphi(u)| = O\left(\frac{\ln n}{n}\right).$$

УДК 517.968

Г. А. РАСОЛЬКО

**РЕШЕНИЕ СИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО РОДА  
С ЯДРОМ КОШИ И СПЕЦИАЛЬНОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ  
МЕТОДОМ ОРТОГОНАЛЬНЫХ МНОГОЧЛЕНОВ**

*Белорусский государственный университет*

*(Поступила в редакцию 18.06.2010)*

Предлагается алгоритм численного решения сингулярного интегрального уравнения первого рода с ядром Коши и специальной правой частью вида

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\varphi(t)}{t-x} dt = \ln \frac{1-x}{1+x} f(x), \quad -1 < x < 1, \quad (1)$$

в классах  $h(-1)$  и  $h(1)$ , основанный на разложении сингулярного интеграла по многочленам Чебышева. Здесь  $f(x)$  – заданная на  $[-1, 1]$  функция, непрерывная по Гельдеру,  $\varphi(x)$  – искомая функция (класс  $h(-1)$  по Мусхелишвили означает ограниченность решения в окрестности точки  $z = -1$  и интегрируемую неограниченность в окрестности точки  $z = 1$ ).

Аппарат сингулярных интегральных уравнений (СИУ) применяется при исследовании большого класса граничных задач теории упругости, аэродинамики и в других областях естествознания [1–3]. Эффективность численных методов для решения подобных задач во многом зависит от способа дискретизации задачи. Среди известных подходов следует отметить методы, основанные на полиномиальной аппроксимации искомого решения, в том числе метод ортогональных многочленов [2–4].

Метод ортогональных многочленов базируется на замечательном свойстве классических ортогональных многочленов Чебышева первого и второго рода для сингулярных интегралов, а именно:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{T_n(t)}{\sqrt{1-t^2}} \frac{dt}{t-x} = U_{n-1}(x), \quad \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{1-t^2} \frac{U_{n-1}(t) dt}{t-x} = -T_n(x), \quad |x| < 1, \quad n \geq 1,$$

где  $T_n(x)$ ,  $U_{n-1}(x)$  – многочлены Чебышева первого и второго рода соответственно.

Эти так называемые спектральные соотношения для сингулярных интегралов позволили в дальнейшем построить хорошо известные методы решения простейшего сингулярного интегрального уравнения (1), основанные на обращении сингулярного интеграла в различных классах функций [2–4].

В [5, 6] получены «квазиспектральные соотношения» для сингулярного интеграла со степенно-логарифмической особенностью

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 (1-t)^\alpha (1+t)^\beta \ln \frac{1-t}{1+t} \frac{P_k(t) dt}{t-x}, \quad -1 < x < 1, \quad |\alpha| = |\beta| = 1/2,$$

где  $P_k$  – многочлен Чебышева первого или второго рода степени  $k \geq 0$ .

Приведем один из результатов:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 (1-t)^\alpha (1+t)^\beta \ln \frac{1-t}{1+t} \frac{U_k(t) dt}{t-x} = \sum_{j=0}^{k+\alpha+\beta-1} \gamma_j^{(k)} U_j(x) - \pi (1-x)^\alpha (1+x)^\beta U_k(x), \quad (2)$$

$$k = 0, 1, \dots,$$

$$\gamma_j^{(k)} = Q_{k-j-1} + Q_{k+j+1} + 2A_{jk}, \quad j = \overline{0, k + \alpha + \beta - 1},$$

где

$$Q_M = \frac{1}{\sin \alpha \pi} \begin{cases} \sum_{k=0}^{M1} b_k^{(M)} c_{\left[\frac{M+\alpha+\beta}{2}\right]-k}^{(1)}, & M + \alpha + \beta - \text{четное}, \\ 0, & M = -1, \\ \sum_{k=0}^{M2} b_k^{(M)} c_{\left[\frac{M-1+\alpha+\beta}{2}\right]-k}^{(2)}, & M + \alpha + \beta - \text{нечетное}, \end{cases}$$

$$M1 = \min \left\{ \left[ \frac{M}{2} \right], \left[ \frac{M + \alpha + \beta}{2} \right] \right\}, \quad M2 = \min \left\{ \left[ \frac{M}{2} \right], \left[ \frac{M - 1 + \alpha + \beta}{2} \right] \right\},$$

$$b_0^{(n)} = 2^n, \quad b_{k+1}^{(n)} = -b_k^{(n)} \frac{(n-2k)(n-1-2k)}{4(k+1)(n-k)}, \quad k = 0, \left[ \frac{n-1}{2} \right],$$

$$\mu_k = \sum_{j=0}^k g_j v_{k-j}, \quad g_0 = v_0 = 1, \quad g_{j+1} = g_j \frac{j-\alpha}{j+1}, \quad v_{j+1} = v_j \frac{\beta-j}{j+1}, \quad j = 0, 1, \dots,$$

$$c_p^{(1)} = \sum_{n=0}^p \frac{2\mu_{2n}}{2p-2n+1}, \quad c_p^{(2)} = \sum_{n=0}^p \frac{2\mu_{2n+1}}{2p-2n+1}, \quad p = 0, 1, \dots,$$

$$A_{jk} = \int_{-1}^1 \sqrt{1-\tau^2} (1-\tau)^\alpha (1+\tau)^\beta U_j(\tau) U_k(\tau) d\tau, \quad 0 \leq j \leq k + \alpha + \beta - 1.$$

Использование возможностей компьютерной алгебры математического пакета Mathematica позволяет упростить формулы (2) при  $\alpha = -\beta = \pm 1/2$ , что не только существенно сокращает время по их вычислению, но и визуализирует результаты. Привлечение же известных соотношений для многочленов Чебышева первого и второго рода позволило построить и некоторые другие разложения. В частности, получены следующие результаты.

**Т е о р е м а 1.** Для  $x \in (-1, 1)$  и  $k \geq 0$  справедливы равенства

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} \ln \frac{1-t}{1+t} U_k(t) \frac{dt}{t-x} = -4U_{k-1}(x) - \sum_{j=1}^{\left[\frac{k}{2}\right]} \sum_{m=0}^{j-1} \frac{8}{2m+1} U_{k-2j}(x) -$$

$$\sum_{j=1}^{\left[\frac{k-1}{2}\right]} \left( \sum_{m=0}^j \frac{8}{2m+1} - \frac{4}{2j+1} \right) U_{k-1-2j}(x) - \pi \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} U_k(x), \quad (3)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} \ln \frac{1-t}{1+t} T_k(t) \frac{dt}{t-x} = -2U_{k-1}(x) - \sum_{j=1}^{\left[\frac{k}{2}\right]} \frac{4}{2j-1} U_{k-2j}(x) -$$

$$\sum_{j=1}^{\left[\frac{k-1}{2}\right]} \frac{8j}{4j^2-1} U_{k-1-2j}(x) - \pi \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} T_k(x). \quad (4)$$

Доказательство истинности равенств (3), (4) проведем методом математической индукции, основываясь на двух леммах из [5].

**Лемма 1.** Пусть  $\alpha$  и  $\beta$  таковы, что  $|\alpha| = |\beta| = 0,5$ . Для любого многочлена  $P_M(x)$  степени  $M \geq 0$  справедливо:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 (1-t)^\alpha (1+t)^\beta P_M(t) \ln \frac{1-t}{1+t} dt = \frac{1}{\sin \alpha \pi} \operatorname{Res}_{z=\infty} \left( (z-1)^\alpha (z+1)^\beta P_M(z) \ln \frac{z-1}{z+1} \right). \quad (5)$$

**Лемма 2.** Пусть  $\alpha$  и  $\beta$  таковы, что  $|\alpha| = |\beta| = 0,5$ . При  $m \geq 0$  для  $|x| < 1$  имеет место следующее представление:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 t^m (1-t)^\alpha (1+t)^\beta \ln \frac{1-t}{1+t} \frac{dt}{t-x} = -P_{m+(\alpha+\beta)-1}(x) - \pi (1-x)^\alpha (1+x)^\beta x^m, \quad (6)$$

где  $P_{m+(\alpha+\beta)-1}(z)$  – главная часть на бесконечности функции

$$z^m (z-1)^\alpha (z+1)^\beta \ln \frac{z-1}{z+1},$$

представляющая собой многочлен степени  $m + (\alpha + \beta) - 1$  ( $m + (\alpha + \beta) - 1 \geq 0$ ) и тождественный нуль в противном случае.

При  $k = 0$  и  $k = 1$  на основании (6) с учетом того, что  $U_{-1}(x) = 0$ ,  $U_0(x) = 1$ ,  $U_1(x) = 2x$ , равенство (3) верно. Пусть (3) верно для  $k \leq n$ , т. е.

$$I_n \equiv \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} \ln \frac{1-t}{1+t} U_n(t) \frac{dt}{t-x} = -4U_{n-1}(x) - \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \sum_{m=0}^{j-1} \frac{8}{2m+1} U_{n-2j}(x) - \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \left( \sum_{m=0}^j \frac{8}{2m+1} - \frac{4}{2j+1} \right) U_{n-1-2j}(x) - \pi \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} U_n(x).$$

Покажем, что (3) справедливо и для  $k = n + 1$ .

Известно, что при  $n > 1$

$$U_{n+1}(x) = 2xU_n(x) - U_{n-1}(x), \quad (7)$$

поэтому

$$I_{n+1} = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} \ln \frac{1-t}{1+t} \frac{(2tU_n(t) - U_{n-1}(t)) dt}{t-x} = J_n + 2xI_n - I_{n-1},$$

где

$$J_n = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} \ln \frac{1-t}{1+t} T_n(t) dt.$$

Так как на основании (5)  $J_n = \begin{cases} -8 \left( 1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \right), & n - \text{нечетное,} \\ -8 \left( 1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n+1} \right) + \frac{4}{n+1}, & n - \text{четное,} \end{cases}$  то, используя (7), по-

лучаем справедливость (3) для  $k = n + 1$ .

Доказательство равенства (4) проводится аналогично с использованием при  $n > 1$  соотношения

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), \quad (8)$$

и того, что  $J_n = \begin{cases} -\frac{4}{n}, & n - \text{нечетное,} \\ -\frac{2}{n-1} - \frac{2}{n+1}, & n - \text{четное.} \end{cases}$

Теорема доказана.

**Теорема 2.** Для  $x \in (-1, 1)$  и  $k \geq 0$  справедливы равенства

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} \ln \frac{1-t}{1+t} T_k(t) \frac{dt}{t-x} = 2U_{k-1}(x) - \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \frac{4}{2j-1} U_{k-2j}(x) + \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor} \frac{8j}{4j^2-1} U_{k-1-2j}(x) - \pi \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} T_k(x), \quad (9)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} \ln \frac{1-t}{1+t} U_k(t) \frac{dt}{t-x} = 4U_{k-1}(x) +$$

$$\sum_{j=1}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \sum_{m=0}^{j-1} \frac{-8}{2m+1} U_{k-2j}(x) + \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor} \left( \sum_{m=0}^j \frac{8}{2m+1} - \frac{4}{2j+1} \right) U_{k-1-2j}(x) - \pi \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} U_k(x). \quad (10)$$

Доказательство истинности равенств (9), (10) проведем также методом математической индукции, основываясь на леммах 1, 2.

При  $k = 0$  и  $k = 1$  на основании (6) с учетом того, что  $U_0(x) = 1$ ,  $U_1(x) = 2x$  равенство (9) верно. Пусть (9) верно для  $k \leq n$ , т. е.

$$I_n \equiv \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} \ln \frac{1-t}{1+t} T_n(t) \frac{dt}{t-x} = 2U_{n-1}(x) - \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{4}{2j-1} U_{n-2j}(x) + \sum_{j=1}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \frac{8j}{4j^2-1} U_{n-1-2j}(x) - \pi \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} T_n(x).$$

Покажем, что (9) справедливо и для  $k = n+1$ . Используя (8), имеем

$$I_{n+1} = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} \ln \frac{1-t}{1+t} \frac{(2tT_n(t) - T_{n-1}(t)) dt}{t-x} = J_n + 2xI_n - I_{n-1},$$

где

$$J_n = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} \ln \frac{1-t}{1+t} T_n(t) dt.$$

Так как на основании (5)  $J_n = \begin{cases} -\frac{4}{n}, & n - \text{нечетное,} \\ \frac{2}{n-1} + \frac{2}{n+1}, & n - \text{четное,} \end{cases}$  то, используя (7), получаем справед-

ливость (9) для  $k = n+1$ .

Доказательство равенства (10) проводится аналогично с использованием того, что

$$J_n = \begin{cases} -8 \left( 1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \right), & n - \text{нечетное,} \\ 8 \left( 1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n+1} \right) - \frac{4}{n+1}, & n - \text{четное.} \end{cases}$$

Теорема доказана.

Применим полученные формулы (3), (4), (9), (10) к построению приближенного решения уравнения (1).

Известно [7, 8], что искомое решение уравнения (1)  $\varphi(x) \in h(1)$  определяется формулой

$$\varphi(x) = -\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \left( \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} \ln \frac{1-t}{1+t} f(t) \frac{dt}{t-x} \right), \quad -1 < x < 1. \quad (11)$$

Для приближенного решения уравнения (1) используем разложение функции  $f(x)$  по полиномам Чебышева [9], в результате чего приходим к следующему уравнению:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \varphi_n(t) \frac{dt}{t-x} = \ln \frac{1-x}{1+x} f_n(x), \quad -1 < x < 1, \quad (12)$$

где

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^n f_k T_k(x), \quad f_0 = \frac{1}{n+1} \sum_{j=1}^{n+1} f(t_j), \quad f_k = \frac{1}{n+1} \sum_{j=1}^{n+1} f(t_j) T_k(t_j), \quad k > 0, \quad (13)$$

$$t_j = \cos \frac{2j-1}{2n+2} \pi, \quad j = 1, 2, \dots, n+1.$$

Согласно (11), решение уравнения (12) имеет вид:

$$\varphi_n(x) = -\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \left( \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+t}{1-t}} \ln \frac{1-t}{1+t} f_n(t) \frac{dt}{t-x} \right), \quad -1 < x < 1. \quad (14)$$

Используя (13) и учитывая (4), из (14) получаем

$$\varphi_n(x) = -\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \left( \sum_{j=0}^{n-1} U_{n-1-j}(x) \sum_{k=0}^{\left[ \frac{j}{2} \right]} \alpha_k f_{n-j+2k} + \sum_{j=2}^n U_{n-j}(x) \sum_{k=1}^{\left[ \frac{j}{2} \right]} \beta_k f_{n-j+2k} \right) + \pi f_n(x), \quad (15)$$

$$\text{где } \alpha_k = \begin{cases} -2, & k=0, \\ -8 \frac{k}{4k^2-1}, & k=1, \left[ \frac{j-1}{2} \right], \end{cases} \quad \beta_k = \frac{-4}{2k-1}, \quad k=1, \left[ \frac{j}{2} \right].$$

Пусть далее [9]

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^n f_k U_k(x), \quad f_k = G_k - \varepsilon_k G_{k+2}, \quad G_k = \frac{1}{n+1} \sum_{j=1}^{n+1} f(t_j) T_k(t_j), \quad (16)$$

$$\varepsilon_k = \begin{cases} 1, & k=0, 1, \dots, n-2, \\ 0, & k=n-1, n, \end{cases} \quad t_j = \cos \frac{2j-1}{2n+2} \pi, \quad j=1, 2, \dots, n+1.$$

Используя (16) и учитывая (3), из (14) получаем

$$\varphi_n(x) = -\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \left( \sum_{j=0}^{n-1} U_{n-1-j}(x) \sum_{k=0}^{\left[ \frac{j}{2} \right]} \delta_k f_{n-j+2k} + \sum_{j=2}^n U_{n-j}(x) \sum_{k=1}^{\left[ \frac{j}{2} \right]} \gamma_k f_{n-j+2k} \right) + \pi f_n(x), \quad (17)$$

$$\text{где } \delta_k = \begin{cases} -4, & k=0, \\ \sum_{m=0}^k \frac{-8}{2m+1} + \frac{4}{2k+1}, & k=1, \left[ \frac{j-1}{2} \right], \end{cases} \quad \gamma_k = \sum_{m=0}^{k-1} \frac{-8}{2m+1}, \quad k=1, \left[ \frac{j}{2} \right].$$

Решение уравнения (1)  $\varphi(x) \in h(-1)$  определяется формулой

$$\varphi(x) = -\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \left( \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} \ln \frac{1-t}{1+t} f(t) \frac{dt}{t-x} \right), \quad -1 < x < 1. \quad (18)$$

Приближенное решение в заданном классе получим из уравнения (12)

$$\varphi_n(x) = -\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \left( \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1-t}{1+t}} \ln \frac{1-t}{1+t} f_n(t) \frac{dt}{t-x} \right), \quad -1 < x < 1. \quad (19)$$

Используя (13) и учитывая (9), из (19) получаем

$$\varphi_n(x) = -\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \left( \sum_{j=0}^{n-1} U_{n-1-j}(x) \sum_{k=0}^{\left[ \frac{j}{2} \right]} \alpha_k f_{n-j+2k} + \sum_{j=2}^n U_{n-j}(x) \sum_{k=1}^{\left[ \frac{j}{2} \right]} \beta_k f_{n-j+2k} \right) + \pi f_n(x), \quad (20)$$

$$\text{где } \alpha_k = \begin{cases} 2, & k=0, \\ 8 \frac{k}{4k^2-1}, & k=1, \overline{\left[ \frac{j-1}{2} \right]}, \end{cases} \quad \beta_k = \frac{-4}{2k-1}, \quad k=1, \overline{\left[ \frac{j}{2} \right]}.$$

Используя (16) и учитывая (10), из (19) получаем

$$\varphi_n(x) = -\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \left( \sum_{j=0}^{n-1} U_{n-1-j}(x) \sum_{k=0}^{\left[ \frac{j}{2} \right]} \delta_k f_{n-j+2k} + \sum_{j=2}^n U_{n-j}(x) \sum_{k=1}^{\left[ \frac{j}{2} \right]} \gamma_k f_{n-j+2k} \right) + \pi f_n(x), \quad (21)$$

$$\text{где } \delta_k = \begin{cases} 4, & k=0, \\ \sum_{m=0}^k \frac{8}{2m+1} - \frac{4}{2k+1}, & k=1, \overline{\left[ \frac{j-1}{2} \right]}, \end{cases} \quad \gamma_k = \sum_{m=0}^{k-1} \frac{-8}{2m+1}, \quad k=1, \overline{\left[ \frac{j}{2} \right]}.$$

Оценим порядок точности приближенного решения в классе функций  $W^r H^\mu$ ,  $r \geq 0$ ,  $0 < \mu \leq 1$ , имеющих производные до порядка  $r$  включительно, причем  $r$ -я производная принадлежит классу Гельдера  $H(\mu)$ :  $|f^{(r)}(x_1) - f^{(r)}(x_2)| \leq K|x_1 - x_2|^\mu$ ,  $\forall x_1, x_2 \in [-1, 1]$ , где  $K$  и  $\mu$  – константы, не зависящие от выбора точек  $x_1, x_2$ .

С учетом (11), (14), (13), (16) и оценки сингулярного интеграла со степенно-логарифмической особенностью [10], могут быть доказаны следующие теоремы.

**Т е о р е м а 3.** Пусть функция  $f(x)$ , являющаяся правой частью уравнения (1), принадлежит классу  $W^r H^\mu$ ,  $r \geq 0$ ,  $0 < \mu \leq 1$ . Пусть, далее,  $f(x)$  аппроксимируется интерполяционным многочленом (13) (или (16)) по узлам Чебышева первого рода,  $\varphi(x)$ ,  $\varphi_n(x)$  означают соответственно точное и приближенное решения уравнений (1), (12) в классе  $h(-1)$ . Тогда

$$\sqrt{1-x} \|\varphi(x) - \varphi_n(x)\|_\infty \leq M_1 \frac{\ln^2(n)}{n^{r+\mu}}, \quad x \in [-\delta, \delta] \subset (-1, 1).$$

**Т е о р е м а 4.** Пусть функция  $f(x)$ , являющаяся правой частью уравнения (1), принадлежит классу  $W^r H^\mu$ ,  $r \geq 0$ ,  $0 < \mu \leq 1$ . Пусть, далее,  $f(x)$  аппроксимируется интерполяционным много-

членом (13) (или (16)) по узлам Чебышева первого рода,  $\varphi(x)$ ,  $\varphi_n(x)$  означают соответственно точное и приближенное решения уравнений (1), (12) в классе  $h(1)$ . Тогда

$$\sqrt{1+x} \|\varphi(x) - \varphi_n(x)\|_{\infty} \leq M_2 \frac{\ln^2(n)}{n^{r+\mu}}, \quad x \in [-\delta, \delta] \subset (-1, 1).$$

Константы  $M_1$ ,  $M_2$  не зависят от  $n$ .

В табл. 1 даны результаты численного решения уравнения (1) в классе  $h(-1)$  по формулам (15), (17)  $(\varphi_n^{(I,II)}(x))$  при  $f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$ .

Таблица 1

$n$	20	25	30	35
$\max_{ x <1}  \varphi(x) - \varphi_n^{(I,II)}(x) $	$1,7 \cdot 10^{-8}$	$1,5 \cdot 10^{-10}$	$1,6 \cdot 10^{-12}$	$2,2 \cdot 10^{-14}$

В табл. 2 даны результаты численного решения уравнения (1) в классе  $h(1)$  по формулам (20), (21)  $(\varphi_n^{(III,IV)}(x))$  при  $f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$ .

Таблица 2

$n$	20	25	30	35
$\max_{ x <1}  \varphi(x) - \varphi_n^{(III,IV)}(x) $	$1,7 \cdot 10^{-8}$	$1,5 \cdot 10^{-10}$	$1,6 \cdot 10^{-12}$	$2,2 \cdot 10^{-14}$

В обоих случаях решением будет функция  $\varphi(x) = \frac{1}{1+x^2} \left( 1 - \frac{\sqrt{2}\sqrt{1-x^2}}{4} \right)$ .

### Литература

1. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., 1966.
2. Панасюк В. В., Саврук М. П., Дацишин А. П. Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках. Киев, 1976.
2. Попов Г. Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. М., 1982.
3. Габдулхаев Б. Г. Прямые методы решения сингулярных интегральных уравнений первого рода. Численный анализ. Казань, 1994.
4. Лифанов И. К. Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. М., 1995.
5. Расолько Г. А., Альсевич Л. А. // Весті НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2009. № 2. С. 46–51.
6. Расолько Г. А., Альсевич Л. А. // Докл. НАН Беларусі. 2009. Т 53, № 5. С. 10–14.
7. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М., 1968.
8. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. М., 1977.
9. Пашковски С. Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышева. М., 1983.
10. Якименко Т. С. Квадратурные формулы для интегралов с ядром Коши со степенно-логарифмической особенностью и смежные вопросы. Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Мн., 1991.

G. A. RASOLKO

### SOLUTION OF THE FIRST-KIND SINGULAR INTEGRAL EQUATION WITH CAUCHY'S KERNEL AND A SPECIAL RIGHT-HAND SIDE BY THE ORTHOGONAL POLYNOMIAL METHOD

### Summary

An algorithm for solution of the singular integral equation of the first kind

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\varphi(t)}{t-x} dt = \ln \frac{1-x}{1+x} f(x), \quad -1 < x < 1$$

is suggested. Here  $f$  is Hölder's continuous functions on  $[-1, 1]$ ;  $\varphi(x)$  is an unknown function. The algorithm is based on the decomposition of the singular integral with respect to Chebyshev's polynomials in the classes  $h(-1)$  and  $h(1)$ .

УДК 511.36

О. В. БАБУЛЬ, Д. В. ВАСИЛЬЕВ

## О ФАКТОРИЗАЦИИ ИДЕАЛОВ В КОЛЬЦАХ ЦЕЛЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ЧИСЕЛ

Институт математики НАН Беларуси

(Поступила в редакцию 06.05.2010)

Факторизация идеалов в кольцах целых чисел алгебраических расширений используется в алгоритмах решета числового поля для факторизации и дискретного логарифмирования. В этих алгоритмах необходимо получить разложение на простые идеалы главных идеалов вида  $(a - b\theta)$ , где  $\theta$  – целое алгебраическое число, и  $a, b \in \mathbb{Z}$  такие, что  $a^2 + b^2 \neq 0$ . Обозначим через  $\mathbb{Z}_{\mathbb{Q}(\theta)}$  кольцо целых алгебраических чисел расширения  $\mathbb{Q}(\theta)$ . При нахождении степени фиксированного простого идеала  $\mathfrak{p}$  в разложении идеала  $(a - b\theta)$  (которую далее будем обозначать  $v_{\mathfrak{p}}(a - b\theta)$ ), как правило, выделяют два случая в зависимости от того, является ли норма идеала  $\mathfrak{p}$  взаимно простой с индексом  $[\mathbb{Z}_{\mathbb{Q}(\theta)} : \mathbb{Z}[\theta]]$ . В данной статье будет доказана теорема 2, позволяющая получить  $v_{\mathfrak{p}}(a - b\theta)$  в случае, если норма  $\mathfrak{p}$  взаимно проста с индексом  $[\mathbb{Z}_{\mathbb{Q}(\theta)} : \mathbb{Z}[\theta]]$ , и будет построен алгоритм, позволяющий найти  $v_{\mathfrak{p}}(a - b\theta)$  в общем случае.

Обозначим через  $N_{\mathbb{Q}(\theta)}(\gamma)$  норму числа  $\gamma \in \mathbb{Z}_{\mathbb{Q}(\theta)}$  в расширении  $\mathbb{Q}(\theta)$ , и через  $N(I)$  – норму идеала  $I \subset \mathbb{Z}_{\mathbb{Q}(\theta)}$ . Для произвольного простого числа  $p$  и ненулевого числа  $n$  обозначим через  $\text{ord}_p n$  степень, с которой  $p$  входит в разложение  $n$  на простые множители, и для произвольного целого  $m$  обозначим через  $\text{ord}_p^0 m$  функцию, совпадающую с  $\text{ord}_p m$  на ненулевых  $m$  и равную нулю при  $m = 0$ . Для получения двухэлементного представления для простых идеалов воспользуемся следующей теоремой.

Теорема 1 [1, с. 199]. Пусть  $\mathbb{Q}(\theta)$  – алгебраическое расширение и  $\theta$  – целое алгебраическое число с минимальным нормированным (старший коэффициент равен 1) многочленом  $f(x)$ . Для каждого простого числа  $p$  такого, что  $p \nmid [\mathbb{Z}_{\mathbb{Q}(\theta)} : \mathbb{Z}[\theta]]$ , разложение главного идеала  $(p)$  в  $\mathbb{Z}_{\mathbb{Q}(\theta)}$  имеет вид:

$$(p) = \prod_{i=1}^s \mathfrak{p}_i^{e_i},$$

где

$$\mathfrak{p}_i = (p, f_i(\theta)) = p\mathbb{Z}_{\mathbb{Q}(\theta)} + f_i(\theta)\mathbb{Z}_{\mathbb{Q}(\theta)},$$

и

$$f(x) \equiv \prod_{i=1}^s f_i(x)^{e_i} \pmod{p}$$

есть разложение  $f(x)$  в произведение неприводимых нормированных многочленов из  $\mathbb{GF}(p)[x]$ . Степень идеала  $\mathfrak{p}_i$  равна степени многочлена  $f_i(x)$ .

Для простого идеала  $\mathfrak{p} \subset \mathbb{Z}_{\mathbb{Q}(\theta)}$  будем говорить, что  $\mathfrak{p}$  лежит над простым числом  $p$ , если  $\mathfrak{p} \cap \mathbb{Z} = (p)$ . Для получения разложения главного идеала вида  $(a - b\theta)$  воспользуемся следующей теоремой.

**Теорема 2.** Пусть  $\mathbb{Q}(\theta)$  – алгебраическое расширение и  $\theta$  – целое алгебраическое число с минимальным нормированным многочленом  $f(x)$  степени  $d > 1$ . Пусть  $p$  – простое число такое, что  $p \nmid [\mathbb{Z}_{\mathbb{Q}(\theta)} : \mathbb{Z}[\theta]]$  и  $(a, b)$  – пара целых чисел таких, что  $N_{\mathbb{Q}(\theta)}(a - b\theta) \neq 0$  и  $p \mid N_{\mathbb{Q}(\theta)}(a - b\theta)$ . Пусть  $m = \min(\text{ord}_p a, \text{ord}_p b)$  (в случае  $a = 0$  полагаем  $m = \text{ord}_p b$ , а в случае  $b = 0$  –  $m = \text{ord}_p a$ ), тогда справедливо следующее разложение в произведение идеалов:

$$(a - b\theta) = PT,$$

где  $p \nmid N(T)$  и

$$P = \begin{cases} (p)^m & \text{при } N_{\mathbb{Q}(\theta)}(a - b\theta) = dm; \\ (p)^m (p, \theta - r)^{\text{ord}_p N_{\mathbb{Q}(\theta)}(a - b\theta) - dm} & \text{при } N_{\mathbb{Q}(\theta)}(a - b\theta) \neq dm. \end{cases} \quad (1)$$

Кроме того, для целого числа  $r$  во втором случае в (1) справедливо:

$$r \equiv \frac{a}{p^{\text{ord}_p a}} \left( \frac{b}{p^{\text{ord}_p b}} \right)^{-1} \pmod{p}$$

и

$$f(r) \equiv 0 \pmod{p}.$$

**Доказательство.** Если  $b = 0$ , то из  $p \mid N_{\mathbb{Q}(\theta)}(a)$  следует, что  $a = p^{\text{ord}_p a} t$ , где  $p \nmid t$ . Тогда

$$(a) = (p)^{\text{ord}_p a} (t),$$

что соответствует первому случаю в (1).

Рассмотрим случай  $m = 0$  и  $b \neq 0$ . Если  $a \neq 0$ ,  $\text{ord}_p a = 0$  и  $\text{ord}_p b > 0$ , то

$$N_{\mathbb{Q}(\theta)}(a - b\theta) = b^d f(a/b) \equiv 0 \pmod{p} \Rightarrow a^d \equiv 0 \pmod{p},$$

что противоречит  $\text{ord}_p a = 0$ . Если  $\text{ord}_p b = 0$ , тогда из  $p \mid N_{\mathbb{Q}(\theta)}(a - b\theta)$  следует, что существует произведение

$$\prod_{i=1}^s \mathfrak{p}_i \quad (2)$$

простых идеалов над  $p$  такое, что

$$\prod_{i=1}^s \mathfrak{p}_i \mid (a - b\theta). \quad (3)$$

Обозначим через  $\mathfrak{p}$  один из  $\mathfrak{p}_i$ . Так как  $\text{ord}_p b = 0$ , то существует такое целое число  $b'$ , что

$$bb' \equiv 1 \pmod{p}.$$

Тогда

$$a \equiv b\theta \pmod{p} \Rightarrow \theta \equiv ab' \pmod{p}.$$

Отсюда следует, что  $\mathbb{Z}_{\mathbb{Q}(\theta)}/\mathfrak{p} \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ , т. е.  $\mathfrak{p}$  – простой идеал первой степени. Согласно теореме 1 в случае  $p \nmid [\mathbb{Z}_{\mathbb{Q}(\theta)} : \mathbb{Z}[\theta]]$  все простые идеалы первой степени над  $p$  имеют вид  $(p, \theta - r)$ , где  $f(r) \equiv 0 \pmod{p}$ . Пусть  $\mathfrak{p} = (p, \theta - r)$ , тогда

$$a - b\theta \in (p, \theta - r) \Rightarrow a - br + b(r - \theta) \in (p, \theta - r) \Rightarrow a - br \in (p, \theta - r) \Rightarrow a - br \in (p).$$

Значит,  $ab^{-1} \equiv r \pmod{p}$ . Таким образом, простой идеал  $\mathfrak{p}$  однозначно определен для пары  $(a, b)$ , а значит, существует только один простой идеал над  $p$ , который делит  $(a - b\theta)$ , и он имеет вид  $(p, \theta - ab^{-1} \pmod{p})$ . Следовательно, при  $m = 0$  и  $b \neq 0$  возможен только второй случай в (1) (полагая для произвольного идеала  $I \subseteq \mathbb{Z}_{\mathbb{Q}(\theta)}$ , что  $I^0 = \mathbb{Z}_{\mathbb{Q}(\theta)}$ ).

Рассмотрим случай  $m > 0$  и  $b \neq 0$ . Тогда выполняется следующее равенство

$$a - b\theta = p^m \left( \frac{a}{p^m} - \frac{b}{p^m} \theta \right),$$

где  $\min \left( \text{ord}_p \frac{a}{p^m}, \text{ord}_p \frac{b}{p^m} \right) = 0$ , т. е. для  $\left( \frac{a}{p^m} - \frac{b}{p^m} \theta \right)$  выполняется ранее рассмотренный случай.

Обратимся к случаю, когда величина  $v_{\mathfrak{p}}(a - b\theta)$  вычисляется для простого идеала  $\mathfrak{p}$ , норма которого не взаимно проста с индексом  $[\mathbb{Z}_{\mathbb{Q}(\theta)} : \mathbb{Z}[\theta]]$ . В этом случае для получения двухэлементного представления простого идеала можно воспользоваться алгоритмом 6.2.9 [1, с. 320]. Для выполнения этого алгоритма необходимо найти целый базис расширения  $\mathbb{Q}(\theta)$ , например, с помощью алгоритма 6.1.8 [1, с. 311] (данный алгоритм требует вычисления факторизации дискриминанта минимального многочлена числа  $\theta$ , что может оказаться вычислительно сложной задачей уже для дискриминанта, имеющего 130 десятичных знаков). Построенный далее алгоритм является упрощением алгоритма 4.8.17 из [1, с. 203] для случая факторизации главных идеалов. Далее будут использоваться следующие два предложения из [1].

**Предложение 1** [1, с. 201]. Пусть  $\mathfrak{p}$  – простой идеал над простым числом  $p$ , кольца  $\mathbb{Z}_{\mathbb{Q}(\theta)}$ , где  $\theta$  – целое алгебраическое число. Тогда существует число  $\beta_{\mathfrak{p}} \in \mathbb{Z}_{\mathbb{Q}(\theta)} \setminus p\mathbb{Z}_{\mathbb{Q}(\theta)}$  такое, что  $\beta_{\mathfrak{p}}\mathfrak{p} \subset p\mathbb{Z}_{\mathbb{Q}(\theta)}$ .

Для нахождения числа  $\beta_{\mathfrak{p}}$  для простого идеала  $\mathfrak{p}$  можно использовать первую часть алгоритма 4.8.17 из [1, с. 203].

**Предложение 2** [1, с. 203]. Пусть  $\mathfrak{p}$  – простой идеал над простым числом  $p$ , кольца  $\mathbb{Z}_{\mathbb{Q}(\theta)}$ , где  $\theta$  – целое алгебраическое число. Пусть  $I$  – произвольный целый идеал  $\mathbb{Z}_{\mathbb{Q}(\theta)}$ . Тогда  $I \subset \mathfrak{p}$  тогда и только тогда, когда  $\beta_{\mathfrak{p}}I \subset p\mathbb{Z}_{\mathbb{Q}(\theta)}$ . В частности,  $v_{\mathfrak{p}}(I)$  равно наибольшему целому числу  $v$  такому, что  $\beta_{\mathfrak{p}}^v I \subset p^v \mathbb{Z}_{\mathbb{Q}(\theta)}$ .

Пусть  $d$  – степень расширения  $\mathbb{Q}(\theta)$  и  $(\omega_i)_{i=1}^d$  – целый базис кольца  $\mathbb{Z}_{\mathbb{Q}(\theta)}$ . Обозначим через  $N = (n_{i,j})_{i,j=1}^d$  целочисленную матрицу такую, что

$$\theta^{j-1} = \sum_{i=1}^d n_{i,j} \omega_i \quad \text{для } j=1, \dots, d. \quad (4)$$

На основании предложения 2 можно построить следующий алгоритм.

А л г о р и т м.

На вход алгоритма поступает:

- 1) нормированный, неприводимый над  $\mathbb{Q}$  многочлен  $f \in \mathbb{Z}[x]$  степени  $d > 1$ ;
- 2) ненулевое число  $\gamma \in \mathbb{Z}_{\mathbb{Q}(\theta)}$ , где  $\theta$  – корень  $f$ . Пусть  $\gamma = \frac{g_\gamma(\theta)}{d_\gamma}$ , где  $g_\gamma(\theta) \in \mathbb{Z}[x]$  и  $d_\gamma \in \mathbb{Z}$ ;
- 3) матрица  $N$  вида (4), построенная для произвольного целого базиса  $\mathbb{Z}_{\mathbb{Q}(\theta)}$ ;
- 4) простое число  $p$  и число  $\beta_p \in \mathbb{Z}_{\mathbb{Q}(\theta)} \setminus p\mathbb{Z}_{\mathbb{Q}(\theta)}$  (см. предложение 1) для некоторого простого

идеала  $\mathfrak{p} \subset \mathbb{Z}_{\mathbb{Q}(\theta)}$  над  $p$ . Пусть  $\beta_p = \frac{g_\beta(\theta)}{d_\beta}$ , где  $g_\beta(\theta) \in \mathbb{Z}[x]$  и  $d_\beta \in \mathbb{Z}$ .

Алгоритм возвращает  $v_p((\gamma))$ .

Шаг 1. Присвоить  $v = 0$ ,  $t = g_\gamma g_\beta \bmod f$ ,  $m = d_\gamma d_\beta p$ .

Шаг 2. Если для всех  $i = 1, \dots, d$  выполняется

$$\sum_{j=1}^d n_{i,j} t_{j-1} \equiv 0 \pmod{m},$$

где  $t_i$  — коэффициент при  $i$ -й степени многочлена  $t$ ,  $n_{i,j}$  — элемент матрицы  $N$ , то перейти на шаг 3, иначе возвратить  $v$  и закончить выполнение алгоритма.

Шаг 3. Присвоить  $v = v + 1$ ,  $t = t g_\beta \bmod f$ ,  $m = m p d_\beta$  и перейти на шаг 2.

Предложение 3. Алгоритм корректен (т.е. алгоритм за конечное число шагов выдает требуемый результат для любых допустимых значений входных данных).

Доказательство. Алгоритм основан на проверке условия

$$\beta_p^v \gamma \in p^v \mathbb{Z}_{\mathbb{Q}(\theta)} \quad (5)$$

(см. предложение 2) последовательно для каждого целого  $v$ , начиная с 1. Покажем эквивалентность этого условия проверке на шаге 2 алгоритма. Так как

$$\beta_p^v \gamma = \frac{g_\beta^v(\theta) g_\gamma(\theta)}{d_\beta^v d_\gamma} = \frac{t(\theta)}{d_\beta^v d_\gamma} = \sum_{i=1}^d a_i \omega_i, \quad (6)$$

где  $(\omega_i)_{i=1}^d$  — некоторый целый базис  $\mathbb{Z}_{\mathbb{Q}(\theta)}$  и  $a_i \in \mathbb{Z}$ , то условие (5) эквивалентно тому, что

$$a_i \equiv 0 \pmod{p^v} \quad (7)$$

для  $i = 1, \dots, d$ . Равенство (6) можно переписать как

$$(1, \theta, \dots, \theta^{d-1})(t_0, t_1, \dots, t_{d-1})^T = d_\beta^v d_\gamma (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_d)(a_1, a_2, \dots, a_d)^T, \quad (8)$$

где  $t_i$  — коэффициент многочлена  $t(x)$  при  $i$ -й степени. Так как

$$(1, \theta, \dots, \theta^{d-1}) = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_d)N,$$

то из равенства (8) следует, что

$$N(t_0, t_1, \dots, t_{d-1})^T = d_\beta^v d_\gamma (a_1, a_2, \dots, a_d)^T.$$

Тогда условие (7) можно переписать как

$$\sum_{j=1}^d n_{i,j} t_{j-1} \equiv 0 \pmod{m},$$

где  $m = d_\beta^v d_\gamma p^v$  (см. шаг 2 алгоритма).

### Литература

1. C o h e n H. A course in computational algebraic number theory. New York: Springer-Verlag, 1995.
2. L e n s t r a A. K. The Development of the Number Field Sieve. New York: Springer-Verlag, 1993.
3. S h i r o k a u e r O. // Phil. Trans. R. Soc. Lond. A. 1993. Vol. 345, N 1676. P. 409–423.

*O. V. BABUL, D. V. VASILYEV*

### IDEALS FACTORIZATION IN THE NUMBER FIELDS

### Summary

Methods to obtain ideals factorization in the number field sieve algorithms are presented.

УДК 512.542

Е. А. ВИТЬКО, Н. Т. ВОРОБЬЕВ

О КЛАССАХ ФИТТИНГА И ХОЛЛОВЫХ ПОДГРУППАХ  
КОНЕЧНЫХ  $\pi$ -РАЗРЕШИМЫХ ГРУПП

Витебский государственный университет им. П. М. Машерова

(Поступила в редакцию 16.04.2010)

В теории конечных разрешимых групп известен результат Блессеноля [1] о том, что для любой локальной формации  $\mathfrak{F}$  класс  $\mathcal{B}^{\pi}(\mathfrak{F})$  всех групп, холловы  $\pi$ -подгруппы которых принадлежат  $\mathfrak{F}$ , является локальной формацией. Расширение указанного результата на случай класса  $\pi$ -разрешимых групп и класса групп, формационные проекторы которых являются  $\mathfrak{F}$ -подгруппами, было получено в работах [2] и [3] соответственно.

Дуальной конструкцией формации  $\mathcal{B}^{\pi}(\mathfrak{F})$  является класс Фиттинга  $\mathcal{B}_{\pi}(\mathfrak{F})$  всех конечных разрешимых групп, холловы  $\pi$ -подгруппы которых принадлежат классу Фиттинга  $\mathfrak{F}$ . Такая конструкция в теории разрешимых классов Фиттинга нашла эффективное применение для описания радикалов холловых подгрупп и холловски замкнутых классов Фиттинга, что нашло отражение в серии работ Е. Кусака [4], О. Бризона [5,6] и П. Хаука [7]. Более того, в работе [8] в классе  $\mathcal{S}$  всех конечных разрешимых групп был получен результат, в точности дуальный теореме Блессеноля [1]: было доказано, что для любого локального класса Фиттинга  $\mathfrak{F}$  класс Фиттинга  $\mathcal{B}_{\pi}(\mathfrak{F})$  локален. Хорошо известно, что по теореме С. А. Чунихина [9] холловы  $\pi$ -подгруппы существуют и сопряжены в любой конечной  $\pi$ -разрешимой группе. В связи с этим Л. А. Шеметковым была сформулирована задача о локальности класса Фиттинга  $\mathcal{B}_{\pi}(\mathfrak{F})$  в классе  $\mathcal{S}^{\pi}$  всех конечных  $\pi$ -разрешимых групп. Решению ее и посвящена настоящая работа.

Все исследования в работе проводятся в классе  $\mathcal{S}^{\pi}$ ; в терминологии и обозначениях мы следуем [10, 11].

**1. Предварительные сведения.** Напомним, что если  $\pi$  – некоторое множество простых чисел, то через  $G_{\pi}$  мы будем обозначать холлову  $\pi$ -подгруппу группы  $G$ , т. е. подгруппу, порядок которой есть  $\pi$ -число, а ее индекс в  $G$  является  $\pi'$ -числом.

Класс групп  $\mathfrak{F}$  называется классом Фиттинга, если выполняются следующие условия:

- 1) если  $G \in \mathfrak{F}$  и  $N \trianglelefteq G$ , то  $N \in \mathfrak{F}$ ;
- 2) если  $G = N_1 N_2$ , где  $N_i \trianglelefteq G$  и  $N_i \in \mathfrak{F}$  ( $i=1,2$ ), то  $G \in \mathfrak{F}$ .

Пусть  $\mathfrak{F}$  – непустой класс Фиттинга. Тогда наибольшую нормальную подгруппу  $G_{\mathfrak{F}}$  группы  $G$ , принадлежащую  $\mathfrak{F}$ , называют ее  $\mathfrak{F}$ -радикалом.

Произведением  $\mathfrak{F}\mathfrak{X}$  классов Фиттинга  $\mathfrak{F}$  и  $\mathfrak{X}$  называется класс всех таких групп  $G$ , для которых  $G/G_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{X}$ . Заметим, что произведение классов Фиттинга является классом Фиттинга и операция умножения классов Фиттинга ассоциативна.

Будем использовать концепцию частичной локализации Шеметкова–Скибы [12].

Пусть  $\emptyset \neq \omega \subseteq \mathbb{P}$ , где  $\mathbb{P}$  – множество всех простых чисел и  $\omega' = \mathbb{P} \setminus \omega$ . Всякое отображение

$$f : \omega \cup \{\omega'\} \rightarrow \{\text{классы Фиттинга}\}$$

называется  $\omega$ -локальной функцией Хартли или  $\omega$ -локальной  $H$ -функцией. Для каждой  $\omega$ -локальной  $H$ -функции  $f$  полагаем

$$\text{Supp}(f) = \{a \in \omega \cup \{\omega'\} \mid f(a) \neq \emptyset\} - \text{носитель } f.$$

Положим

$$LR_\omega(f) = \left( \bigcap_{p \in \pi_2} \mathfrak{S}_p^\pi \right) \cap \left( \bigcap_{p \in \pi_1} f(p) \mathfrak{N}_p \mathfrak{S}_p^\pi \right) \cap f(\omega) \mathfrak{S}_\omega^\pi,$$

где  $\pi_1 = \text{Supp}(f) \cap \omega$ ,  $\pi_2 = \omega \setminus \pi_1$ ,  $\mathfrak{S}_\omega^\pi$  – класс всех  $\pi$ -разрешимых  $\omega$ -групп и  $\mathfrak{S}_p^\pi$  – класс всех  $\pi$ -разрешимых  $p'$ -групп.

Класс Фиттинга  $\mathfrak{F}$  называют  $\omega$ -локальным, если  $\mathfrak{F} = LR_\omega(f)$  для некоторой  $\omega$ -локальной  $H$ -функции  $f$ . В случае, когда  $\omega = \mathbb{P}$ ,  $\omega$ -локальный класс Фиттинга называют локальным.

## 2. Класс $\mathfrak{B}_\pi(\mathfrak{F})$ и его свойства.

Определение. Если  $\mathfrak{F}$  – класс Фиттинга и  $\pi$  – некоторое множество простых чисел, то через  $\mathfrak{B}_\pi(\mathfrak{F})$  обозначим класс всех тех  $\pi$ -разрешимых групп  $G$ , в которых холлова  $\pi$ -подгруппа является  $\mathfrak{F}$ -группой, т. е.

$$\mathfrak{B}_\pi(\mathfrak{F}) = (G \in \mathfrak{S}^\pi : G_\pi \in \mathfrak{F}).$$

Если  $\mathfrak{F} = \emptyset$ , то положим  $\mathfrak{B}_\pi(\mathfrak{F}) = \emptyset$ . В случае, когда  $\pi = \emptyset$  и  $\pi = \mathbb{P}$ , положим  $\mathfrak{B}_\pi(\mathfrak{F}) = \mathfrak{S}^\pi$  и  $\mathfrak{B}_\pi(\mathfrak{F}) = \mathfrak{F}$  соответственно.

Лемма 1 [13]. Для любого множества простых чисел  $\pi$  и любого класса Фиттинга  $\mathfrak{F}$  класс  $\mathfrak{B}_\pi(\mathfrak{F})$  является классом Фиттинга.

Доказательство следующего свойства осуществляется непосредственной проверкой.

Лемма 2. Пусть  $\mathfrak{F}$  и  $\mathfrak{X}$  – классы Фиттинга,  $\pi$  – множество простых чисел. Тогда

$$\mathfrak{B}_\pi(\mathfrak{F} \cap \mathfrak{X}) = \mathfrak{B}_\pi(\mathfrak{F}) \cap \mathfrak{B}_\pi(\mathfrak{X})$$

и, если  $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$ , то

$$\mathfrak{B}_\pi(\mathfrak{F}) \subseteq \mathfrak{B}_\pi(\mathfrak{X}).$$

Лемма 3 [13]. Пусть  $\mathfrak{F}$  – непустой класс Фиттинга,  $G$  –  $\pi$ -разрешимая группа,  $H$  – ее холлова  $\pi$ -подгруппа, тогда

$$G_{\mathfrak{B}_\pi(\mathfrak{F})} \cap H = H_{\mathfrak{F}}.$$

Используя лемму 3, установим свойства класса  $\mathfrak{B}_\pi(\mathfrak{F})$ , которые будем использовать для доказательства основного результата.

Лемма 4. Пусть  $\mathfrak{F}$  и  $\mathfrak{X}$  – классы Фиттинга, тогда

$$\mathfrak{B}_\pi(\mathfrak{F}\mathfrak{X}) = \mathfrak{B}_\pi(\mathfrak{F}) \mathfrak{B}_\pi(\mathfrak{X}).$$

Доказательство. Пусть  $G \in \mathfrak{B}_\pi(\mathfrak{F}\mathfrak{X})$  и  $H$  – холлова  $\pi$ -подгруппа группы  $G$ . Тогда  $H \in \mathfrak{F}\mathfrak{X}$  и следовательно  $H/H_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{X}$ . По лемме 3 следует, что

$$H_{\mathfrak{F}} = G_{\mathfrak{B}_\pi(\mathfrak{F})} \cap H.$$

Тогда, учитывая изоморфизм, получим

$$H/H_{\mathfrak{F}} \cong HG_{\mathfrak{B}_\pi(\mathfrak{F})}/G_{\mathfrak{B}_\pi(\mathfrak{F})} \in \mathfrak{X}.$$

Следовательно, из того, что  $HG_{\mathfrak{B}_\pi(\mathfrak{F})}/G_{\mathfrak{B}_\pi(\mathfrak{F})}$  – холлова  $\pi$ -подгруппа группы  $G/G_{\mathfrak{B}_\pi(\mathfrak{F})}$ , получаем, что  $G/G_{\mathfrak{B}_\pi(\mathfrak{F})} \in \mathfrak{B}_\pi(\mathfrak{X})$  и поэтому

$$\mathfrak{B}_\pi(\mathfrak{F}\mathfrak{X}) \subseteq \mathfrak{B}_\pi(\mathfrak{F}) \mathfrak{B}_\pi(\mathfrak{X}).$$

С другой стороны, если  $G \in \mathfrak{B}_\pi(\mathfrak{F}) \mathfrak{B}_\pi(\mathfrak{X})$ , то  $G/G_{\mathfrak{B}_\pi(\mathfrak{F})} \in \mathfrak{B}_\pi(\mathfrak{X})$ . Следовательно,

$$H/H_{\mathfrak{F}} \cong HG_{\mathfrak{B}_\pi(\mathfrak{F})}/G_{\mathfrak{B}_\pi(\mathfrak{F})} \in \mathfrak{X}.$$

Тогда  $H \in \mathfrak{F}\mathfrak{X}$  и  $G \in \mathcal{B}_\pi(\mathfrak{F}\mathfrak{X})$ , т. е.

$$\mathcal{B}_\pi(\mathfrak{F}\mathfrak{X}) \supseteq \mathcal{B}_\pi(\mathfrak{F})\mathcal{B}_\pi(\mathfrak{X}).$$

Лемма доказана.

Лемма 5. Пусть  $\mathfrak{F}$  – класс Фиттинга и  $\pi$  – множество простых чисел. Тогда

1) если  $p \in \pi$ , то  $\mathcal{B}_\pi(\mathfrak{C}_{p'}^\pi) = \mathfrak{C}_{p'}^\pi$ ;

2) если  $\mathfrak{F} \neq \emptyset$  и  $\mathfrak{F}\mathfrak{N}_p = \mathfrak{F}$  для некоторого  $p$ , то  $\mathcal{B}_\pi(\mathfrak{F})\mathfrak{N}_p = \mathcal{B}_\pi(\mathfrak{F})$ .

Доказательство. Очевидно, что  $\mathfrak{C}_{p'}^\pi \subseteq \mathcal{B}_\pi(\mathfrak{C}_{p'}^\pi)$ .

Пусть группа  $G \in \mathcal{B}_\pi(\mathfrak{C}_{p'}^\pi)$  и  $G_\pi$  – холлова  $\pi$ -подгруппа  $G$ . Тогда  $|G_\pi|$  является  $p'$ -числом.

Но так как  $p \in \pi$ , то  $\pi' \subseteq p'$ . Следовательно,  $G \in \mathfrak{C}_{p'}^\pi$  и

$$\mathcal{B}_\pi(\mathfrak{C}_{p'}^\pi) \subseteq \mathfrak{C}_{p'}^\pi.$$

Утверждение 1) доказано.

Докажем утверждение 2). Пусть  $G \in \mathcal{B}_\pi(\mathfrak{F})\mathfrak{N}_p$ . Так как по лемме 3

$$G_\pi \cap G_{\mathcal{B}_\pi(\mathfrak{F})} = (G_\pi)_{\mathfrak{F}},$$

то ввиду изоморфизма

$$G_\pi G_{\mathcal{B}_\pi(\mathfrak{F})} / G_{\mathcal{B}_\pi(\mathfrak{F})} \cong G_\pi / (G_\pi \cap G_{\mathcal{B}_\pi(\mathfrak{F})}) = G_\pi / (G_\pi)_{\mathfrak{F}}$$

получаем

$$G_\pi / (G_\pi)_{\mathfrak{F}} \cong G_\pi G_{\mathcal{B}_\pi(\mathfrak{F})} / G_{\mathcal{B}_\pi(\mathfrak{F})}.$$

Но холлова  $\pi$ -подгруппа  $G_\pi G_{\mathcal{B}_\pi(\mathfrak{F})} / G_{\mathcal{B}_\pi(\mathfrak{F})}$  группы  $G / G_{\mathcal{B}_\pi(\mathfrak{F})}$  является  $p$ -группой. Следовательно,  $G_\pi / (G_\pi)_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{N}_p$  и поэтому  $G_\pi \in \mathfrak{F}$ . Итак, справедливо включение

$$\mathcal{B}_\pi(\mathfrak{F})\mathfrak{N}_p \subseteq \mathcal{B}_\pi(\mathfrak{F}).$$

Обратное включение очевидно.

Лемма доказана.

Лемма 6. Пусть  $\mathfrak{F}$  – непустой класс Фиттинга и  $\omega, \sigma$  – множества простых чисел, причем  $\sigma \cap \omega = \emptyset$  и  $\sigma \subseteq \pi$ . Тогда

$$\mathcal{B}_\sigma(\mathfrak{F})\mathfrak{C}_\omega^\pi = \mathcal{B}_\sigma(\mathfrak{F}).$$

Доказательство. Очевидно, что  $\mathcal{B}_\sigma(\mathfrak{F}) \subseteq \mathcal{B}_\sigma(\mathfrak{F})\mathfrak{C}_\omega^\pi$ .

Пусть  $G \in \mathcal{B}_\sigma(\mathfrak{F})\mathfrak{C}_\omega^\pi$ . По лемме 3  $G_\sigma \cap G_{\mathcal{B}_\sigma(\mathfrak{F})} = (G_\sigma)_{\mathfrak{F}}$ . Тогда, учитывая изоморфизм  $G_\sigma G_{\mathcal{B}_\sigma(\mathfrak{F})} / G_{\mathcal{B}_\sigma(\mathfrak{F})} \cong G_\sigma / (G_\sigma \cap G_{\mathcal{B}_\sigma(\mathfrak{F})})$ , получаем

$$G_\sigma G_{\mathcal{B}_\sigma(\mathfrak{F})} / G_{\mathcal{B}_\sigma(\mathfrak{F})} \cong G_\sigma / (G_\sigma)_{\mathfrak{F}}.$$

Но  $G / G_{\mathcal{B}_\sigma(\mathfrak{F})} \in \mathfrak{C}_\omega^\pi$ , следовательно  $G_\sigma / (G_\sigma)_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{C}_\omega^\pi \cap \mathfrak{C}_\sigma^\pi = (1)$ , и поэтому  $G_\sigma = (G_\sigma)_{\mathfrak{F}}$ .

Следовательно,  $G_\sigma \in \mathfrak{F}$  и  $G \in \mathcal{B}_\sigma(\mathfrak{F})$ .

Лемма доказана.

Следствие. Если  $\mathfrak{F}$  – непустой класс Фиттинга и  $\sigma$  – множество простых чисел, причем  $\sigma \subseteq \pi$ , то

$$\mathcal{B}_\sigma(\mathfrak{F})\mathfrak{C}_\sigma^\pi = \mathcal{B}_\sigma(\mathfrak{F}).$$

**3.  $\omega$ -Локальность класса  $\mathcal{B}_\pi(\mathfrak{F})$ .** Основной результат настоящей работы представляет следующая

Теорема. Если  $\mathfrak{F}$  –  $\omega$ -локальный класс Фиттинга и  $\pi$  – некоторое множество простых чисел, то класс групп  $\mathcal{B}_{\pi \cap \omega}(\mathfrak{F})$  –  $\omega$ -локальный класс Фиттинга.

Доказательство. Допустим, что  $\mathfrak{F} = \emptyset$ . Тогда  $\mathcal{B}_{\pi \cap \omega}(\mathfrak{F}) = \emptyset$  и ввиду [12]  $\mathcal{B}_{\pi \cap \omega}(\mathfrak{F})$  является  $\omega$ -локальным.

Предположим, что  $\mathfrak{F} \neq \emptyset$ . Если  $\omega \cap \pi = \emptyset$ , то по определению  $\mathcal{B}_{\emptyset}(\mathfrak{F}) = \mathfrak{E}^{\pi}$ . Определим  $H$ -функцию следующим образом:  $f(a) = \mathfrak{E}^{\pi}$  для всех  $a$  из  $\omega \cup \{\omega'\}$ . Тогда

$$LR_{\omega}(f) = \left( \bigcap_{p \in \omega} \mathfrak{E}^{\pi} \mathfrak{N}_p \mathfrak{E}_p^{\pi} \right) \cap \mathfrak{E}^{\pi} \mathfrak{E}_{\omega}^{\pi} = \mathfrak{E}^{\pi}$$

и класс Фиттинга  $\mathcal{B}_{\pi \cap \omega}(\mathfrak{F})$   $\omega$ -локален.

Предположим, что  $\omega \cap \pi \neq \emptyset$ . Так как  $\mathfrak{F}$  –  $\omega$ -локальный класс Фиттинга, то существует  $\omega$ -локальная  $H$ -функция  $F$  такая, что  $\mathfrak{F} = LR_{\omega}(F)$ , ее значения  $F(p) = F(p) \mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{F}$  для всех  $p$  из  $\omega$  и  $F(\omega') = \mathfrak{F}$  по теореме работы [14].

Обозначим через

$$\pi_1 = \text{Supp}(F) \cap \omega, \pi_2 = \omega \setminus \pi_1.$$

Тогда

$$\mathfrak{F} = LR_{\omega}(F) = \left( \bigcap_{p \in \pi_2} \mathfrak{E}_p^{\pi} \right) \cap \left( \bigcap_{p \in \pi_1} F(p) \mathfrak{N}_p \mathfrak{E}_p^{\pi} \right) \cap \mathfrak{F} \mathfrak{E}_{\omega}^{\pi}.$$

Определим теперь  $\omega$ -локальную  $H$ -функцию следующим образом:

$$f(p) = \begin{cases} \mathcal{B}_{\pi_1 \cap \pi}(F(p)), & \text{если } p \in \pi_1 \cap \pi \\ \mathcal{B}_{\pi \cap \omega}(\mathfrak{F}), & \text{если } p \in \omega \setminus \pi \\ \emptyset, & \text{если } p \in \pi_2 \cap \pi \end{cases}$$

и  $f(\omega') = \mathcal{B}_{\pi \cap \omega}(\mathfrak{F})$ .

Легко видеть, что  $\text{Supp}(f) = (\pi_1 \cap \pi) \cup (\omega/\pi) \cup \{\omega'\}$ . Следовательно,

$$LR_{\omega}(f) = \left( \bigcap_{p \in \pi_2 \cap \pi} \mathfrak{E}_p^{\pi} \right) \cap \left( \bigcap_{p \in \pi_1 \cap \pi} \mathcal{B}_{\pi_1 \cap \pi}(F(p)) \mathfrak{N}_p \mathfrak{E}_p^{\pi} \right) \cap \left( \bigcap_{p \in \omega \setminus \pi} \mathcal{B}_{\pi \cap \omega}(\mathfrak{F}) \mathfrak{N}_p \mathfrak{E}_p^{\pi} \right) \cap \mathcal{B}_{\pi \cap \omega}(\mathfrak{F}) \mathfrak{E}_{\omega}^{\pi}.$$

Докажем вначале, что справедливо равенство

$$\bigcap_{p \in \pi_1 \cap \pi} \mathcal{B}_{\pi_1 \cap \pi}(F(p)) \mathfrak{N}_p \mathfrak{E}_p^{\pi} = \mathcal{B}_{\pi_1 \cap \pi}(\mathfrak{F}). \quad (1)$$

Так как  $\mathfrak{F}$  –  $\omega$ -локальный класс Фиттинга и  $F(p) = F(p) \mathfrak{N}_p$  для всех  $p$  из  $\omega$ , то

$$\mathfrak{F} \subseteq \bigcap_{p \in \pi_1 \cap \pi} F(p) \mathfrak{N}_p \mathfrak{E}_p^{\pi} = \bigcap_{p \in \pi_1 \cap \pi} F(p) \mathfrak{E}_p^{\pi}. \text{ Тогда по лемме 2}$$

$$\mathcal{B}_{\pi_1 \cap \pi}(\mathfrak{F}) \subseteq \mathcal{B}_{\pi_1 \cap \pi} \left( \bigcap_{p \in \pi_1 \cap \pi} F(p) \mathfrak{E}_p^{\pi} \right) = \bigcap_{p \in \pi_1 \cap \pi} \mathcal{B}_{\pi_1 \cap \pi}(F(p) \mathfrak{E}_p^{\pi}).$$

Следовательно, по лемме 4 и утверждению 1) леммы 5 получаем

$$\bigcap_{p \in \pi_1 \cap \pi} \mathcal{B}_{\pi_1 \cap \pi}(F(p) \mathfrak{E}_p^{\pi}) = \bigcap_{p \in \pi_1 \cap \pi} \mathcal{B}_{\pi_1 \cap \pi}(F(p)) \mathfrak{E}_p^{\pi}.$$

Кроме того, по утверждению 2) леммы 5 для любого  $p \in \pi_1 \cap \pi$  имеет место равенство

$$\mathcal{B}_{\pi_1 \cap \pi}(F(p)) = \mathcal{B}_{\pi_1 \cap \pi}(F(p)) \mathfrak{N}_p.$$

Следовательно,

$$\mathcal{B}_{\pi_1 \cap \pi}(\mathfrak{F}) \subseteq \bigcap_{p \in \pi_1 \cap \pi} \mathcal{B}_{\pi_1 \cap \pi}(F(p)) \mathfrak{N}_p \mathfrak{E}_p^\pi.$$

Докажем обратное включение. Так как  $F(p) \subseteq \mathfrak{F}$  для всех  $p$  из  $\omega$ , то по лемме 2 имеем

$$\mathcal{B}_{\pi_1 \cap \pi}(F(p)) \subseteq \mathcal{B}_{\pi_1 \cap \pi}(\mathfrak{F}).$$

Значит,

$$\mathcal{B}_{\pi_1 \cap \pi}(F(p)) \mathfrak{E}_p^\pi \subseteq \mathcal{B}_{\pi_1 \cap \pi}(\mathfrak{F}) \mathfrak{E}_p^\pi,$$

и по утверждению 2) леммы 5

$$\mathcal{B}_{\pi_1 \cap \pi}(F(p)) = \mathcal{B}_{\pi_1 \cap \pi}(F(p)) \mathfrak{N}_p$$

для любого  $p$  из  $\pi_1 \cap \pi$ . Следовательно,

$$\bigcap_{p \in \pi_1 \cap \pi} \mathcal{B}_{\pi_1 \cap \pi}(F(p)) \mathfrak{N}_p \mathfrak{E}_p^\pi \subseteq \bigcap_{p \in \pi_1 \cap \pi} \mathcal{B}_{\pi_1 \cap \pi}(\mathfrak{F}) \mathfrak{E}_p^\pi = \mathcal{B}_{\pi_1 \cap \pi}(\mathfrak{F}) \mathfrak{E}_{(\pi_1 \cap \pi)}^\pi.$$

Кроме того, по следствию леммы 6

$$\mathcal{B}_{\pi_1 \cap \pi}(\mathfrak{F}) \mathfrak{E}_{(\pi_1 \cap \pi)}^\pi = \mathcal{B}_{\pi_1 \cap \pi}(\mathfrak{F}).$$

Значит,

$$\bigcap_{p \in \pi_1 \cap \pi} \mathcal{B}_{\pi_1 \cap \pi}(F(p)) \mathfrak{N}_p \mathfrak{E}_p^\pi \subseteq \mathcal{B}_{\pi_1 \cap \pi}(\mathfrak{F}),$$

и равенство (1) доказано.

Установим теперь, что

$$\bigcap_{p \in \omega/\pi} \mathcal{B}_{\pi \cap \omega}(\mathfrak{F}) \mathfrak{N}_p \mathfrak{E}_p^\pi = \mathcal{B}_{\pi \cap \omega}(\mathfrak{F}) \mathfrak{E}_{(\omega/\pi)}^\pi. \quad (2)$$

По лемме 6

$$\mathcal{B}_{\pi \cap \omega}(\mathfrak{F}) = \mathcal{B}_{\pi \cap \omega}(\mathfrak{F}) \mathfrak{E}_{\omega/\pi}^\pi.$$

Кроме того,  $\mathfrak{E}_{\omega/\pi}^\pi \mathfrak{N}_p = \mathfrak{E}_{\omega/\pi}^\pi$  для любого  $p$  из  $\omega/\pi$ . Следовательно,

$$\bigcap_{p \in \omega/\pi} \mathcal{B}_{\pi \cap \omega}(\mathfrak{F}) \mathfrak{N}_p \mathfrak{E}_p^\pi = \bigcap_{p \in \omega/\pi} \mathcal{B}_{\pi \cap \omega}(\mathfrak{F}) \mathfrak{E}_{\omega/\pi}^\pi \mathfrak{N}_p \mathfrak{E}_p^\pi = \bigcap_{p \in \omega/\pi} \mathcal{B}_{\pi \cap \omega}(\mathfrak{F}) \mathfrak{E}_{\omega/\pi}^\pi \mathfrak{E}_p^\pi,$$

и

$$\bigcap_{p \in \omega/\pi} \mathcal{B}_{\pi \cap \omega}(\mathfrak{F}) \mathfrak{E}_{\omega/\pi}^\pi \mathfrak{E}_p^\pi = \bigcap_{p \in \omega/\pi} \mathcal{B}_{\pi \cap \omega}(\mathfrak{F}) \mathfrak{E}_p^\pi = \mathcal{B}_{\pi \cap \omega}(\mathfrak{F}) \mathfrak{E}_{(\omega/\pi)}^\pi,$$

что доказывает равенство (2).

Таким образом, мы имеем

$$LR_\omega(f) = \mathfrak{E}_{(\pi_2 \cap \pi)}^\pi \cap \mathcal{B}_{\pi_1 \cap \pi}(\mathfrak{F}) \cap \mathcal{B}_{\pi \cap \omega}(\mathfrak{F}) \mathfrak{E}_{(\omega/\pi)}^\pi \cap \mathcal{B}_{\pi \cap \omega}(\mathfrak{F}) \mathfrak{E}_\omega^\pi.$$

Теперь для доказательства теоремы достаточно выяснить справедливость равенства

$$\mathfrak{E}_{(\pi_2 \cap \pi)}^\pi \cap \mathcal{B}_{\pi_1 \cap \pi}(\mathfrak{F}) = \mathcal{B}_{\pi \cap \omega}(\mathfrak{F}). \quad (3)$$

Пусть  $G \in \mathcal{B}_{\pi \cap \omega}(\mathfrak{F})$ . Тогда из того, что  $\mathfrak{F} = LR_\omega(F)$ , следует  $G_{\pi \cap \omega} \in \mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{E}_{\pi_2}^\pi$  и поэтому  $|G_{\pi \cap \omega}|$  является  $(\pi_2' \cap \pi \cap \omega)$ -числом. Кроме того,  $|G : G_{\pi \cap \omega}|$  является  $(\pi \cap \omega)'$ -числом. Легко видеть, что  $(\pi \cap \omega)' \cup (\pi_2' \cap \pi \cap \omega) = (\pi_2 \cap \pi)'$  и, значит,  $G \in \mathfrak{E}_{(\pi_2 \cap \pi)}^\pi$ . Так как  $\pi_1 \subseteq \omega$ , то  $(\pi \cap \omega)' \subseteq (\pi_1 \cap \pi)'$  и  $|G : G_{\pi \cap \omega}|$  является  $(\pi_1 \cap \pi)'$ -числом. Далее из  $\pi_1 \cap \pi \cap \omega \subseteq \pi_1 \cap \pi$  следует, что  $|G_{\pi \cap \omega}|$  есть

$(\pi_1 \cap \pi)$ -число. Тогда  $(\pi \cap \omega)$ -холлова подгруппа  $G_{\pi \cap \omega}$  группы  $G$  является также  $(\pi_1 \cap \pi)$ -холловой подгруппой группы  $G$ . Значит,  $G_{\pi_1 \cap \pi} \in \mathfrak{F}$  и  $G \in \mathfrak{B}_{\pi_1 \cap \pi}(\mathfrak{F})$ . Следовательно,

$$\mathfrak{B}_{\pi \cap \omega}(\mathfrak{F}) \subseteq \mathfrak{E}_{(\pi_2 \cap \pi)}^\pi \cap \mathfrak{B}_{\pi_1 \cap \pi}(\mathfrak{F}).$$

Покажем обратное включение. Пусть теперь  $G \in \mathfrak{E}_{(\pi_2 \cap \pi)}^\pi \cap \mathfrak{B}_{\pi_1 \cap \pi}(\mathfrak{F})$ . Тогда  $G_{\pi_1 \cap \pi} \in \mathfrak{F}$ . Так как  $(\pi_2 \cap \pi)' \setminus (\pi_1 \cap \pi) = (\pi \cap \omega)'$ , то  $|G : G_{\pi_1 \cap \pi}|$  является  $(\pi \cap \omega)'$ -числом. Теперь, ввиду  $\pi_1 \cap \pi \subseteq \pi \cap \omega$ , получаем, что  $|G_{\pi_1 \cap \pi}|$  является  $(\pi \cap \omega)$ -числом. Значит,  $(\pi_1 \cap \pi)$ -холлова подгруппа  $G$  является  $(\pi \cap \omega)$ -холловой подгруппой  $G$  и поэтому  $G_{\pi \cap \omega} \in \mathfrak{F}$ . Следовательно,  $G \in \mathfrak{B}_{\pi \cap \omega}(\mathfrak{F})$ . Это означает, что

$$\mathfrak{E}_{(\pi_2 \cap \pi)}^\pi \cap \mathfrak{B}_{\pi_1 \cap \pi}(\mathfrak{F}) \subseteq \mathfrak{B}_{\pi \cap \omega}(\mathfrak{F})$$

и равенство (3) доказано.

Теорема доказана.

В случае, когда  $\omega = \mathbb{P}$  получаем

*С л е д с т в и е.* Для любого локального класса Фиттинга  $\mathfrak{F}$  и любого множества простых чисел  $\pi$  класс групп  $\mathfrak{B}_\pi(\mathfrak{F})$  является локальным классом Фиттинга.

### Литература

1. B l e s s e n o h l D. // Math. Z. 1975. Vol. 142, N 3. S. 299-300.
2. С л е п о в а Л. М. // Докл. АН БССР. 1977. Т. 21, № 7. С. 557-589.
3. В о р о б ь е в Н. Т. // Матем. заметки. 1983. Т. 34, № 2. С. 165-170.
4. C u s a c k E. // Bull. Austral. Math. Soc. 1980. Vol. 21, N 2. P. 229-236.
5. B r i s o n O. J. // Bull. Austral. Math. Soc. 1981. Vol. 23. P. 361-365.
6. B r i s o n O. J. // Austral. Math. Soc (Series A). 1984. Vol. 32. P. 145-164.
7. Н а у с к Р. // J. London Math. Soc. 1979. Vol. 20, N 2. P. 423-434.
8. З а г у р с к и й В. Н., В о р о б ь е в Н. Т. // Матем. заметки. 2005. Т. 78, № 2. С. 234-240.
9. Ч у н и х и н С. А. Подгруппы конечных групп. Минск, 1964.
10. Ш е м е т к о в Л. А. Формации конечных групп. М., 1978.
11. D o e r k K., H a w k e s T. Finite Soluble Groups. Berlin; New York: Walter de Gruyter, 1992.
12. С к и б а А. Н., Ш е м е т к о в Л. А. // Матем. труды. 1999. Т. 2, № 2. С. 114-147.
13. В о р о б ь е в Н. Т., В и т ь к о Е. А., И в а н о в а Н. В. // Веснік Віцебскага дзярж. ун-та. 2008. № 2(48). С. 125-129.
14. В о р о б ь е в Н. Т. // Известия Гом. гос. ун-та им. Ф. Скорины. 1999. № 1 (15). С. 8-13.

*E. A. VITKO, N. T. VOROB'EV*

### FITTING CLASSES AND HALL SUBGROUPS OF FINITE $\pi$ -SOLUBLE GROUPS

#### Summary

It is proved that if a Fitting class  $\mathfrak{F}$  is  $\omega$ -local, then the class of all finite  $\pi$ -soluble groups, all of whose Hall  $(\omega \cap \pi)$ -subgroups belong to  $\mathfrak{F}$ , is also  $\omega$ -local.

УДК 512.542

С. Ф. КАМОРНИКОВ<sup>1</sup>, О. Л. ШЕМЕТКОВА<sup>2</sup>

**НОВЫЕ СВОЙСТВА ПРЕФРАТТИНИЕВЫХ ПОДГРУПП  
КОНЕЧНЫХ РАЗРЕШИМЫХ ГРУПП**

<sup>1</sup>Гомельский филиал Международного института трудовых и социальных отношений

<sup>2</sup>Российская экономическая академия им. Г. В. Плеханова, Москва

(Поступила в редакцию 12.03.2010)

**Введение.** В 1962 г. В. Гашюц в работе [1] ввел понятие префраттиниевой подгруппы конечной разрешимой группы. Обосновывая терминологию, он пояснил, что для каждой префраттиниевой подгруппы  $H$  группы  $G$  можно получить подгруппу Фраттини любой факторгруппы  $G/N$ :

$$\Phi(G/N) = \text{Core}_{G/N}(HN/N).$$

Таким образом, в префраттиниеву подгруппу проецируются подгруппы Фраттини всех гомоморфных образов группы.

Отмеченное выше равенство позволяет предположить, что некоторые свойства подгруппы Фраттини группы  $G$  наследуются ее префраттиниевыми подгруппами. В настоящей работе данная гипотеза подтверждается в отношении тех свойств подгруппы Фраттини, которые касаются связи  $\Phi(G)$  с нормальными подгруппами группы  $G$ .

Главная цель работы – доказательство следующих трех теорем.

**Т е о р е м а 1.** Если  $H$  – префраттиниева подгруппа конечной разрешимой группы  $G$ , то для любой нормальной подгруппы  $N$  группы  $G$  подгруппа  $H \cap N$  содержит некоторую префраттиниеву подгруппу группы  $N$ .

Теорема 1 связана с развитием следующего классического свойства подгруппы Фраттини (см., например, [2]): если  $N$  – нормальная подгруппа группы  $G$ , то  $\Phi(N) \subseteq \Phi(G)$ .

В связи с теоремой 1 возникает задача нахождения достаточных условий, при которых подгруппа  $H \cap N$  в точности является префраттиниевой подгруппой нормальной подгруппы  $N$  группы  $G$ , если  $H$  – префраттиниева подгруппа группы  $G$ . Некоторые из таких достаточных условий дают теоремы 2 и 3.

**Т е о р е м а 2.** Если  $H$  – префраттиниева подгруппа конечной разрешимой группы  $G$ , то для любой нормальной холловой подгруппы  $N$  группы  $G$  подгруппа  $H \cap N$  является префраттиниевой подгруппой в  $N$ .

Теорема 2 переносит на префраттиниевы подгруппы следующее свойство подгруппы Фраттини [3]: если  $N$  – нормальная холлова подгруппа группы  $G$ , то  $\Phi(N) = \Phi(G) \cap N$ . Этот результат для нормальных силовских подгрупп доказан ранее Р. Бэрмом в [4], а его обобщение дано в [5].

**Т е о р е м а 3.** Если нормальная подгруппа  $N$  нормально дополняема в конечной разрешимой группе  $G$  и  $H$  – префраттиниева подгруппа группы  $G$ , то  $H \cap N$  – префраттиниева подгруппа группы  $N$ . В частности, если  $G = N_1 \times N_2$  и  $H_i$  – префраттиниева подгруппа группы  $N_i$ , где  $i = 1, 2$ , то  $H_1 \times H_2$  – префраттиниева подгруппа группы  $G$ .

Приведенное в теореме 3 свойство префраттиниевых подгрупп является аналогом следующего свойства подгруппы Фраттини: если  $G = N_1 \times N_2$ , то  $\Phi(G) = \Phi(N_1) \times \Phi(N_2)$ .

В работе рассматриваются только конечные разрешимые группы. Используемые определения и обозначения стандартны, их можно найти в [2].

**Вспомогательные леммы.** В оригинальном изложении [1] префраттиниева подгруппа определяется как пересечение дополнений всех корон группы. Мы же возьмем за основу следующее конструктивное определение, не использующее понятие короны главного фактора группы.

Нам потребуются некоторые понятия, связанные со свойствами нормальных факторов. Пусть  $M$  – подгруппа, а  $L/K$  – нормальный фактор группы  $G$ . Говорят, что:

1)  $M$  является *дополнением* фактора  $L/K$ , если  $ML = G$  и  $M \cap L = K$  (в этом случае  $L/K$  называется *дополняемым фактором*);

2)  $M$  *покрывает* фактор  $L/K$ , если  $MK \supseteq L$ ;

3)  $M$  *изолирует* фактор  $L/K$ , если  $M \cap L \subseteq K$ .

**О п р е д е л е н и е.** Пусть в некотором главном ряду группы  $G$  имеется ровно  $k$  дополняемых главных факторов и  $M_1, \dots, M_k$  – максимальные подгруппы группы  $G$ , изолирующие различные дополняемые факторы этого ряда. Тогда подгруппа  $M_1 \cap \dots \cap M_k$  называется *префраттиниевой подгруппой* группы  $G$ .

Следующие четыре леммы описывают ключевые свойства префраттиниевых подгрупп. Доказательство их можно найти в [1, 2].

**Л е м м а 1.** Для любой группы  $G$  справедливы следующие утверждения:

1) каждая префраттиниева подгруппа группы  $G$  изолирует все дополняемые главные факторы группы  $G$  и покрывает все ее фраттиниевы главные факторы;

2) любые две префраттиниевы подгруппы группы  $G$  сопряжены.

**Л е м м а 2.** Пусть  $H$  – префраттиниева подгруппа группы  $G$ . И пусть  $N \triangleleft G$ . Тогда:

1) если  $N \subseteq \Phi(G)$ , то  $N \subseteq H$ ;

2)  $HN/N$  – префраттиниева подгруппа группы  $G/N$ .

**Л е м м а 3.** Пусть  $N$  – нормальная подгруппа группы  $G$ . Если  $N \subseteq \Phi(G)$  и  $H/N$  – префраттиниева подгруппа группы  $G/N$ , то  $H$  – префраттиниева подгруппа группы  $G$ .

**Л е м м а 4.** Если  $H$  – префраттиниева подгруппа критической максимальной подгруппы группы  $G$ , то  $H\Phi(G)$  – префраттиниева подгруппа группы  $G$ .

Напомним, что максимальная подгруппа  $M$  группы  $G$  называется *критической*, если  $G = MF(G)$ .

Нам понадобится также информация о главных факторах нормальной подгруппы группы  $G$ , изложенная в следующих двух леммах.

**Л е м м а 5.** Пусть  $N$  – нормальная подгруппа группы  $G$ ,  $L$  – дополняемая минимальная нормальная подгруппа группы  $G$ , содержащаяся в  $N$ . Если  $R/S$  –  $N$ -главный фактор подгруппы  $L$ , а  $M$  – дополнение к  $L$  в  $G$ , то справедливы следующие утверждения:

1) существует нормальная в  $N$  подгруппа  $C$ , изолирующая фактор  $R/S$  в  $L$ ;

2) подгруппа  $C(M \cap N)$  является дополнением фактора  $R/S$  в  $N$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** На основании утверждения А, 4.13 из [2] минимальная нормальная подгруппа  $L$  группы  $G$  представима в виде прямого произведения минимальных нормальных подгрупп из  $N$ . Поэтому найдется нормальная в  $N$  подгруппа  $D$  такая, что  $L = R \times D$ . Обозначим подгруппу  $SD$  через  $C$ . Простая проверка показывает, что подгруппа  $C$  нормальна в  $N$  и дополняет в  $L$  фактор  $R/S$ , т. е.  $RC = L$  и  $R \cap C = S$ .

Отсюда  $R(C(M \cap N)) = (RC)(M \cap N) = L(M \cap N) = LM \cap N = N$ . А так как  $D(M \cap N)$  – дополнение к  $R$  в  $N$ , то

$$R \cap C(M \cap N) = R \cap SD(M \cap N) = S(R \cap D(M \cap N)) = S.$$

Лемма доказана.

**Л е м м а 6.** Пусть  $N$  – нормальная подгруппа группы  $G$ ,  $L/S$  – такой дополняемый главный фактор группы  $G$ , что  $1 \subseteq S \subseteq L \subseteq N$ . Если  $S = L_0 \subset L_1 \subset \dots \subset L_k = L$  – отрезок  $N$ -главного ряда подгруппы  $L$ , а  $M$  – дополнение к  $L/S$  в  $G$ , то справедливы следующие утверждения:

1) существуют нормальные в  $N$  подгруппы  $C_1, \dots, C_k$ , которые содержат  $S$  и дополняют соответственно факторы  $L_1/L_0, \dots, L_k/L_{k-1}$  в  $L$ ;

2)  $C_1(M \cap N), \dots, C_k(M \cap N)$  – максимальные подгруппы группы  $N$ , дополняющие в  $N$  соответственно факторы  $L_1/L_0, \dots, L_k/L_{k-1}$ ;

$$3) \bigcap_{i=1}^k C_i(M \cap N) = M \cap N.$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Рассмотрим факторгруппу  $G/S$ . Тогда  $L/S$  – дополняемая минимальная нормальная подгруппа группы  $G/S$ , содержащаяся в  $N/S$ . Теперь утверждения 1) и 2) прямо следуют из леммы 5.

Очевидно,  $M \cap N \subseteq \bigcap_{i=1}^k C_i(M \cap N)$ . Кроме того, подгруппа  $\bigcap_{i=1}^k C_i(M \cap N)$  изолирует все факторы  $L_i/L_{i-1}$  и покрывает все главные факторы группы  $N$ , расположенные на отрезке от  $L$  до  $N$ . Поэтому на основании леммы А, 1.7 из [2] справедливо равенство  $|\bigcap_{i=1}^k C_i(M \cap N)| = |N : L| = |M \cap N|$ . Значит,  $\bigcap_{i=1}^k C_i(M \cap N) = M \cap N$ . Лемма доказана.

**Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 1.** Если подгруппа  $N$  единична, то утверждение теоремы очевидно. Поэтому полагаем далее, что  $N \neq 1$ . Рассмотрим главный ряд

$$h : 1 = N_0 \subset N_1 \subset \dots \subset N_s = N = G_0 \subset G_1 \subset \dots \subset G_r = G$$

группы  $G$ , проходящий через подгруппу  $N$ .

Пусть  $N_{i_1}/N_{i_1-1}, \dots, N_{i_m}/N_{i_m-1}$  и  $G_{j_1}/G_{j_1-1}, \dots, G_{j_n}/G_{j_n-1}$  – все дополняемые главные факторы ряда  $h$ . И пусть  $M_1, \dots, M_m$  и  $M_1^*, \dots, M_n^*$  – максимальные подгруппы группы  $G$ , дополняющие соответственно главные факторы  $N_{i_1}/N_{i_1-1}, \dots, N_{i_m}/N_{i_m-1}$  и  $G_{j_1}/G_{j_1-1}, \dots, G_{j_n}/G_{j_n-1}$ .

Из определения следует, что  $M_1 \cap \dots \cap M_m \cap M_1^* \cap \dots \cap M_n^*$  – префраттиниева подгруппа группы  $G$ . На основании леммы 1, не нарушая общности рассуждений, можно считать, что

$$M_1 \cap \dots \cap M_m \cap M_1^* \cap \dots \cap M_n^* = H.$$

Так как подгруппы  $M_1^*, \dots, M_n^*$  содержат  $N$ , то  $H \cap N = M_1 \cap \dots \cap M_m \cap N$ . Уплотним ряд

$$h_N : 1 = N_0 \subset N_1 \subset \dots \subset N_s = N$$

до главного ряда подгруппы  $N$ . Пусть

$$N_{i_t-1} = N_{i_t 0} \subset N_{i_t 1} \subset \dots \subset N_{i_t k_i} = N_{i_t}$$

– уплотненный отрезок ряда  $h_N$  на участке от  $N_{i_t-1}$  до  $N_{i_t}$ , где  $t = 1, \dots, m$ . На основании леммы 6 для всех  $t = 1, \dots, m$  факторы  $N_{i_t 1}/N_{i_t 0}, \dots, N_{i_t k_i}/N_{i_t k_i-1}$  дополняемы в  $N$ . Если  $C_{i_t 1}, \dots, C_{i_t k_i}$  – дополнения факторов  $N_{i_t 1}/N_{i_t 0}, \dots, N_{i_t k_i}/N_{i_t k_i-1}$  в  $N_{i_t}$ , то  $C_{i_t 1}(M_t \cap N), \dots, C_{i_t k_i}(M_t \cap N)$  – максимальные подгруппы группы  $N$ , дополняющие факторы  $N_{i_t 1}/N_{i_t 0}, \dots, N_{i_t k_i}/N_{i_t k_i-1}$ , и при этом выполняется равенство  $C_{i_t 1}(M_t \cap N) \cap \dots \cap C_{i_t k_i}(M_t \cap N) = M_t \cap N$ .

После уплотнения некоторые фраттиниевы главные факторы ряда  $h$ , расположенные на отрезке от 1 до  $N$ , могут стать дополняемыми в  $N$ . Пусть число таких  $N$ -главных факторов равно  $l$  и  $T_1, \dots, T_l$  – дополнения к ним (по одному для каждого) в группе  $N$ . Тогда по определению получаем, что подгруппа  $H_1$ , равная

$$T_1 \cap \dots \cap T_l \cap C_{t_1 1}(M_1 \cap N) \cap \dots \cap C_{t_m k_m}(M_m \cap N),$$

является префраттиниевой подгруппой группы  $N$ . Учитывая изложенное выше, окончательно получаем

$$\begin{aligned} H_1 &= T_1 \cap \dots \cap T_l \cap (M_1 \cap N) \cap \dots \cap (M_m \cap N) \subseteq \\ &\subseteq (M_1 \cap N) \cap \dots \cap (M_m \cap N) = M_1 \cap \dots \cap M_m \cap N = H \cap N. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

**Доказательство теоремы 2.** Применим индукцию по порядку группы  $G$ . Заметим, что если подгруппа  $N$  единична, то утверждение теоремы очевидно. Поэтому полагаем, что  $N \neq 1$ . Пусть  $L$  – минимальная нормальная подгруппа группы  $G$ , содержащаяся в  $N$ .

Рассмотрим факторгруппу  $G/L$ . Очевидно,  $N/L$  – холлова подгруппа группы  $G/L$ . Кроме того, на основании леммы 2 подгруппа  $HL/L$  является префраттиниевой в  $G/L$ . Так как для группы  $G/L$  теорема верна по индукции, то  $HL/L \cap N/L = (H \cap N)L/L$  – префраттиниева подгруппа группы  $N/L$ . Далее рассматриваем два случая.

**С л у ч а й 1.** Пусть  $L \subseteq \Phi(G)$ . Тогда ввиду леммы 2  $L \subseteq H$  и  $(H \cap N)L/L = (H \cap N)/L$  – префраттиниева подгруппа группы  $N/L$ . На основании теоремы Я. Г. Берковича (см. [3] и [5]) имеем  $L \subseteq \Phi(N)$ . Значит, ввиду леммы 3  $H \cap N$  – префраттиниева подгруппа группы  $N$ .

**С л у ч а й 2.** Пусть теперь каждая минимальная нормальная подгруппа  $L$  группы  $G$ , содержащаяся в  $N$ , не содержится в  $\Phi(G)$ . Пусть  $\pi = \pi(N)$ . Тогда  $\Phi(G)$  –  $\pi'$ -группа. Кроме того, в группе  $G$  найдется максимальная подгруппа  $M$ , которая не содержит  $L$ . Очевидно,  $M$  является критической.

Пусть  $H_1$  – префраттиниева подгруппа группы  $M$ . Так как для группы  $M$  и ее холловой подгруппы  $M \cap N$  теорема верна по индукции, то  $H_1 \cap (M \cap N) = H_1 \cap N$  – префраттиниева подгруппа группы  $M \cap N$ .

Ввиду леммы 4,  $H_1 \Phi(G)$  – префраттиниева подгруппа группы  $G$ . Очевидно,  $H_1 \Phi(G) \cap N \supseteq H_1 \cap N$ . Так как  $\Phi(G)$  является  $\pi'$ -группой, то порядки холловых  $\pi$ -подгрупп групп  $H_1 \Phi(G)$  и  $H_1$  совпадают. Поэтому из включения  $H_1 \Phi(G) \cap N \supseteq H_1 \cap N$  следует равенство  $H_1 \Phi(G) \cap N = H_1 \cap N$ .

Покажем, что  $H_1 \cap N$  – префраттиниева подгруппа группы  $N$ . По определению  $H_1 \cap N = S_1 \cap \dots \cap S_k$ , где  $S_1, \dots, S_k$  – максимальные подгруппы группы  $M \cap N$ , изолирующие все дополняемые главные факторы главного ряда

$$h:1 = M_0 \subset M_1 \subset \dots \subset M_r = M \cap N$$

группы  $M \cap N$ . На основании утверждения А, 4.13 из [2] получаем  $L = L_1 \times \dots \times L_t$ , где  $L_i$  – минимальная нормальная подгруппа группы  $N$  для любого  $i = 1, \dots, t$ . Так как  $\Phi(N) = 1$ , то каждая из подгрупп  $L_i$  дополняема в  $N$ . Очевидно, подгруппы  $T_1 = (L_2 \times \dots \times L_t)(M \cap N), \dots, T_i = (L_1 \times \dots \times L_{i-1} \times L_{i+1} \times \dots \times L_t)(M \cap N), \dots, T_t = (L_1 \times \dots \times L_{t-1})(M \cap N)$  являются дополнениями в  $N$  соответственно подгрупп  $L_1, \dots, L_i, \dots, L_t$ .

Рассмотрим ряд  $f: 1 \subset L_1 \subset L_1 L_2 \subset \dots \subset L_1 L_2 \dots L_t = L = LM_0 \subset LM_1 \subset \dots \subset LM_r = M \cap N$ . Очевидно,  $f$  – главный ряд группы  $N$ . При этом, если  $R/S$  – дополняемый главный фактор ряда  $h$ , то  $RL/SL$  – дополняемый главный фактор ряда  $f$ . Верно и обратное: дополняемость фактора  $LM_i/LM_{i-1}$  влечет дополняемость фактора  $M_i/M_{i-1}$ .

Таким образом,  $T_1, \dots, T_t, LS_1, \dots, LS_k$  – система максимальных подгрупп группы  $N$ , изолирующих все дополняемые главные факторы ряда  $f$ . По определению  $P = T_1 \cap \dots \cap T_t \cap LS_1 \cap \dots \cap LS_k$  – префраттиниева подгруппа группы  $N$ . Очевидно, подгруппа  $P$  содержит подгруппу  $H_1 \cap N$ . Кроме того, подгруппа  $H_1 \cap N$  изолирует все дополняемые главные факторы группы  $N$  и покрывает все ее фраттиниевы главные факторы. Значит, на основании леммы А, 1.7 из [2] справедливо равенство  $|P| = |H_1 \cap N|$ . Отсюда окончательно имеем, что  $P = H_1 \cap N$ . Теорема доказана.

**Доказательство теоремы 3.** Ввиду того, что нормальная подгруппа  $N$  является нормально дополняемой в  $G$ , ее любой главный фактор  $L/K$  является главным фактором группы  $G$ . Кроме того, фактор  $L/K$  дополняем в  $N$  тогда и только тогда, когда он дополняем в  $G$ .

Если  $P$  – префраттиниева подгруппа группы  $N$ , то на основании теоремы 1 получаем  $P \subseteq N \cap H$ , где  $H$  – некоторая префраттиниева подгруппа группы  $G$ . Сравнивая теперь порядки подгрупп  $P$  и  $H \cap N$ , получаем на основании леммы А, 1.7 из [2], что  $|P| = |H \cap N|$ . Следовательно, справедливо равенство  $P = H \cap N$ . Теорема доказана.

**З а м е ч а н и е.** Условие нормальной дополняемости подгруппы  $N$  в группе  $G$  нельзя ослабить до простой дополняемости. На это указывает, в частности, следующий пример.

Пусть  $G$  – экстраспециальная группа порядка  $p^3$  экспоненты  $p$ , т. е.

$$G = \langle x, y \mid x^p = y^p = 1, [x, y] \in Z(G) \rangle.$$

Тогда  $\Phi(G) = \langle [x, y] \rangle$  – циклическая группа порядка  $p$ . Очевидно,  $\Phi(G)$  – префраттиниева подгруппа группы  $G$ . Пусть  $N = \langle x \rangle \times \langle [x, y] \rangle$ . Подгруппа  $\langle y \rangle$  является дополнением к  $N$  в  $G$ . Префраттиниева подгруппа  $P$  группы  $N$  единична. Поэтому  $1 = P \neq N \cap \Phi(G) = \langle [x, y] \rangle$ .

### Литература

1. Gaschutz W. // Arch. Math. 1962. Bd. 13, N 3. S. 418–426.
2. Doerk K., Hawkes T. Finite soluble groups. Berlin; New-York, 1992.
3. Berkovich Y. // Glaznik Matem. 2005. Vol. 40(60). P. 207–233.
4. Baer R. // Can. J. Math. 1959. Vol. 11. P. 353–369.
5. Шеметкова О. Л. // Алгебра и её приложения: Тр. Междунар. алгебраической конф., посвященной 80-летию со дня рожд. А. И. Кострикина. Нальчик, 2009. С. 130–131.

S. F. KAMORNIKOV, O. L. SHEMETKOVA

### NEW PROPERTIES OF PREFRATTINI SUBGROUPS IN FINITE SOLUBLE GROUPS

#### Summary

Let  $G$  be a finite soluble group,  $H$  a prefrattini subgroup of  $G$ . It is proved that for any normal subgroup  $N$  of  $G$  the following assertions hold: 1)  $H \cap N$  contains some prefrattini subgroup of  $N$ ; 2) if  $N$  is a Hall subgroup in  $G$ , then  $H \cap N$  is a prefrattini subgroup of  $N$ .

УДК 517.987.4+519.6

В. Б. МАЛЮТИН

**РЕШЕНИЕ НЕКОТОРЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ  
 С НЕКОММУТИРУЮЩИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ**

*Институт математики НАН Беларуси*

*(Поступила в редакцию 05.12.2008)*

Теория стохастических дифференциальных уравнений с вещественными или комплексными коэффициентами для непрерывных и разрывных процессов хорошо разработана и изложена во многих книгах по теории случайных процессов и стохастических дифференциальных уравнений [1–3]. Построение решений и их аппроксимаций для стохастических дифференциальных уравнений с некоммутирующими коэффициентами по винеровскому процессу рассмотрено в [4]. В данной работе получено решение линейного стохастического дифференциального уравнения

$$d\xi(t) = \xi(t)A\alpha(t)dt + \xi(t-)B \int \gamma(t,u)v(dt, du), \quad (1)$$

где  $\xi(t)$  – матричнозначный (порядка  $m \times m$ ) процесс на некотором вероятностном пространстве  $(\Omega, F_t, P)$ ,  $t \in [0, T]$ ,  $\alpha(t)$ ,  $\gamma(t, u)$  – функции с вещественными значениями,  $A$ ,  $B$  – не случайные матрицы размерности  $m \times m$ , элементы которых принимают вещественные значения,  $AB = -BA$ ,  $B^2 = E$ ,  $E$  – единичная матрица,  $A\alpha(t)$  и  $B\gamma(t, u)$  означает умножение матрицы на число, на вероятностном пространстве  $(\Omega, F_t, P)$  задана пуассоновская мера  $v(dt, du)$  на  $[0, T] \times U$  с параметром  $dt\Pi(du)$ ,  $\Pi$  – некоторая  $\sigma$ -конечная мера на измеримом пространстве  $(U, \Theta)$ .

При построении решения нам понадобится хронологически упорядоченная экспонента.

О п р е д е л е н и е. Если  $I_n = I_n = \prod_{j=1}^n \exp \left( \int_{t_{j-1}}^{t_j} A\alpha(\tau)d\tau + \int_{t_{j-1}}^{t_j} B \int \gamma(\tau, u)v(d\tau, du) \right)$ , где  $s = t_0 < t_1 < \dots < t_n = t$ ,

сходится по вероятности к некоторому пределу  $I$  при  $\max_{1 \leq j \leq n} |t_j - t_{j-1}| \rightarrow 0$  и не зависит от разбиения отрезка  $[0, t]$ , то этот предел  $I$  называется хронологически упорядоченной экспонентой и обозначается

$$T \exp \left( \int_s^t A\alpha(\tau)d\tau + \int_s^t B \int \gamma(\tau, u)v(d\tau, du) \right).$$

При построении решения мы воспользуемся определением хронологически упорядоченной экспоненты для того, чтобы перейти от функций с некоммутирующими величинами к функциям с коммутирующими величинами. Для функций с коммутирующими величинами мы сможем воспользоваться известными результатами для стохастических интегралов и стохастических дифференциалов, в частности обобщенной формулой Ито [1]

$$dg(t, \xi_1(t), \dots, \xi_m(t)) = \left[ g'_i(t, \xi_1(t), \dots, \xi_m(t)) + \sum_{k=1}^m g_{x_k}'(t, \xi_1(t), \dots, \xi_m(t))\alpha_k(t) \right] dt + \int [g(t, \xi_1(t-) + \gamma_1(t, u), \dots, \xi_m(t-) + \gamma_m(t, u)) - g(t, \xi_1(t-), \dots, \xi_m(t-))]v(dt, du), \quad (2)$$

где  $d\xi_k(t) = \alpha_k(t) dt + \int \gamma_k(t, u) v(dt, du)$ , а также формулой [1]

$$d[g_1(\xi_1(t))g_2(\xi_2(t))] = \int [g_1(\xi_1(t-)) + \gamma_1(t, u)]g_2(\xi_2(t-)) + \gamma_2(t, u)g_1(\xi_1(t-)) - g_1(\xi_1(t-))g_2(\xi_2(t-))]v(dt, du), \quad (3)$$

где  $d\xi_i(t) = \int \gamma_i(t, u) v(dt, du)$ ,  $i = 1, 2$ .

Следует отметить, что построение решения для стохастического уравнения по пуассоновской мере существенно отличается от построения решения по винеровскому процессу. Это связано с тем, что для винеровского процесса при вычислении дифференциала в разложении функции  $g$  при  $(t-s) \approx 0$  достаточно использовать только два слагаемых. Для процесса, представляемого в виде интеграла по пуассоновской мере, при вычислении дифференциала в разложении функции  $g$  при  $(t-s) \approx 0$  необходимо учитывать все слагаемые разложения. Перейдем теперь к построению решения стохастического дифференциального уравнения (1).

**Т е о р е м а.** Пусть матрица  $E+B\gamma(\tau, u)$  является положительно определенной, существует хронологически упорядоченная экспонента

$$I(t) = T \exp \left( \int_0^t A\alpha(\tau) d\tau + \int_0^t \int \ln(E + B\gamma(\tau, u)) v(d\tau, du) \right),$$

$\int_0^t [I(\tau) - I_n(\tau)]^2 d\tau \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$  по вероятности. Тогда  $I(t)$  является решением уравнения (1).

**Д о к а з а т е л ь с т в о .** По определению хронологически упорядоченной экспоненты

$$I(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} I_n(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{j=1}^n \exp \left( \int_{t_{j-1}}^{t_j} A\alpha(\tau) d\tau + \int_{t_{j-1}}^{t_j} \int \ln(E + B\gamma(\tau, u)) v(d\tau, du) \right).$$

Рассмотрим множитель

$$\exp \left( \int_{t_{n-1}}^t A\alpha(\tau) d\tau + \int_{t_{n-1}}^t \int \ln(E + B\gamma(\tau, u)) v(d\tau, du) \right) = \exp \left( \int_{t_{n-1}}^t A\alpha(\tau) d\tau + \int_{t_{n-1}}^t \int [\gamma_0(\tau, u) + B\gamma_1(\tau, u)] v(d\tau, du) \right),$$

где  $\gamma_0(\tau, u) + B\gamma_1(\tau, u) = \ln(E + B\gamma(\tau, u))$ , и рассмотрим разложение множителя

$$\exp \left( \int_{t_{n-1}}^t A\alpha(\tau) d\tau + \int_{t_{n-1}}^t \int [\gamma_0(\tau, u) + B\gamma_1(\tau, u)] v(d\tau, du) \right) \text{ в ряд}$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \left( \int_{t_{n-1}}^t A\alpha(\tau) d\tau + \int_{t_{n-1}}^t \int [\gamma_0(\tau, u) + B\gamma_1(\tau, u)] v(d\tau, du) \right)^j =$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \sum_{i_1, \dots, i_j=0,1} \left( \int_{t_{n-1}}^t A\alpha(\tau) d\tau \right)^{i_1 + \dots + i_j} \times \prod_{p=1}^j \left( \int_{t_{n-1}}^t \int [\gamma_0(\tau, u) + (-1)^{i_{p+1} + \dots + i_j} B\gamma_1(\tau, u)] v(d\tau, du) \right)^{1-i_p},$$

где множитель  $(-1)^{i_{p+1} + \dots + i_j}$  появляется за счет перестановки местами антикоммутирующих величин  $A, B$ .

Так как в этом выражении некоммутирующие величины разделены между собой, то можно воспользоваться обобщением формулы Ито (2) и формулой (3). Получаем, что

$$d \exp \left( \int_{t_{n-1}}^t A\alpha(\tau) d\tau + \int_{t_{n-1}}^t \int [\gamma_0(\tau, u) + B\gamma_1(\tau, u)] v(d\tau, du) \right) =$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j!} \sum_{i_1, \dots, i_j=0,1} \left\{ (i_1 + \dots + i_j - 1) \left( \int_{t_{n-1}}^t A\alpha(\tau) d\tau \right)^{i_1 + \dots + i_j - 1} A\alpha(t) dt \times \right.$$

$$\prod_{p=1}^j \left( \int_{t_{n-1}}^t \int [\gamma_0(\tau, u) + (-1)^{i_{p+1} + \dots + i_j} B\gamma_1(\tau, u)] v(d\tau, du) \right)^{1-i_p} + \left( \int_{t_{n-1}}^t A\alpha(\tau) d\tau \right)^{i_1 + \dots + i_j} \times \quad (4)$$

$$\int \left[ \prod_{p=1}^j \left( \int_{t_{n-1}}^t \int [\gamma_0(\tau, u) + (-1)^{i_{p+1} + \dots + i_j} B\gamma_1(\tau, u)] v(d\tau, du) + \gamma_0(\tau, u) + (-1)^{i_{p+1} + \dots + i_j} B\gamma_1(\tau, u) \right)^{1-i_p} - \prod_{p=1}^j \left( \int_{t_{n-1}}^t \int [\gamma_0(\tau, u) + (-1)^{i_{p+1} + \dots + i_j} B\gamma_1(\tau, u)] v(d\tau, du) \right)^{1-i_p} \right] v(dt, du) \Bigg\}.$$

Формулу (4) можно переписать в виде

$$d \exp \left( \int_{t_{n-1}}^t A\alpha(\tau) d\tau + \int_{t_{n-1}}^t \int [\gamma_0(\tau, u) + B\gamma_1(\tau, u)] v(d\tau, du) \right) =$$

$$\left( \exp \left( \int_{t_{n-1}}^t A\alpha(\tau) d\tau + \int_{t_{n-1}}^t \int [\gamma_0(\tau, u) + B\gamma_1(\tau, u)] v(d\tau, du) \right) A\alpha(t) + r_1(t - t_{n-1}) \right) dt + \quad (5)$$

$$\int \exp \left( \int_{t_{n-1}}^t A\alpha(\tau) d\tau + \int_{t_{n-1}}^t \int [\gamma_0(\tau, u) + B\gamma_1(\tau, u)] v(d\tau, du) \right) \times$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j!} [\gamma_0(\tau, u) + B\gamma_1(\tau, u)]^j v(d\tau, du) + \int r_2(t - t_{n-1}) v(d\tau, du),$$

где

$$\|r_1(t - t_{n-1})\| = \left| \sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{j!} \sum_{i_1, \dots, i_j=0,1} (i_1 + \dots + i_j - 1) \left( \int_{t_{n-1}}^t A\alpha(\tau) d\tau \right)^{i_1 + \dots + i_j - 1} A\alpha(\tau) \times \right.$$

$$\left. \prod_{p=1}^j \left( \int_{t_{n-1}}^t \int [\gamma_0(\tau, u) + (-1)^{i_{p+1} + \dots + i_j} B\gamma_1(\tau, u)] v(d\tau, du) \right)^{1-i_p} + \right.$$

$$\left. \left[ 1 - \exp \left( \int_{t_{n-1}}^t A\alpha(\tau) d\tau + \int_{t_{n-1}}^t \int [\gamma_0(\tau, u) + B\gamma_1(\tau, u)] v(d\tau, du) \right) \right] A\alpha(\tau) \right|,$$

$$\|r_2(t - t_{n-1})\| = \left| \sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{j!} \sum_{\substack{i_1, \dots, i_j=0,1 \\ i_1 + \dots + i_j \leq j-2}} \left( \int_{t_{n-1}}^t A\alpha(\tau) d\tau \right)^{i_1 + \dots + i_j} \times \right.$$

$$\left. \left[ \prod_{p=1}^j \left( \int_{t_{n-1}}^t \int [\gamma_0(\tau, u) + (-1)^{i_{p+1} + \dots + i_j} B\gamma_1(\tau, u)] v(d\tau, du) + \gamma_0(\tau, u) + (-1)^{i_{p+1} + \dots + i_j} B\gamma_1(\tau, u) \right)^{1-i_p} - \right.$$

$$\left. \prod_{p=1}^j \left( \int_{t_{n-1}}^t \int [\gamma_0(\tau, u) + (-1)^{i_{p+1} + \dots + i_j} B\gamma_1(\tau, u)] v(d\tau, du) \right)^{1-i_p} \right] +$$

$$(\exp[\gamma_0(\tau, u) + B\gamma_1(\tau, u)] - 1) \times \int_{t_{n-1}}^t A\alpha(\tau) d\tau \times$$

$$\left[ 1 - \exp \left( \int_{t_{n-1}}^t \int [\gamma_0(\tau, u) + B\gamma_1(\tau, u)] v(d\tau, du) \right) \right].$$

Перейдем от точных равенств к оценкам для  $\|r_1(t - t_{n-1})\|$ ,  $\|r_2(t - t_{n-1})\|$ .

$$\begin{aligned} \|r_1(t - t_{n-1})\| &\leq \sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{j!} j \sum_{l=0}^{j-1} \frac{(j-1)!}{l!(j-1-l)!} \left( \int_{t_{n-1}}^t \|A\| |\alpha(\tau)| d\tau \right)^l \times \\ &\quad \left( \int_{t_{n-1}}^t \int [|\gamma_0(\tau, u)| + \|B\| \cdot |\gamma_1(\tau, u)|] \nu(d\tau, du) \right)^{j-l} \cdot \|A\| \cdot |\alpha(t)| + \\ &\quad \left| 1 - \exp \left( \int_{t_{n-1}}^t \|A\| \cdot |\alpha(\tau)| d\tau + \int_{t_{n-1}}^t \int [|\gamma_0(\tau, u)| + \|B\| \cdot |\gamma_1(\tau, u)|] \nu(d\tau, du) \right) \right| \cdot \|A\| \cdot |\alpha(t)|, \\ \|r_2(t - t_{n-1})\| &\leq \sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{j!} \sum_{l=0}^{j-2} \frac{j!}{l!(j-l)!} \left( \int_{t_{n-1}}^t \|A\| |\alpha(\tau)| d\tau \right)^l \times \\ &\quad \int_{t_{n-1}}^t \int [|\gamma_0(\tau, u)| + \|B\| \cdot |\gamma_1(\tau, u)|] \nu(d\tau, du) \sum_{m=0}^{j-l-1} \frac{(j-l)(j-l-1)!}{m!(j-l-1-m)!} \times \\ &\quad \left( \int_{t_{n-1}}^t \int [|\gamma_0(\tau, u)| + \|B\| \cdot |\gamma_1(\tau, u)|] \nu(d\tau, du) \right)^m \times (|\gamma_0| + \|B\| \cdot |\gamma_1|)^{j-l-1-m} + \\ &\quad (\exp(|\gamma_0(\tau, u)| + \|B\| \cdot |\gamma_1(\tau, u)|) - 1) \times \exp \left( \int_{t_{n-1}}^t \|A\| \cdot |\alpha(\tau)| d\tau \right) \times \\ &\quad \left| 1 - \exp \left( \int_{t_{n-1}}^t \int [|\gamma_0(\tau, u)| + \|B\| \cdot |\gamma_1(\tau, u)|] \nu(d\tau, du) \right) \right|. \end{aligned}$$

Вычисляя сумму  $\sum_{l=0}^{j-1}$  в выражении для  $\|r_1(t - t_{n-1})\|$  и суммы  $\sum_{l=0}^{j-2} \sum_{m=0}^{j-l-1}$  в выражении для  $\|r_2(t - t_{n-1})\|$ , получаем

$$\begin{aligned} \|r_1(t - t_{n-1})\| &\leq \sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{(j-1)!} \times \\ &\quad \left( \int_{t_{n-1}}^t \|A\| \cdot |\alpha(\tau)| d\tau + \int_{t_{n-1}}^t \int [|\gamma_0(\tau, u)| + \|B\| \cdot |\gamma_1(\tau, u)|] \nu(d\tau, du) \right)^{j-1} \|A\| \cdot |\alpha(t)| + \\ &\quad \left| 1 - \exp \left( \int_{t_{n-1}}^t \|A\| \cdot |\alpha(\tau)| d\tau + \int_{t_{n-1}}^t \int [|\gamma_0(\tau, u)| + \|B\| \cdot |\gamma_1(\tau, u)|] \nu(d\tau, du) \right) \right| \cdot \|A\| \cdot |\alpha(t)|, \\ \|r_2(t - t_{n-1})\| &\leq \sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{j!} \int_{t_{n-1}}^t \int [|\gamma_0(\tau, u)| + \|B\| \cdot |\gamma_1(\tau, u)|] \nu(d\tau, du) \cdot j(j-1) \times \\ &\quad \left[ \int_{t_{n-1}}^t \int [|\gamma_0(\tau, u)| + \|B\| \cdot |\gamma_1(\tau, u)|] \nu(d\tau, du) + |\gamma_0| + \|B\| \cdot |\gamma_1| \right] \times \\ &\quad \left( \int_{t_{n-1}}^t \|A\| \cdot |\alpha(\tau)| d\tau + \int_{t_{n-1}}^t \int [|\gamma_0(\tau, u)| + \|B\| \cdot |\gamma_1(\tau, u)|] \nu(d\tau, du) + |\gamma_0| + \|B\| \cdot |\gamma_1| \right)^{j-2} + \\ &\quad (\exp(|\gamma_0(\tau, u)| + \|B\| \cdot |\gamma_1(\tau, u)|) - 1) \times \exp \left( \int_{t_{n-1}}^t \|A\| \cdot |\alpha(\tau)| d\tau \right) \times \end{aligned}$$

$$\left| 1 - \exp \left( \int_{t_{n-1}}^t \int [|\gamma_0(\tau, u)| + \|B\| \cdot |\gamma_1(\tau, u)|] \nu(d\tau, du) \right) \right|$$

Вычисляя сумму  $\sum_{j=2}^{\infty}$  в выражениях для  $\|r_1(t - t_{n-1})\|$  и  $\|r_2(t - t_{n-1})\|$ , получаем из этих неравенств, что

$$\begin{aligned} & \|r_1(t - t_{n-1})\| \leq 2 \cdot \|A\| \cdot |\alpha(t)| \times \\ & \left| 1 - \exp \left( \int_{t_{n-1}}^t \|A\| \cdot |\alpha(\tau)| d\tau + \int_{t_{n-1}}^t \int [|\gamma_0(\tau, u)| + \|B\| \cdot |\gamma_1(\tau, u)|] \nu(d\tau, du) \right) \right|, \\ & \|r_2(t - t_{n-1})\| \leq \int_{t_{n-1}}^t \int [|\gamma_0(\tau, u)| + \|B\| \cdot |\gamma_1(\tau, u)|] \nu(d\tau, du) \times \\ & \left[ \int_{t_{n-1}}^t \int [|\gamma_0(\tau, u)| + \|B\| \cdot |\gamma_1(\tau, u)|] \nu(d\tau, du) + |\gamma_0| + \|B\| \cdot |\gamma_1| \right] \times \\ & \exp \left( \int_{t_{n-1}}^t \|A\| \cdot |\alpha(\tau)| d\tau + \int_{t_{n-1}}^t \int [|\gamma_0(\tau, u)| + \|B\| \cdot |\gamma_1(\tau, u)|] \nu(d\tau, du) + |\gamma_0| + \|B\| \cdot |\gamma_1| \right) + \\ & (\exp(|\gamma_0(\tau, u)| + \|B\| \cdot |\gamma_1(\tau, u)|) - 1) \times \exp \left( \int_{t_{n-1}}^t \|A\| \cdot |\alpha(\tau)| d\tau \right) \times \\ & \left| 1 - \exp \left( \int_{t_{n-1}}^t \int [|\gamma_0(\tau, u)| + \|B\| \cdot |\gamma_1(\tau, u)|] \nu(d\tau, du) \right) \right|. \end{aligned} \quad (6)$$

Пользуясь оценкой [1]

$$\begin{aligned} P \left\{ \left| \int_{t_{n-1}}^t \int [|\gamma_0(\tau, u)| + \|B\| \cdot |\gamma_1(\tau, u)|] \nu(d\tau, du) \right| > \delta \right\} &\leq \frac{N}{\delta^2} + \\ P \left\{ \left| \int_s^t \int [|\gamma_0(\tau, u)| + \|B\| \cdot |\gamma_1(\tau, u)|]^2 \Pi(du) d\tau \right| > N \right\}, \end{aligned}$$

получаем, что при  $N = C|t - t_{n-1}|$ , где

$$C = \max_{0 \leq \tau \leq t} \left\{ \|A\| \cdot |\alpha(\tau)|, \int [|\gamma_0(\tau, u)| + \|B\| \cdot |\gamma_1(\tau, u)|]^2 \Pi(du) \right\},$$

$$P \left\{ \left| \int_{t_{n-1}}^t \int [|\gamma_0(\tau, u)| + \|B\| \cdot |\gamma_1(\tau, u)|] \nu(d\tau, du) \right| > \delta \right\} \leq \frac{C|t - t_{n-1}|}{\delta^2}.$$

Из этой оценки и неравенств (6) следует, что

$$\begin{aligned} P \left\{ \|r_1(t - t_{n-1})\| > 2C(\exp(C|t - t_{n-1}| + \delta) - 1) \right\} &\leq \frac{C|t - t_{n-1}|}{\delta^2}, \\ P \left\{ \|r_2(t - t_{n-1})\| > \delta \cdot (\delta + |\gamma_0| + \|B\| \cdot |\gamma_1|) \cdot \exp(C|t - t_{n-1}| + \delta + |\gamma_0| + \|B\| \cdot |\gamma_1|) + \right. \\ &\left. |\exp(|\gamma_0| + \|B\| \cdot |\gamma_1|) - 1| \cdot \exp(C|t - t_{n-1}|) \cdot |\exp(\delta) - 1| \right\} \leq \frac{C|t - t_{n-1}|}{\delta^2}. \end{aligned}$$

Из этих неравенств получаем

$$P \{ \|r_1(t-t_{n-1})\| > \delta \} \leq \frac{C |t-t_{n-1}|}{\delta^2} (4eC)^2, \quad (7)$$

$$P \{ \|r_2(t-t_{n-1})\| > \delta \} \leq \frac{C |t-t_{n-1}|}{\delta^2} ((2 + |\gamma_0| + \|B\| \cdot |\gamma_1|) \cdot \exp(2 + |\gamma_0| + \|B\| \cdot |\gamma_1|))^2.$$

Из равенства (5) следует, что

$$dI_n(t) = I_n(t)A\alpha(t)dt + I_{n-1}(t)r_1(t-t_{n-1})dt + \int I_n(t)[\exp(\gamma_0(\tau, u) + B\gamma_1(\tau, u)) - 1]v(d\tau, du) + I_{n-1}(t)r_2(t-t_{n-1})v(d\tau, du), \quad (8)$$

где  $I_{n-1}(t) = \prod_{j=1}^{n-1} \exp \left( \int_{t_{j-1}}^t A\alpha(\tau)d\tau + \int_{t_{j-1}}^t \int \ln(E + B\gamma(\tau, u))v(d\tau, du) \right)$ .

Из оценки

$$P \left\{ \left| \int_0^t \int [|\gamma_0(\tau, u)| + \|B\| \cdot |\gamma_1(\tau, u)|]v(d\tau, du) \right| > \ln(\sigma) \right\} \leq \frac{Ct}{\ln(\sigma)^2}$$

следует, что

$$P \{ |I_{n-1}(t)| > \sigma \} \leq \frac{Ct}{\ln(\sigma)^2}.$$

Из этой оценки и оценки (7) получаем

$$P \{ |I_{n-1}(t)r_1(t-t_{n-1})| > \delta \cdot \sigma \} \leq \frac{Ct}{\ln(\sigma)^2} + \frac{C |t-t_{n-1}|}{\delta^2} (4eC)^2,$$

$$P \{ |I_{n-1}(t)r_2(t-t_{n-1})| > \delta \cdot \sigma \} \leq \frac{Ct}{\ln(\sigma)^2} + \frac{C |t-t_{n-1}|}{\delta^2} ((2 + |\gamma_0| + \|B\| \cdot |\gamma_1|) \cdot \exp(2 + |\gamma_0| + \|B\| \cdot |\gamma_1|))^2.$$

Выбирая  $\sigma = |t-t_{n-1}|^{-p}$ ,  $\delta = |t-t_{n-1}|^{p+q}$ , где  $p, q > 0, p+q < \frac{1}{2}$ , получаем

$$P \{ |I_{n-1}(t)r_1(t-t_{n-1})| > |t-t_{n-1}|^q \} \leq \frac{Ct}{(p \ln |t-t_{n-1}|)^2} + \frac{C |t-t_{n-1}|}{|t-t_{n-1}|^{2p+2q}} (4eC)^2,$$

$$P \{ |I_{n-1}(t)r_2(t-t_{n-1})| > |t-t_{n-1}|^q \} \leq \frac{Ct}{(p \ln |t-t_{n-1}|)^2} +$$

$$\frac{C |t-t_{n-1}|}{|t-t_{n-1}|^{2p+2q}} ((2 + |\gamma_0| + \|B\| \cdot |\gamma_1|) \cdot \exp(2 + |\gamma_0| + \|B\| \cdot |\gamma_1|))^2,$$

т. е.  $I_{n-1}(t)r_1(t-t_{n-1}), I_{n-1}(t)r_2(t-t_{n-1}) \rightarrow 0$  по вероятности. Отсюда следует, что  $I_n(t)A\alpha(t) + I_{n-1}(t)r_1(t-t_{n-1}) \rightarrow I(t)A\alpha(t)$ ,  $I_n(t)[\exp(\gamma_0(t, u) + B\gamma_1(t, u)) - E] + I_{n-1}(t)r_2(t-t_{n-1}) \rightarrow I(t)[\exp(\ln(E + B\gamma(t, u))) - E]$  по вероятности.

Из условия теоремы следует, что

$$\int_0^t [I_n(\tau)A\alpha(\tau) + I_{n-1}(\tau)r_1(t-t_{n-1}) - I(\tau)A\alpha(\tau)]d\tau \rightarrow 0, \int_0^t \int [I_n(\tau)B\gamma(\tau, u) + I_{n-1}(\tau)r_2(t-t_{n-1}) - I(\tau)B\gamma(\tau, u)]^2 \Pi(du)d\tau \rightarrow 0$$

при  $n \rightarrow \infty$  по вероятности.

Из этих соотношений и из свойств стохастических интегралов [1] следует, что  $\int_0^t [I_n(\tau) A \alpha(\tau) + I_{n-1}(\tau) r_1(t - t_{n-1})] d\tau + \int_0^t \int [I_n(\tau) B \gamma(\tau, u) + I_{n-1}(\tau) r_2(t - t_{n-1})] v(d\tau, du) \rightarrow \int_0^t I(\tau) A \alpha(\tau) d\tau + \int_0^t \int I(\tau) B \gamma(\tau, u) v(d\tau, du)$  при  $n \rightarrow \infty$ .

Таким образом,

$$\int_0^t I(\tau) A \alpha(\tau) d\tau + \int_0^t \int I(\tau) B \gamma(\tau, u) v(d\tau, du) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^t dI_n(t) = I(t),$$

т. е.  $dI(t) = I(t) A \alpha(t) dt + \int I(t) B \gamma(t, u) v(dt, du)$ . Теорема доказана.

**З а м е ч а н и е.** Приведенное доказательство можно обобщить на случай других коммутационных правил для величин  $A, B$ .

Настоящая работа выполнена при частичной поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект N Ф08 – 023).

### Литература

1. Г и х м а н И. И., С к о р о х о д А. В. Стохастические дифференциальные уравнения. Киев, 1968.
2. В а т а н а б э С., И к э д а Н. Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы. М., 1986.
3. К у з н е ц о в Д. Ф. Численное интегрирование стохастических дифференциальных уравнений. С.-Петербург, 2001.
4. М а л ю т и н В. Б. // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2002. № 3. С. 26–29.

*V. B. MALYUTIN*

### SOLUTION OF SOME STOCHASTIC DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH NONCOMMUTING COEFFICIENTS

#### Summary

Linear stochastic differential equations, which contain noncommuting coefficients and a component represented by the Poisson measure integral are considered. The solution of these equations is obtained in the form of chronologically ordered exponent.

УДК 517.986

М. В. ЩУКИН

***n*-ОДНОРОДНЫЕ  $C^*$ -АЛГЕБРЫ С ПРОСТРАНСТВОМ ПРИМИТИВНЫХ ИДЕАЛОВ,  
ГОМЕОМОРФНЫМ НЕОРИЕНТИРУЕМОМУ КОМПАКТНОМУ  
ДВУМЕРНОМУ МНОГООБРАЗИЮ**

*Международный государственный экологический университет им. А. Д. Сахарова, Минск*

*(Поступила в редакцию 18.01.2008)*

**Предварительные сведения.** Настоящая работа является продолжением и естественным обобщением работы автора, в которой рассматривалась структура алгебраических расслоений над компактными двумерными ориентируемыми многообразиями [1]. История вопроса изложена там же. В настоящей работе мы продолжаем результаты на случай, когда пространство  $\text{Prim}A$  примитивных идеалов алгебры  $A$  является двумерным неориентируемым компактным связным многообразием в оболочечно-ядерной топологии. Неориентируемое компактное двумерное многообразие может быть реализовано как связная сумма  $l$  проективных плоскостей  $P^1$  [2]. Примером неориентируемого двумерного многообразия может служить проективная плоскость  $P$ .

Напомним, что расслоением называется тройка  $(E, B, p)$ , где  $E$  – топологическое пространство, называемое *пространством расслоения*,  $B$  – топологическое пространство, называемое *базой*,  $p: E \rightarrow B$  непрерывная сюръекция, называемая *проекцией*. Множество  $F = p^{-1}(x), x \in B$  называется *слоем* над точкой  $x \in B$ . Примером расслоения может служить расслоение-произведение  $E = B \times F$ ,  $p$  – проекция на первый множитель. Расслоение, изоморфное расслоению-произведению, называется *тривиальным*. Примером нетривиального расслоения может служить лента Мебиуса. Базой этого расслоения является окружность  $S^1$ , слой – отрезок  $I$ . Локально это расслоение является тривиальным, но оно не изоморфно расслоению  $S^1 \times I$ . *Алгебраическим расслоением* называется локально-тривиальное  $G$ -расслоение со слоем  $\text{Mat}(n)$  и структурной группой  $G = \text{Aut}(n)$ . Изоморфизмом расслоений  $\xi_1 = (E_1, B_1, p_1)$  и  $\xi_2 = (E_2, B_2, p_2)$  назовем гомеоморфизм  $\gamma: E_1 \rightarrow E_2$  такой, что  $\gamma(F_x) = F_{\alpha(x)}$ , где  $\alpha: B_1 \rightarrow B_2$  – гомеоморфизм баз расслоений,  $F_x$  обозначает слой над точкой  $x$  базы  $B_1$  расслоения  $\xi_1$ ,  $F_{\alpha(x)}$  – слой расслоения над точкой  $\alpha(x)$  базы  $B_2$ .

**Алгебраические расслоения над двумерными неориентируемыми компактными связными многообразиями.**

**Предложение 1** [2]. *Любая компактная неориентируемая двумерная поверхность гомеоморфна связной сумме проективных плоскостей.*

Обозначим сферу с  $l$  проективными плоскостями через  $P^l$ . Если  $l = 0$ , то поверхность является сферой, поэтому мы рассматриваем в настоящей работе случай  $l \geq 1$ .

Прежде всего, рассмотрим алгебраическое расслоение  $\xi$  со слоем размерности  $n$  над проективной плоскостью  $P^1$ .

Вырежем из нее часть поверхности  $D$ , гомеоморфную открытому кругу. Оставшаяся часть  $P^1 \setminus D$  гомеоморфна ленте Мебиуса  $M$ . Любое алгебраическое расслоение над лентой Мебиуса  $M$  тривиально, так как лента Мебиуса имеет гомотопический класс связной суммы двух окруж-

ностей, являющейся вкладываемой в плоскость  $R^2$  [3]. Реализуем расслоение  $\xi$  как расслоение, полученное склеиванием ограниченный расслоения  $\xi / P^1 \setminus D \cup \xi / \bar{D}$  на множества  $P^1 \setminus D$  и  $\bar{D}$ , где  $v_{12} = v_2^{-1}v_1$  — функция склейки, задаваемая непрерывным отображением  $\gamma_{12}^{v_{12}} \in C(S^1, \text{Aut}(n))$ . Здесь отображение  $v_1 : \xi / P^1 \setminus D \rightarrow P^1 \setminus D \times \text{Mat}(n)$ ,  $v_2 : \xi / \bar{D} \rightarrow \bar{D} \times \text{Mat}(n)$  — соответствующие тривиализации ограниченный расслоения  $\xi$ .

Реализуем ленту Мебиуса  $M$ , как подмножество единичного квадрата  $I^2$  с условиями склейки:  $u(0, y) = u(1, 1 - y)$ . Нам понадобится следующая лемма.

**Л е м м а 1.** *Отображение  $f \in C(\delta M, \text{Aut}(n))$  может быть продолжено до непрерывного отображения  $f_1 \in C(M, \text{Aut}(n))$  тогда и только тогда, когда  $\theta([f]) = 2s, s \in Z$ . Здесь  $\theta : \pi_1(\text{Aut}(n)) \rightarrow Z / nZ$  — изоморфизм групп.*

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Пусть  $f : \delta M \rightarrow \text{Aut}(n)$  таково, что  $\theta([f]) = 2s, s \in Z$ . Пусть  $\theta([f / [0, x_0] \times 1]) = s$  для некоторой точки  $x_0 \in I$ . Применяя гомеоморфизм  $\alpha : M \rightarrow M$ , переводящий  $(x_0, 1) \rightarrow (1, 1)$ , мы добьемся того, что  $\theta([f / I \times 1]) = \theta([f / I \times 0]) = s$ ,  $\det f_2(1, 1) = a \in R \setminus \{0\}$ , где  $f_2(1, 1)$  представитель класса  $f(1, 1) \in \text{Aut}(n)$ . Применим к  $f$  преобразование  $f^1(x, y) = f(x, y) \cdot f_2^{-1}(0, 1)$ , добьемся того, что  $f^1(0, 1) = f(1, 0) = I$ . Далее считаем, что  $f(0, 1) = f(1, 0) = I$ .

Определим функцию  $s_1(x, y) := \begin{cases} 1 + x(a-1), & \text{если } a > 0 \\ 1 + x(|a|-1)\exp(\pi i x(6-6y)), & \text{если } a < 0 \end{cases}, \left( x \in I, y \in \left[ \frac{5}{6}; 1 \right] \right)$ .

Тогда  $s_1(0, y) = 1, y \in \left[ \frac{5}{6}; 1 \right], s_1\left(1, \frac{5}{6}\right) = a, s_1(x, y) \neq 0, x \in [0; 1], y \in \left[ \frac{5}{6}; 1 \right]$ .

Положим  $f_1(x, y) := f(x, y) / s_1(x, y), x \in [0, 1], y \in \left[ \frac{5}{6}; 1 \right]$ . Тогда  $f_1\left(0; \frac{5}{6}\right) = I, \det f_1\left(1; \frac{5}{6}\right) = 1$ , где  $\det f_1\left(1, \frac{5}{6}\right)$  обозначает определитель представителя класса  $f_1\left(1, \frac{5}{6}\right) \in \text{Aut}(n)$ . Пусть  $p(t)$  — путь в  $SL_n(C)$ , связывающий  $I$  и  $f_{1,2}\left(1, \frac{5}{6}\right)$ , т. е.  $p(0) = I, p(1) = f_{1,2}\left(1, \frac{5}{6}\right)$ , где  $f_{1,2}\left(1, \frac{5}{6}\right)$  — представитель класса  $f_1\left(1, \frac{5}{6}\right) \in \text{Aut}(n)$ .

Положим  $f_1(x, y) := f_1\left(\frac{x}{1 - \sqrt{\frac{1}{36} - \left(y - \frac{2}{3}\right)^2}}, y\right), (x, y) \in \left[\left[0, 1 - \sqrt{\frac{1}{36} - \left(y - \frac{2}{3}\right)^2}\right]; \left[\frac{2}{3}, \frac{5}{6}\right]\right]$ ;

$f_1(x, y) = p^*\left(6\sqrt{(x-1)^2 + \left(y - \frac{2}{3}\right)^2}, \sqrt{(x-1)^2 + \left(y - \frac{2}{3}\right)^2}\right) \leq \frac{1}{6}$ , где  $p^*(t)$  обозначает класс в группе

$\text{Aut}(n)$ , содержащий  $p(t)$ .

Тогда  $f_1\left(0, \frac{2}{3}\right) = I = f_1\left(1, \frac{2}{3}\right)$ . Пусть  $\Gamma(t)$  – гомотопия между  $f_1 / \left(I \times \frac{2}{3}\right)$  и  $T(\exp(2\pi i s x)I)$ ,  $x \in [0; 1]$ , где  $T(\exp(2\pi i s x)I)$  – класс в группе  $\text{Aut}(n)$  для каждого  $x$ ,  $\Gamma(0) = f_1 / \left(I \times \frac{2}{3}\right)$ ,  $\Gamma(1) = T(\exp(2\pi i s x)I)$ ,  $\Gamma(t) \in \text{Aut}(n)$ ,  $t \in [0; 1]$ , которая существует, так как  $\left[f_1 / \left(I \times \frac{2}{3}\right)\right] = [\exp(2\pi i s x)] = \theta^{-1}(s)$ .

Положим  $f_1(x, y) := \Gamma(-6y + 4)$ ,  $(x, y) \in I \times \left[\frac{1}{2}; \frac{2}{3}\right]$ . Тогда  $f_1 / \left(I \times \frac{1}{2}\right) = T(\exp(2\pi i s x)I)$ . В нижней половине квадрата продолжаем аналогично, согласно условиям склейки, и получаем искомое продолжение.

Обратно, пусть задано отображение  $f_1 \in C(M, \text{Aut}(n))$ . Сделаем гомотопию  $f_1 / \delta M$  и ограничения  $f_1$  на середину ленты Мебиуса, которая представляет собой окружность  $S^1$ , обходящую два раза.

Положим  $\Gamma(t) := f_1\left(x, 1 - \frac{1}{2}t\right)$ ,  $(x, y) \in I \times \left[\frac{1}{2}; 1\right]$  и  $\Gamma(t) := f_1\left(x, \frac{1}{2}t\right)$ ,  $(x, y) \in I \times \left[\frac{1}{2}; 1\right]$ .

Тогда  $\theta([f_1 / \delta M]) = 2\theta\left(\left[f_1 / \left(I \times \frac{1}{2}\right)\right]\right) = 2s$ ,  $\left(f_1\left(0, \frac{1}{2}\right) = f_1\left(1, \frac{1}{2}\right)\right)$ , где  $s = \theta\left(\left[f_1 / \left(I \times \frac{1}{2}\right)\right]\right)$ . Лемма доказана.

**Л е м м а 2.** Пусть задано непрерывное отображение  $f : S^1 \rightarrow \text{Aut}(n)$ ,  $S^1 = \delta(P_k \setminus D)$ . Это отображение может быть продолжено до непрерывного отображения  $f^* : P_k \setminus D \rightarrow \text{Aut}(n)$  тогда и только тогда, когда  $\theta([f]) = 0$ , где  $[f]$  обозначает класс элемента  $f$  в  $\pi_1(\text{Aut}(n))$ .

Здесь  $P_k$  обозначает сферу с  $k$  ручками, т. е. ориентируемое двумерное многообразие.

**Л е м м а 3.** Отображение  $f \in C(\delta(P^k \setminus M), \text{Aut}(n))$  ( $k \geq 2$ ) может быть продолжено до  $f_1 \in C(P^k \setminus M, \text{Aut}(n))$  тогда и только тогда, когда  $\theta([f]) = 2s$ ,  $s \in \mathbb{Z}$ . Если  $k = 1$ , то класс должен удовлетворять условию  $\theta([f]) = 0$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о** проведем индукцией по числу вклеенных проективных плоскостей  $k$ . При  $k = 1$  пространство  $P^1 \setminus M$  гомеоморфно  $P^k \setminus D$  и утверждение следует из леммы 2. При  $k = 2$  получаем пространство  $P^2 \setminus M$  с одной проективной плоскостью  $M_1$ , которое гомеоморфно ленте Мебиуса. Отображение  $f \in C(\delta(P^2 \setminus M), \text{Aut}(n))$  продолжается до отображения  $f \in C(M_1, \text{Aut}(n))$  в силу леммы 1.

Предположение индукции. Предположим, что утверждение леммы выполняется при  $k \leq m$ .

**Переход индукции.** Пусть задано алгебраическое расслоение  $\xi$  над  $P^{m+1} \setminus M$ . От множества  $P^{m+1}$  отрезем одну проективную плоскость  $M_1$  по дуге  $L_1$ , гомеоморфной отрезку  $I$ . Тогда множество  $P^{m+1} \setminus M$  можно представить в виде объединения  $P^m \setminus M_1 \cup M_2$ , где множество  $M_2$  гомеоморфно ленте Мебиуса ( $(P^m \setminus M_1) \cap M_2 = L_1$ ).

Рассмотрим некоторую функцию  $f \in C(\delta M \rightarrow \text{Aut}(n))$  ( $\delta M \approx S^1$ ). Если  $f$  продолжается до  $f_1 \in C(P^{m+1} \setminus M, \text{Aut}(n))$ , то  $\theta([f_1 / S_1 \cup L_1]) = 2s$ ,  $\theta([f_1 / S_2 \cup L_1]) = 2r$  и  $\theta([f / \delta M]) = \theta([f_1 / (S_1 \cup L_1)]) + \theta([f_1 / (S_2 \cup L_1)]) = 2s + 2r = 2(s + r)$ . Здесь  $S_1 \cup S_2 = \delta(P^{m+1} \setminus M)$ ,  $S_1 \subset M_2$ .

Обратно, пусть  $\theta([f / \delta M]) = 2s$ . Пусть  $L_1(t), S_1(t)$  — параметризации  $L_1$  и  $S_1$  при  $t \in [0, 1]$ . Положим  $f_1(L_1(t)) := f(S_1(t))$ . Тогда  $\theta([f_1 / (S_1 \cup L_1)]) = 0$ ,  $\theta([f_1 / (S_2 \cup L_1)]) = 2s$  и  $f_1$  продолжается на  $P^{m+1} \setminus (M \cup M_1)$  и  $M_1$  по предположению индукции и лемме 1. Лемма доказана.

**Т е о р е м а.** Два алгебраических расслоения  $\xi_1$  и  $\xi_2$  над  $P^k$  ( $k \geq 1$ ) изоморфны тогда и только тогда, когда  $\theta([f_1 / \delta M]) \pm \theta([f_2 / \delta M]) = 2s, s \in Z$ .

**Доказательство.** Пусть существует изоморфизм  $\gamma: \xi_1 \rightarrow \xi_2$ , задающий гомеоморфизм  $\alpha: P^k \rightarrow P^k$  баз расслоений  $\xi_1$  и  $\xi_2$ . Пусть  $\eta_{12} = u_2^{-1}u_1$  – функция склейки расслоения  $\xi_1$  над  $(P^k \setminus M) \cup \bar{M}$ ,  $\mu_{12} = v_2^{-1}v_1$  – функции склейки расслоения  $\xi_2$  над  $(P^k \setminus \alpha(M)) \cup \alpha(\bar{M})$ ,  $u_1: \xi_1 / (P^k \setminus M) \rightarrow (P^k \setminus M) \times \text{Mat}(n)$ ,  $u_2: \xi_1 / (\bar{M}) \rightarrow (\bar{M}) \times \text{Mat}(n)$ ,  $v_1: \xi_2 / (P^k \setminus \alpha(M)) \rightarrow (P^k \setminus \alpha(M)) \times \text{Mat}(n)$ ,  $v_2: \xi_2 / (\alpha(\bar{M})) \rightarrow (\alpha(\bar{M})) \times \text{Mat}(n)$ . Рассмотрим некоторый гомеоморфизм  $\beta: P^k \rightarrow P^k$ , переводящий  $\alpha(\bar{M})$  в  $\bar{M}$  и не меняющий ориентации множества  $\alpha(\delta(\bar{M}))$ , гомеоморфного окружности  $S^1$ . Гомеоморфизм  $\beta$  продолжим до изоморфизмов тривиальных расслоений  $\beta_1: \xi_2 / (P^k \setminus \alpha(\bar{M})) \rightarrow \xi_2 / (P^k \setminus \bar{M})$ ,  $\beta_2: \xi_2 / (\alpha(\bar{M})) \rightarrow \xi_2 / (\bar{M})$ . Это можно сделать, так как  $\beta(\bar{M}) = \bar{M}$  и  $\beta(P^k \setminus M) = P^k \setminus M$ .

Определим отображение  $\mu_{12}^*: \xi_2 / \delta(P^k \setminus M) \rightarrow \xi_2 / \delta(\bar{M})$  так, чтобы следующая диаграмма была коммутативна:

$$\begin{array}{ccc} \xi_2 / (P^k \setminus \alpha(M)) & \xrightarrow{\mu_{12}} & \xi_2 / (\alpha(\bar{M})) \\ \downarrow \beta_1 & & \downarrow \beta_2 \\ \xi_2 / (P^k \setminus M) & \xrightarrow{\mu_{12}^*} & \xi_2 / \bar{M} \end{array} .$$

Тогда расслоение  $\beta_1(\xi_2 / (P^k \setminus \alpha(M))) \cup_{\mu_{12}^*} \beta_2(\xi_2 / \alpha(\bar{M}))$  изоморфно расслоению  $\xi_2$ , обозначим этот изоморфизм через  $\beta_3$ . Изоморфизм  $\beta_3 \circ \gamma: \xi_1 \rightarrow \xi_2$  обладает тем свойством, что индуцирует такой гомеоморфизм  $\beta \circ \alpha: P^k \rightarrow P^k$  баз расслоений, что  $\beta \circ \alpha(\delta(\bar{M})) = \delta(\bar{M})$ . Так как ограничение  $\xi_1 / (P^k \setminus M)$  тривиально, то изоморфизм  $\beta_3 \circ \gamma$  задает отображение  $\beta_5 \in C(P^k \setminus M, \text{Aut}(n))$ ,  $\beta_5(x)$  переводит слой  $F_x$  в слой  $\beta_3 \circ \gamma(F_x)$ ,  $x \in P^k \setminus M$ . Если  $x \in \bar{M}$ , то  $\beta_3 \circ \gamma$  задает отображение  $\beta_6 \in C(\bar{M}, \text{Aut}(n))$ ,  $\beta_6(x)$  переводит слой  $F_x$  в слой  $\beta_3 \circ \gamma(F_x)$ ,  $x \in \bar{M}$ .

Тогда  $\gamma_4(\beta \circ \alpha(x))\beta_5(x) = \beta_6(x) \cdot \gamma_3(x)$ . Следовательно,

$$\theta([\gamma_4(\beta \circ \alpha(x))]) + \theta([\beta_5(x)]) = \theta([\beta_6(x)]) + \theta([\gamma_3(x)]). \quad (1)$$

Так как отображения  $\beta_5(x)$  и  $\beta_6(x)$  заданы на множествах  $P^k \setminus M$  и  $\bar{M}$ , то в силу леммы 3,  $\theta([\beta_5(x)]) = 2r$  ( $r = 0$  при  $k = 1$  в силу леммы 2),  $\theta([\beta_6(x)]) = 2m$ ,  $r, m \in Z$ .

Равенство (1) равносильно равенству:

$$\theta([\gamma_4(\beta \circ \alpha(x))]) = \theta([\gamma_3(x)]) + 2(m - r). \quad (2)$$

Если  $\beta \circ \alpha$  меняет ориентацию окружности  $\delta(\bar{M})$ , то  $\theta([\gamma_4(\beta \circ \alpha(x))]) = -\theta([\gamma_4(x)])$ , если же  $\beta \circ \alpha$  не меняет ориентацию окружности  $\delta(\bar{M})$ , то  $\theta([\gamma_4(\beta \circ \alpha(x))]) = \theta([\gamma_4(x)])$ . Итак, получим, что  $\theta([\gamma_4]) = \pm\theta([\gamma_3]) + 2(m - r)$ .

Обратно, пусть  $\theta([\gamma_4]) = \pm\theta([\gamma_3]) + 2s, s \in Z$ . Рассмотрим сначала случай  $\theta([\gamma_4]) = -\theta([\gamma_3]) + 2s$ . Пусть  $\alpha: P^k \rightarrow P^k$  – некоторый гомеоморфизм такой, что  $\alpha(\bar{M}) = \bar{M}$  и меняющий ориентацию окружности  $S^1 = \delta(\bar{M})$ . Построим изоморфизм ограничений расслоений:  $\gamma_1: \xi_1 / (P^k \setminus M) \rightarrow \xi_2 / (P^k \setminus M)$  по правилу:  $\gamma_1 = v_1^{-1} \circ u_1$ , где  $v_1: \xi_2 / (P^k \setminus M) \rightarrow (P^k \setminus M) \times \text{Mat}(n)$  – изоморфизм расслоений, за-

дающий гомеоморфизм  $\alpha$  на  $P^k \setminus M$ . Изоморфизм  $u_1 : \xi_1 / (P^k \setminus M) \rightarrow (P^k \setminus M) \times \text{Mat}(n)$  задает тождественный гомеоморфизм  $I$  баз расслоений. Отображение  $\eta_{12} \circ \gamma_1 \circ \mu_{12}^{-1} : \xi_1 / \delta \bar{M} \rightarrow \xi_2 / \delta \bar{M}$  является изоморфизмом тривиальных расслоений, задается отображением  $(\gamma_4(\alpha x))\gamma_5(x)(\gamma_3(x))^{-1} \in C(S^1, \text{Aut}(n))$ , где  $\gamma_5 \in C(P^k \setminus M, \text{Aut}(n))$  задается изоморфизмом  $\gamma_1$ . Так как  $\theta([\gamma_4(\alpha x) \cdot \gamma_5(x) \cdot (\gamma_3(x))^{-1}]) = \theta([\gamma_4(\alpha x)]) + \theta([\gamma_5(x)]) + \theta([\gamma_3(x)]^{-1}) = -\theta([\gamma_4]) - \theta([\gamma_3]) + 2r = 2m + 2l + 2r$ , в силу того, что  $\theta([\gamma_4(\alpha x)]) = -\theta([\gamma_4(x)])$ , так как гомеоморфизм  $\alpha$  меняет ориентацию окружности  $S^1 = \delta M$ . Класс  $\theta([\gamma_5(x)]) = 2r$ ,  $r \in Z$  в силу леммы 3,  $\theta([\gamma_3(x)]^{-1}) = -\theta([\gamma_3(x)])$ . Поэтому, отображение  $\gamma_4(\alpha x) \cdot \gamma_5(x) \cdot (\gamma_3(x))^{-1}$  можно продлить до  $\gamma_7 \in C(\bar{M}, \text{Aut}(n))$  в силу леммы 3.

Зададим изоморфизм  $\gamma_2 : \xi_1 / \bar{M} \rightarrow \xi_2 / \bar{M}$  по правилу  $(x, y) \rightarrow (\alpha(x); \gamma_7(x) \cdot y)$ ,  $(x \in \bar{M}, y \in F_x)$ . Этот изоморфизм согласован с условиями склейки расслоений  $\xi_1$  и  $\xi_2$ , значит, отображение  $\gamma : \xi_1 \rightarrow \xi_2$ , заданное на  $\xi_1 / (P^k \setminus M)$  изоморфизмом  $\gamma_1$ , а на  $\xi_1 / \bar{M}$  изоморфизмом  $\gamma_2$ , является изоморфизмом расслоений. Этот изоморфизм расслоений и требовалось построить.

Если же  $\theta([\gamma_4]) = \theta([\gamma_3])$ , то положим гомеоморфизм  $\alpha$  равным тождественному  $I : P^k \rightarrow P^k$ . Рассуждая так же, как в предыдущем случае, получим отображение  $\gamma_4(\alpha x) \cdot \gamma_5(x) \cdot (\gamma_3(x))^{-1} \in C(S^1, \text{Aut}(n))$ , класс которого  $\theta([\gamma_4(\alpha x) \cdot \gamma_5(x) \cdot (\gamma_3(x))^{-1}]) = \theta([\gamma_4(\alpha x)]) + \theta([\gamma_5(x)]) + \theta([\gamma_3(x)]^{-1}) = \theta([\gamma_4]) - \theta([\gamma_3]) + 2r = 2m + 2l + 2r$ .

Значит, отображение  $\gamma_4(\alpha x) \cdot \gamma_5(x) \cdot (\gamma_3(x))^{-1}$  можно продолжить до  $\gamma_7 \in C(\bar{M}, \text{Aut}(n))$ , которое задает изоморфизм  $\gamma_2 : \xi_1 / \bar{M} \rightarrow \xi_2 / \bar{M}$ , согласованный с условиями склейки расслоений  $\xi_1$  и  $\xi_2$  и изоморфизмом  $\gamma_1$ .

Итак,  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  задают изоморфизм  $\gamma : \xi_1 \rightarrow \xi_2$ , что и требовалось доказать. Теорема доказана.

### Литература

1. Щ у к и н М. В. // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2010. № 2. С. 12–17.
2. М а с с и У. Алгебраическая топология. М., 1977.
3. А n t o n e v i c h А., К r u p n i k N. // Integral Equations and Operator Theory. 2000. Vol. 38. P. 172–189.

*M. V. SHCHUKIN*

### ***n*-HOMOGENEOUS $C^*$ -ALGEBRAS WITH THE PRIMITIVE IDEAL HOMEOMORPHIC TO A COMPACT TWO-DIMENSIONAL NO-ORIENTED MANIFOLD**

#### Summary

In the present work we study the structure of the algebraic bundles over two-dimensional compact no-oriented manifolds. As a result, we describe the structure of  $n$ -homogeneous  $C^*$ -algebras over two-dimensional compact manifolds.

УДК 519.2

Ю. С. ХАРИН, И. А. БОДЯГИН

## ОБ ОПТИМАЛЬНОМ ПРОГНОЗИРОВАНИИ АВТОРЕГРЕССИОННЫХ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ ПРИ НАЛИЧИИ ИНТЕРВАЛЬНОГО ЦЕНЗУРИРОВАНИЯ

Белорусский государственный университет

(Поступила в редакцию)

**Введение.** Задача статистического прогнозирования будущих значений временного ряда по имеющимся наблюдениям возникает во многих приложениях: в медицине, экономике, метеорологии, технике, астрономии [1]. Для описания временных рядов с зависимыми наблюдениями и прогнозирования будущих значений широко применяется модель авторегрессии [1, 2]. Однако на практике значения временного ряда часто наблюдаются с искажениями различных типов: выбросы, пропуски, гетероскедастичность [3, 4], цензурирование [5] и др.; обзор типов искажений и их математические описания представлены в [3]. Цензурирование временного ряда заключается в том, что часть наблюдений ряда известна точно, а об остальных наблюдениях известно лишь, что они принадлежат некоторым числовым интервалам. Такая ситуация может возникать из-за наличия у приборов конечных пределов измерения, высокой стоимости проведения точных измерений, сбоев в работе оборудования и других причин.

В литературе имеется большое количество работ, посвященных задачам статистического оценивания модельных параметров при наличии цензурирования [5, 6, 7]. Однако статистическое прогнозирование будущих значений цензурированных временных рядов остается мало изученным и актуальным направлением исследований.

**1. Математическая модель.** Пусть временной ряд  $x_t$  описывается моделью  $AR(p)$  авторегрессии порядка  $p \in \mathbb{N}$  (см., например, [1]):

$$x_t = \sum_{i=1}^p \theta_i x_{t-i} + u_t, \quad t \in \mathbb{Z}, \quad (1)$$

где  $\{\theta_i\}_{i=1}^p$  – коэффициенты авторегрессии такие, что все корни порождающего характеристического многочлена  $z^p - \sum_{j=1}^p \theta_j z^{p-j}$  лежат внутри единичного круга;  $\{u_t\}$  – независимые в совокупности одинаково распределенные случайные величины, имеющие нормальный закон распределения вероятностей:  $L\{u_t\} = N(0, \sigma^2)$ .

Пусть вместо значений временного ряда наблюдаются случайные события:

$$A_t^* = \{x_t \in A_t\}, \quad t \in \{1, \dots, T\}, \quad (2)$$

где  $\{A_t\}$  – заданные борелевские множества,  $T > p$  – длительность наблюдения. В данной работе рассматриваются два случая: 1)  $A_t$  состоит из одного элемента ( $A_t = \{x_t\}$ ), тогда значение  $x_t$  известно точно; 2)  $A_t$  является числовым интервалом ( $A_t = [a_t, b_t)$ ,  $a_t < b_t$ ), тогда имеет место интервальное цензурирование значения  $x_t$ , а интервал  $[a_t, b_t)$  называется интервалом цензурирования. Статистическое прогнозирование будущего значения  $x_{T+1} \in \mathbb{R}$  заключается в вычислении оценки  $\hat{x}_{T+1} \in \mathbb{R}$  на основе имеющейся информации о наступлении событий  $A_1^*, \dots, A_T^*$ . Иногда возможна ситуация, когда относительно будущего значения  $x_{T+1}$  также известна некото-

рая дополнительная информация  $A_{T+1}^* = \{x_{T+1} \in A_{T+1}\}$ . Если же дополнительная информация о значении  $x_{T+1}$  отсутствует, то будем полагать, что  $A_{T+1} = (-\infty, +\infty)$ .

Прогнозирующая статистика для  $x_{T+1}$  в будущий момент времени  $t = T + 1$  является числовой функцией наблюдаемых событий:

$$\hat{x}_{T+1} = f(A_{T+1}^*, A_T^*, \dots, A_1^*). \quad (3)$$

Погрешность прогнозирования будем характеризовать условным риском прогнозирования

$$r_T(f) = E\{(x_{T+1} - \hat{x}_{T+1})^2 \mid A_{T+1}^*, A_T^*, \dots, A_1^*\} \geq 0, \quad (4)$$

т. е. среднеквадратической ошибкой прогнозирования.

Рассмотрим задачу построения оптимальной прогнозирующей статистики  $f_0(\cdot)$ , минимизирующей условный риск (4), в случае известных параметров модели (1), (2):

$$r_T(f_0) = \inf_{f(\cdot)} r_T(f). \quad (5)$$

## 2. Общие результаты для модели AP(p).

**Т е о р е м а 1.** Если временной ряд  $x_t$  наблюдается при наличии цензурирования общего вида (2), то среди всех прогнозирующих статистик вида (3) оптимальная по критерию минимума риска (5) прогнозирующая статистика определяется условным математическим ожиданием:

$$\hat{x}_{T+1} = f_0(A_{T+1}^*, \dots, A_1^*) = E\{x_{T+1} \mid A_{T+1}^*, A_T^*, \dots, A_1^*\}, \quad r_T(f_0) = D\{x_{T+1} \mid A_{T+1}^*, A_T^*, \dots, A_1^*\}. \quad (6)$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Преобразуем условный риск (4):

$$\begin{aligned} r_T(f) &= E\{(x_{T+1} - \hat{x}_{T+1})^2 \mid A_{T+1}^*, \dots, A_1^*\} = E\{(x_{T+1} - f(A_{T+1}^*, \dots, A_1^*))^2 \mid A_{T+1}^*, \dots, A_1^*\} = \\ &= E\{((x_{T+1} - E\{x_{T+1} \mid A_{T+1}^*, \dots, A_1^*\}) + (E\{x_{T+1} \mid A_{T+1}^*, \dots, A_1^*\} - f(A_{T+1}^*, \dots, A_1^*)))^2 \mid A_{T+1}^*, \dots, A_1^*\}. \end{aligned}$$

Заметим, что второе слагаемое зависит только от  $A_{T+1}^*, \dots, A_1^*$ :

$$\begin{aligned} r_T(f) &= E\{(x_{T+1} - E\{x_{T+1} \mid A_{T+1}^*, \dots, A_1^*\})^2 \mid A_{T+1}^*, \dots, A_1^*\} + (E\{x_{T+1} \mid A_{T+1}^*, \dots, A_1^*\} - f(A_{T+1}^*, \dots, A_1^*))^2 + \\ &+ 2E\{(x_{T+1} - E\{x_{T+1} \mid A_{T+1}^*, \dots, A_1^*\}) \mid A_{T+1}^*, \dots, A_1^*\} (E\{x_{T+1} \mid A_{T+1}^*, \dots, A_1^*\} - f(A_{T+1}^*, \dots, A_1^*)) = \\ &= D\{x_{T+1} \mid A_{T+1}^*, \dots, A_1^*\} + (E\{x_{T+1} \mid A_{T+1}^*, \dots, A_1^*\} - f(A_{T+1}^*, \dots, A_1^*))^2 \rightarrow \min_{f(\cdot)}, \end{aligned}$$

Из этого представления следует, что (6) есть решение задачи (5). ■

**С л е д с т в и е 1.** Если  $A_{T+1} = (-\infty, +\infty)$ , то оптимальная прогнозирующая статистика

$$\hat{x}_{T+1} = E\{x_{T+1} \mid A_T^*, A_{T-1}^*, \dots, A_1^*\}, \quad \text{а ее риск } r(T) = D\{x_{T+1} \mid A_T^*, A_{T-1}^*, \dots, A_1^*\}.$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о** явно следует из свойств математического ожидания и теоремы 1. ■

Это следствие является обобщением известного результата [2] в ситуации, когда  $A_1, \dots, A_T$  — одноточечные множества, т. е. цензурирование отсутствует.

Рассмотрим случай, когда цензурированы только последние  $q$ ,  $0 \leq q \leq T$ , значений временного ряда, а остальные  $T - q$  наблюдений известны точно.

**Л е м м а 1.** Пусть наблюдаются значения  $x_1, \dots, x_{T-q}$  и случайные события  $A_{T-q+1}^*, \dots, A_T^*$ . Тогда справедливо следующее выражение для условной плотности распределения вероятностей

$$p(x_T | A_T^*, \dots, A_{T-q+1}^*, x_{T-q}, \dots, x_1) = \frac{\int_{A_{T-1}} \dots \int_{A_{T-q+1}} 1_{A_T}(x_T) p(x_T, \dots, x_{T-q+1} | x_{T-q}, \dots, x_1) dx_{T-q+1} \dots dx_{T-1}}{\int_{A_T} \dots \int_{A_{T-q+1}} p(x_T, \dots, x_{T-q+1} | x_{T-q}, \dots, x_1) dx_{T-q+1} \dots dx_T},$$

где  $1_A(x) = \{1, x \in A; 0, \text{ иначе}\}$  – индикаторная функция множества  $A$ .

**Доказательство.** Преобразуем условную плотность распределения вероятностей:

$$p(x_T | A_T^*, \dots, A_{T-q+1}^*, x_{T-q}, \dots, x_1) = \frac{p(x_T, A_T^*, \dots, A_{T-q+1}^*, x_{T-q}, \dots, x_1)}{p(A_T^*, \dots, A_{T-q+1}^*, x_{T-q}, \dots, x_1)}$$

$$\frac{p(x_T, A_T^*, \dots, A_{T-q+1}^* | x_{T-q}, \dots, x_1)}{P(A_T^*, \dots, A_{T-q+1}^* | x_{T-q}, \dots, x_1)} = \frac{\int_{A_{T-1}} \dots \int_{A_{T-q+1}} 1_{A_T}(x_T) p(x_T, \dots, x_{T-q+1} | x_{T-q}, \dots, x_1) dx_{T-q+1} \dots dx_{T-1}}{\int_{A_T} \dots \int_{A_{T-q+1}} p(x_T, \dots, x_{T-q+1} | x_{T-q}, \dots, x_1) dx_{T-q+1} \dots dx_T}.$$

Обозначим:  $\mu(t, m) = \theta_1 x_{t-1} + \dots + \theta_m x_{t-m} = \sum_{i=1}^m \theta_i x_{t-i}$ ,  $t, m \in \mathbb{N}$ .

**Теорема 2.** Пусть в рамках модели (1), (2) наблюдаются значения  $x_1, \dots, x_{T-q}$  и случайные события  $A_{T-q+1}^* = \{x_{T-q+1} \in [a_{T-q+1}, b_{T-q+1}]\}$ , ...,  $A_T^* = \{x_T \in [a_T, b_T]\}$ . Тогда оптимальная прогнозирующая статистика (6) имеет вид:

$$\hat{x}_{T+1} = \frac{\int_{a_T}^{b_T} \dots \int_{a_{T-q+1}}^{b_{T-q+1}} \mu(T+1, p) p(x_T, \dots, x_{T-q+1} | x_{T-q}, \dots, x_1) dx_{T-q+1} \dots dx_T}{\int_{a_T}^{b_T} \dots \int_{a_{T-q+1}}^{b_{T-q+1}} p(x_T, \dots, x_{T-q+1} | x_{T-q}, \dots, x_1) dx_{T-q+1} \dots dx_T}. \quad (7)$$

**Доказательство.** Оценку (6) в силу (1) можно представить следующим образом:

$$\hat{x}_{T+1} = E\{x_{T+1} | A_T^*, \dots, A_{T-q+1}^*, x_{T-q}, \dots, x_1\} = E\left\{\sum_{i=1}^p \theta_i x_{T+1-i} + u_{T+1} | A_T^*, \dots, A_{T-q+1}^*, x_{T-q}, \dots, x_1\right\} =$$

$$E\{\mu(T+1, p) | A_T^*, \dots, A_{T-q+1}^*, x_{T-q}, \dots, x_1\},$$

так как случайная величина  $u_{T+1}$  не зависит от  $A_T^*, \dots, A_{T-q+1}^*, x_{T-q}, \dots, x_1$  и  $E\{u_{T+1}\} = 0$ . Вычислив полученное математическое ожидание и воспользовавшись леммой 1, получим требуемое равенство (7). ■

Введем обозначения:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad \Phi(x) = \int_{-\infty}^x \varphi(t) dt.$$

соответственно плотность и функция распределения вероятностей стандартного нормального закона  $N(0,1)$ ;

$$n(x | \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sigma} \varphi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right).$$

плотность распределения вероятностей нормального закона с параметрами  $\mu$  и  $\sigma^2$ ;

$$\Psi(x, y, m, s, u, v) = \frac{u \varphi\left(\frac{x-m}{s}\right) - v \varphi\left(\frac{y-m}{s}\right)}{\Phi\left(\frac{y-m}{s}\right) - \Phi\left(\frac{x-m}{s}\right)}, \quad x, y, m, s, u, v \in \mathbb{R}.$$

Из [8] имеем равенства:

$$\int_a^b n(x|\mu, \sigma^2) dx = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right), \quad (8)$$

$$\int_a^b x n(x|\mu, \sigma^2) dx = \sigma\left(\varphi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right) - \varphi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right)\right) + \mu\left(\Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)\right), \quad (9)$$

$$\int_a^b x^2 n(x|\mu, \sigma^2) dx = \sigma\left((a+\mu)\varphi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right) - (b+\mu)\varphi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right)\right) + (\sigma^2 + \mu^2)\left(\Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)\right). \quad (10)$$

**С л е д с т в и е 2.** Пусть в рамках модели (1), (2) наблюдаются значения  $x_1, \dots, x_{T-1}$  и случайное событие  $A_T^* = \{x_T \in [a_T, b_T]\}$  ( $q=1$ ). Тогда оптимальная прогнозирующая статистика (4) имеет вид:  $\hat{x}_{T+1} = \theta_1 \mu(T, p) + \sum_{i=2}^p \theta_i x_{T-i+1} + \theta_1 \sigma \Psi(a_T, b_T, \mu(T, p), \sigma, 1, 1)$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Известно [1], что для модели AP( $p$ ):

$$p(x_T | x_{T-1}, \dots, x_1) = n(x_T | \mu(T, p), \sigma^2). \quad (11)$$

Из теоремы 2 при  $q=1$  имеем:

$$\hat{x}_{T+1} = \frac{\int_{a_T}^{b_T} \mu(T+1, p) p(x_T | x_{T-1}, \dots, x_1) dx_T}{\int_{a_T}^{b_T} p(x_T | x_{T-1}, \dots, x_1) dx_T} = \frac{\theta_1 \int_{a_T}^{b_T} x_T n(x_T | \mu(T, p), \sigma^2) dx_T}{\int_{a_T}^{b_T} n(x_T | \mu(T, p), \sigma^2) dx_T} + \sum_{i=2}^p \theta_i x_{T-i+1},$$

Воспользовавшись (8), (9), получим требуемое соотношение. ■

**С л е д с т в и е 3.** Пусть в рамках модели (1), (2) наблюдаются все значения  $x_1, \dots, x_T$  и случайное событие  $A_{T+1}^* = \{x_{T+1} \in [a_{T+1}, b_{T+1}]\}$ . Тогда оптимальная прогнозирующая статистика (4) имеет вид:

$$\hat{x}_{T+1} = \mu(T+1, p) + \sigma \Psi(a_{T+1}, b_{T+1}, \mu(T+1, p), \sigma, 1, 1). \quad (12)$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Воспользовавшись теоремой 1, леммой 1 и (11), получим:

$$\hat{x}_{T+1} = \frac{\int_{a_{T+1}}^{b_{T+1}} x_{T+1} p(x_{T+1} | x_T, \dots, x_1) dx_{T+1}}{\int_{a_{T+1}}^{b_{T+1}} p(x_{T+1} | x_T, \dots, x_1) dx_{T+1}} = \frac{\int_{a_{T+1}}^{b_{T+1}} x_{T+1} n(x_{T+1} | \mu(T+1, p), \sigma^2) dx_{T+1}}{\int_{a_{T+1}}^{b_{T+1}} n(x_{T+1} | \mu(T+1, p), \sigma^2) dx_{T+1}}.$$

Применяя теперь (8) и (9), получим требуемое соотношение (12). ■

Известно [1], что в случае «полных данных» и отсутствия дополнительной информации об  $x_{T+1}$  оптимальная прогнозирующая статистика имеет вид  $\hat{x}_{T+1} = \mu(T+1, p)$ . Таким образом, второе слагаемое в (12) можно интерпретировать, как поправку на дополнительную информацию о том, что  $x_{T+1} \in [a_{T+1}, b_{T+1}]$ .

Если среди последних  $q$  значений временного ряда имеются не только цензурированные наблюдения, но и  $k$  ( $1 \leq k \leq q$ ) известных наблюдений  $x_{l_1}, \dots, x_{l_k}$  ( $T-q+1 \leq l_1 < \dots < l_k \leq T$ ), то оптимальная прогнозирующая статистика может быть получена из (7) предельным переходом  $b_{l_1} \rightarrow a_{l_1}, \dots, b_{l_k} \rightarrow a_{l_k}$ .

**3. Случай авторегрессии первого порядка.** Рассмотрим частный случай модели (1) – модель авторегрессии первого порядка  $p = 1$  (АР(1)):

$$x_t = \theta x_{t-1} + u_t, \quad t \in Z, \quad (13)$$

причем предполагается, что параметры модели  $\theta$  и  $\sigma$  известны. Известно [1], что временной ряд, описываемый моделью (13), является марковским временным рядом (МВР).

**Л е м м а 2.** Для МВР  $x_t$  при любых  $T > q \geq 1$  справедливо соотношение:

$$p(x_T, \dots, x_{T-q+1} | x_{T-q}, \dots, x_1) = p(x_T, \dots, x_{T-q+1} | x_{T-q}), \quad x_1, \dots, x_T \in R^1.$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Воспользуемся известными равенствами для МВР:

$$p(x_T, \dots, x_1) = p(x_1) \prod_{t=2}^T p(x_t | x_{t-1}), \quad p(x_T, \dots, x_{T-q}) = p(x_{T-q}) \prod_{t=T-q+1}^T p(x_t | x_{t-1}).$$

Преобразуем условную плотность распределения вероятностей:

$$p(x_T, \dots, x_{T-q+1} | x_{T-q}, \dots, x_1) = \left( p(x_1) \prod_{t=2}^T p(x_t | x_{t-1}) \right) \left( p(x_1) \prod_{t=2}^{T-q} p(x_t | x_{t-1}) \right)^{-1} = \prod_{t=T-q+1}^T p(x_t | x_{t-1}) = \left( p(x_{T-q}) \prod_{t=T-q+1}^T p(x_t | x_{t-1}) \right) (p(x_{T-q}))^{-1} = p(x_T, \dots, x_{T-q+1} | x_{T-q}). \quad \blacksquare$$

**Л е м м а 3.** Если  $x_t$  – произвольный МВР, то условная плотность распределения вероятностей наблюдения  $x_T$  при условии, что зарегистрированы случайные события  $A_T^*, \dots, A_{T-q+1}^*$  и наблюдения  $x_{T-q}, \dots, x_1$ , не зависит от «дальней предыстории»  $\{x_{T-q-1}, \dots, x_1\}$ :

$$p(x_T | A_T^*, \dots, A_{T-q+1}^*, x_{T-q}, \dots, x_1) = p(x_T | A_T^*, \dots, A_{T-q+1}^*, x_{T-q}).$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Согласно лемме 1:

$$p(x_T | A_T^*, \dots, A_{T-q+1}^*, x_{T-q}, \dots, x_1) = \frac{\int \dots \int_{A_{T-q+1}} 1_{A_T}(x_T) p(x_T, \dots, x_{T-q+1} | x_{T-q}, \dots, x_1) dx_{T-q+1} \dots dx_{T-1}}{\int \dots \int_{A_T} p(x_T, \dots, x_{T-q+1} | x_{T-q}, \dots, x_1) dx_{T-q+1} \dots dx_T}.$$

Далее, применив лемму 2, получим требуемое соотношение.  $\blacksquare$

Примем обозначения:

$$I_1(x_{T-m}; l, m) = \int_{a_T}^{b_T} \dots \int_{a_{T-m+1}}^{b_{T-m+1}} x_T^l p(x_T, \dots, x_{T-m+1} | x_{T-m}) dx_{T-m+1} \dots dx_T,$$

$$I_2(l, m) = E \{ I_1(x_{T-m}; l, m) \}, \quad m \in N, \quad l \in \{0, 1, 2\}.$$

**Т е о р е м а 3.** Пусть для модели (13) наблюдаются значения  $x_1, \dots, x_{T-q}$  и случайные события  $A_{T-q+1}^*, \dots, A_T^*$ ,  $0 < q < T$ . Тогда оптимальная прогнозирующая статистика и ее условный риск имеют вид:

$$\hat{x}_{T+1} = f_0(A_T^*, \dots, A_{T-q+1}^*, x_{T-q}) = \theta \frac{I_1(x_{T-q}; 1, q)}{I_1(x_{T-q}; 0, q)}, \quad (14)$$

$$r_T(f_0) = \sigma^2 + \theta^2 \left( \frac{I_1(x_{T-q}; 2, q)}{I_1(x_{T-q}; 0, q)} - \left( \frac{I_1(x_{T-q}; 1, q)}{I_1(x_{T-q}; 0, q)} \right)^2 \right) \geq \sigma^2. \quad (15)$$

**Доказательство.** Оптимальная прогнозирующая статистика (14) находится по теореме 2, с учетом (11) и (13). Вычислим условный риск прогнозирования. Согласно теореме 1, учитывая независимость  $u_{T+1}$  от  $A_T^*, \dots, A_{T-q+1}^*, x_{T-q}$  и  $E\{u_{T+1}\} = 0$ , получим:

$$r_T(f_0) = D\{x_{T+1} \mid A_T^*, \dots, A_{T-q+1}^*, x_{T-q}\} = E\{(x_{T+1} - \hat{x}_{T+1})^2 \mid A_T^*, \dots, A_{T-q+1}^*, x_{T-q}\} =$$

$$E\left\{\left(u_{T+1} + \theta\left(x_T - \frac{I_1(x_{T-q}; 1, q)}{I_1(x_{T-q}; 0, q)}\right)\right)^2 \mid A_T^*, \dots, A_{T-q+1}^*, x_{T-q}\right\} =$$

$$\sigma^2 + \theta^2 \left( E\{x_T^2 \mid A_T^*, \dots, A_{T-q+1}^*, x_{T-q}\} + \left(\frac{I_1(x_{T-q}; 1, q)}{I_1(x_{T-q}; 0, q)}\right)^2 - 2\frac{I_1(x_{T-q}; 1, q)}{I_1(x_{T-q}; 0, q)} E\{x_T \mid A_T^*, \dots, A_{T-q+1}^*, x_{T-q}\} \right).$$

Согласно лемме 2 и введенным обозначениям  $E\{x_T \mid A_T^*, \dots, A_{T-q+1}^*, x_{T-q}\} = \frac{I_1(x_{T-q}; 1, q)}{I_1(x_{T-q}; 0, q)}$ ,  $E\{x_T^2 \mid A_T^*, \dots, A_{T-q+1}^*, x_{T-q}\} = \frac{I_1(x_{T-q}; 2, q)}{I_1(x_{T-q}; 0, q)}$ , откуда следует (15). ■

Исследуем ряд частных случаев результатов теоремы 3.

**Следствие 4.** Пусть выполнены условия теоремы 3 и  $a_T \rightarrow -\infty, \dots, a_{T-q+1} \rightarrow -\infty, b_T \rightarrow +\infty, \dots, b_{T-q+1} \rightarrow +\infty$ , тогда оптимальная прогнозирующая статистика и ее условный риск имеют вид  $\hat{x}_{T+1} = f_0(A_T^*, \dots, A_{T-q+1}^*, x_{T-q}) = \theta^{q+1} x_{T-q}$ ,  $r_T(f_0) = \sigma^2 \sum_{i=0}^q \theta^{2i}$ .

**Доказательство.** Учитывая условия следствия и условие нормировки многомерной плотности распределения вероятностей, имеем:  $I_1(x_{T-q}; 0, q) = 1$ . Тогда в силу теоремы 3 и марковости  $x_t$  находим

$$\hat{x}_{T+1} = \theta I_1(x_{T-q}; 1, q) = \theta \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} x_T p(x_T, \dots, x_{T-q+1} \mid x_{T-q}) dx_{T-q+1} \dots dx_T =$$

$$\theta \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} x_T p(x_T \mid x_{T-1}) \dots p(x_{T-q+1} \mid x_{T-q}) dx_{T-q+1} \dots dx_T,$$

откуда, учитывая (11) и свойства нормального закона распределения вероятностей [9], получаем требуемое выражение для оптимальной прогнозирующей статистики:

$$\hat{x}_{T+1} = \theta \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} x_T n(x_T \mid \theta x_{T-1}, \sigma^2) \dots n(x_{T-q+1} \mid \theta x_{T-q}, \sigma^2) dx_{T-q+1} \dots dx_T =$$

$$\theta^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} x_{T-1} n(x_{T-1} \mid \theta x_{T-2}, \sigma^2) \dots n(x_{T-q+1} \mid \theta x_{T-q}, \sigma^2) dx_{T-q+1} \dots dx_{T-1} = \dots = \theta^{q+1} x_{T-q}.$$

Вычислим условный риск, для чего вычислим значение следующего выражения:

$$I_1(x_{T-q}; 2, q) = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} (x_T - \theta x_{T-1} + \theta x_{T-1})^2 n(x_T \mid \theta x_{T-1}, \sigma^2) \dots n(x_{T-q+1} \mid \theta x_{T-q}, \sigma^2) dx_{T-q+1} \dots dx_T =$$

$$\sigma^2 + \theta^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \dots \int_{-\infty}^{+\infty} x_{T-1}^2 n(x_{T-1} \mid \theta x_{T-2}, \sigma^2) \dots n(x_{T-q+1} \mid \theta x_{T-q}, \sigma^2) dx_{T-q+1} \dots dx_{T-1} = \dots = \sigma^2 \sum_{i=0}^{q-1} \theta^{2i} + \theta^{2q} x_{T-q}^2.$$

Подставляя найденное значение в (15), получим доказываемое выражение риска. ■

Условия следствия 4 означают, что в пределе в моменты времени  $T, \dots, T-q+1$  наблюдения  $x_T, \dots, x_{T-q+1}$  пропущены. Такая ситуация является ранее изученной и для нее получены результаты (например, в [10]), которые совпадают с результатами следствия 4.

**С л е д с т в и е 5.** Пусть выполнены условия теоремы 3 и  $a_T \rightarrow b_T, \dots, a_{T-q+1} \rightarrow b_{T-q+1}$ , тогда оптимальная прогнозирующая статистика и ее условный риск имеют вид:

$$\hat{x}_{T+1} = f_0(x_T) = \theta x_T, \quad r_T(f_0) = \sigma^2.$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Воспользуемся предельными соотношениями, справедливыми для непрерывно-дифференцируемой функции  $p(x)$ :

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\int_a^{a+\tau} x^k p(x) dx}{\int_a^{a+\tau} p(x) dx} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{(\int_a^{a+\tau} x^k p(x) dx)'_{\tau}}{(\int_a^{a+\tau} p(x) dx)'_{\tau}} = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{(a+\tau)^k p(a+\tau)}{p(a+\tau)} = a^k, \quad k \in \{1, 2\}, \quad (16)$$

для получения которых используются правило Лопиталья и формула Лейбница. Отметим, что в условиях следствия  $x_T \rightarrow a_T$ , т. к.  $x_T \in [a_T, b_T)$  и  $a_T \rightarrow b_T$ . Применяя (16) к (14), (15), получим требуемые соотношения для оптимальной прогнозирующей статистики и ее риска. ■

Условия следствия 5 означают, что в пределе известны значения  $x_T = a_T = b_T, \dots, x_{T-q+1} = a_{T-q+1} = b_{T-q+1}$ , т. е. имеет место случай «полных данных». Для этого случая ранее получены результаты (например, в [1]), которые совпадают с результатами следствия 5.

**С л е д с т в и е 6.** Пусть наблюдаются случайные события  $A_1^*, \dots, A_T^*$  ( $q=T$ ), т. е. все  $T$  наблюдений цензурированы. Тогда оптимальная прогнозирующая статистика и ее условный риск имеют вид:

$$\hat{x}_{T+1} = f_0(A_T^*, \dots, A_1^*) = \theta \frac{I_2(1, T)}{I_2(0, T)}, \quad r_T(f_0) = \sigma^2 + \theta^2 \left( \frac{I_2(2, T)}{I_2(0, T)} - \left( \frac{I_2(1, T)}{I_2(0, T)} \right)^2 \right) \geq \sigma^2.$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о** проводится аналогично доказательству теоремы 3. ■

Для случая  $q=1$  исследуем зависимость условного риска прогнозирования от длины интервала цензурирования и проведем сравнение оптимальной прогнозирующей статистики  $f_0(\cdot)$  с прогнозирующими статистиками, часто используемыми на практике. В этом случае последнее значение  $x_T$  временного ряда цензурировано интервалом  $[a_T, b_T)$ , а предпоследнее значение  $x_{T-1}$  известно точно. Поскольку в данном случае результат зависит только от одного интервала цензурирования  $A_T = [a_T, b_T)$ , то для упрощения обозначений вместо  $a_T$  и  $b_T$  будем писать  $a$  и  $b$ .

**Т е о р е м а 4.** Пусть для модели (13) наблюдаются значение  $x_{T-1}$  и случайное событие  $A_T^* = \{x_T \in [a, b)\}$ , тогда оптимальная прогнозирующая статистика и ее условный риск имеют вид:

$$\hat{x}_{T+1} = f_0(A_T^*, x_{T-1}) = \theta^2 x_{T-1} + \theta \sigma \Psi(a, b, \theta x_{T-1}, \sigma, 1, 1), \quad (17)$$

$$r_T(f_0) = (1 + \theta^2) \sigma^2 - (\theta \sigma \Psi(a, b, \theta x_{T-1}, \sigma, 1, 1))^2 + \theta^2 \sigma \Psi(a, b, \theta x_{T-1}, \sigma, a - \theta x_{T-1}, b - \theta x_{T-1}). \quad (18)$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Соотношения (17), (18) следуют из теоремы 3 и равенств (8) – (10). ■

**С л е д с т в и е 7.** Пусть выполнены условия теоремы 4,  $a \rightarrow -\infty$  и  $b \rightarrow +\infty$ . Тогда условный риск прогнозирования для статистики (17) имеет предел  $r_T(f_0) \rightarrow \sigma^2(1 + \theta^2)$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Переходя к пределу в (18), получим требуемый результат. ■

**С л е д с т в и е 8.** В условиях теоремы 4 для условного риска прогнозирования справедливо асимптотическое разложение при  $\tau = b - a \rightarrow 0$ :

$$r_T(f_0) = \sigma^2 + \theta^2 \tau^2 / 12 - \theta^2 \tau^4 (3a^2 - 6a\theta x_{T-1} + 3\theta^2 x_{T-1}^2 + 2\sigma^2) / 720\sigma^4 + o(\tau^4).$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Учитывая дифференцируемость функции  $\Psi(\cdot)$  в (18) по  $\tau$  и используя для этой функции формулу Тейлора с остаточным членом в форме Пеано, получим требуемое соотношение для условного риска. ■

Из следствия 8 получаем, что безусловный риск оптимальной прогнозирующей статистики имеет следующее асимптотическое разложение при  $\tau = b - a \rightarrow 0$ :

$$E\{r_T(f_0)\} = \sigma^2 + \theta^2 \tau^2 / 12 - \theta^2 \tau^4 (3a^2 + 3\theta^2 \sigma^2 / (1 - \theta^2) + 2\sigma^2) / 720 \sigma^4 + o(\tau^4). \quad (19)$$

Согласно следствию 5 в случае полных данных ( $\tau = 0$ ) риск прогнозирования для оптимального прогноза равен  $r_0 = \sigma^2$ . Для оценки чувствительности риска к длине  $\tau = b - a$  интервала цензурирования вычислим коэффициент неустойчивости риска [3]:

$$\chi = (r - r_0) / r_0.$$

**С л е д с т в и е 9.** В условиях теоремы 4 для коэффициента неустойчивости риска справедливо асимптотическое разложение при  $\tau \rightarrow 0$ :

$$\chi_0 = \theta^2 \tau^2 / 12 \sigma^2 + \theta^2 \tau^4 (3a^2 - 6a\theta x_{T-1} + 3\theta^2 x_{T-1}^2 + 2\sigma^2) / 720 \sigma^6 + o(\tau^4).$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Разложение следует из определения  $\chi$  и следствия 8. ■

Сравним теперь с оптимальной прогнозирующей статистикой (17) другие возможные прогнозирующие статистики, используемые на практике [5–7]. Одной из возможных альтернативных прогнозирующих статистик является статистика

$$\hat{x}_{T+1} = f_1(A_T^*, x_T) = \theta E\{x_T | A_T^*\} = \theta E\{x_T | x_T \in [a, b]\}. \quad (20)$$

**Т е о р е м а 5.** Пусть для модели (13) наблюдаются значения  $x_1, \dots, x_{T-1}$  и случайное событие  $A_T^* = \{x_T \in [a, b]\}$ . Тогда прогнозирующая статистика (20) имеет вид:

$$\hat{x}_{T+1} = f_1(A_T^*, x_T) = \frac{\theta \sigma}{\sqrt{1 - \theta^2}} \Psi\left(a, b, 0, \frac{\sigma}{\sqrt{1 - \theta^2}}, 1, 1\right), \quad (21)$$

и ее условный риск прогнозирования равен:

$$r_T(f_1) = \frac{\sigma^2}{1 - \theta^2} - \frac{\theta^2 \sigma^2}{1 - \theta^2} \left( \Psi\left(a, b, 0, \frac{\sigma}{\sqrt{1 - \theta^2}}, 1, 1\right) \right)^2 + \frac{\theta^2 \sigma}{\sqrt{1 - \theta^2}} \Psi\left(a, b, 0, \frac{\sigma}{\sqrt{1 - \theta^2}}, a, b\right). \quad (22)$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Прогнозирующая статистика (20) имеет вид

$$\hat{x}_{T+1} = \theta E\{x_T | x_T \in [a, b]\} = \theta \left( \int_a^b x n(x | 0, \frac{\sigma^2}{1 - \theta^2}) dx \right) \left( \int_a^b n(x | 0, \frac{\sigma^2}{1 - \theta^2}) dx \right)^{-1}.$$

Далее воспользовавшись (8), (9), получим (21). Условный риск (22) можно найти по определению, используя (8) – (10). ■

**С л е д с т в и е 10.** Пусть выполнены условия теоремы 5,  $a \rightarrow -\infty$  и  $b \rightarrow +\infty$ . Тогда условный риск прогнозирования для статистики (20) имеет предел  $r_T(f_1) \rightarrow \sigma^2 / (1 - \theta^2)$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Переходя к пределу в (22), получим требуемый результат. ■

Таким образом, при  $a \rightarrow -\infty$  и  $b \rightarrow +\infty$  риск оптимальной прогнозирующей статистики (17) меньше риска прогнозирующей статистики (20) на  $\sigma^2 \theta^4 / (1 - \theta^2)$ .

**С л е д с т в и е 11.** В условиях теоремы 5 для условного риска прогнозирования и коэффициента неустойчивости риска справедливы асимптотические разложения при  $\tau = b - a \rightarrow 0$ :

$$r_T(f_1) = \sigma^2 + \theta^2 \tau^2 / 12 - \theta^2 (1 - \theta^2)^2 \tau^4 (3a^2 + 2\sigma^2 / (1 - \theta^2)) / 720 \sigma^4 + o(\tau^4),$$

$$\chi_1 = \theta^2 \tau^2 / 12 \sigma^2 + \theta^2 (1 - \theta^2)^2 \tau^4 (3a^2 + 2\sigma^2 / (1 - \theta^2)) / 720 \sigma^6 + o(\tau^4).$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о** проводится аналогично доказательствам следствий 8 и 9. ■

Сравним  $E\{r_T(f_0)\}$  и  $r_T(f_1)$  в окрестности  $\tau = 0$ , учитывая (1), (19):

$$r_T(f_1) - E\{r_T(f_0)\} = \frac{\theta^2 \tau^4 (3a^2 + 3\theta^2 \sigma^2 / (1 - \theta^2) + 2\sigma^2) - \theta^2 (1 - \theta^2)^2 \tau^4 (3a^2 + 2\sigma^2 / (1 - \theta^2))}{720\sigma^4} + o(\tau^4) =$$

$$\frac{\theta^2 \tau^4}{720\sigma^4} (3\theta^2 \sigma^2 / (1 - \theta^2) + 2\theta^2 \sigma^2 + 3a^2 \theta^2 (2 - \theta^2)) + o(\tau^4).$$

Таким образом, при  $\tau$ , близких к нулю, усредненный риск оптимальной прогнозирующей статистики (17) меньше риска прогнозирующей статистики (20).

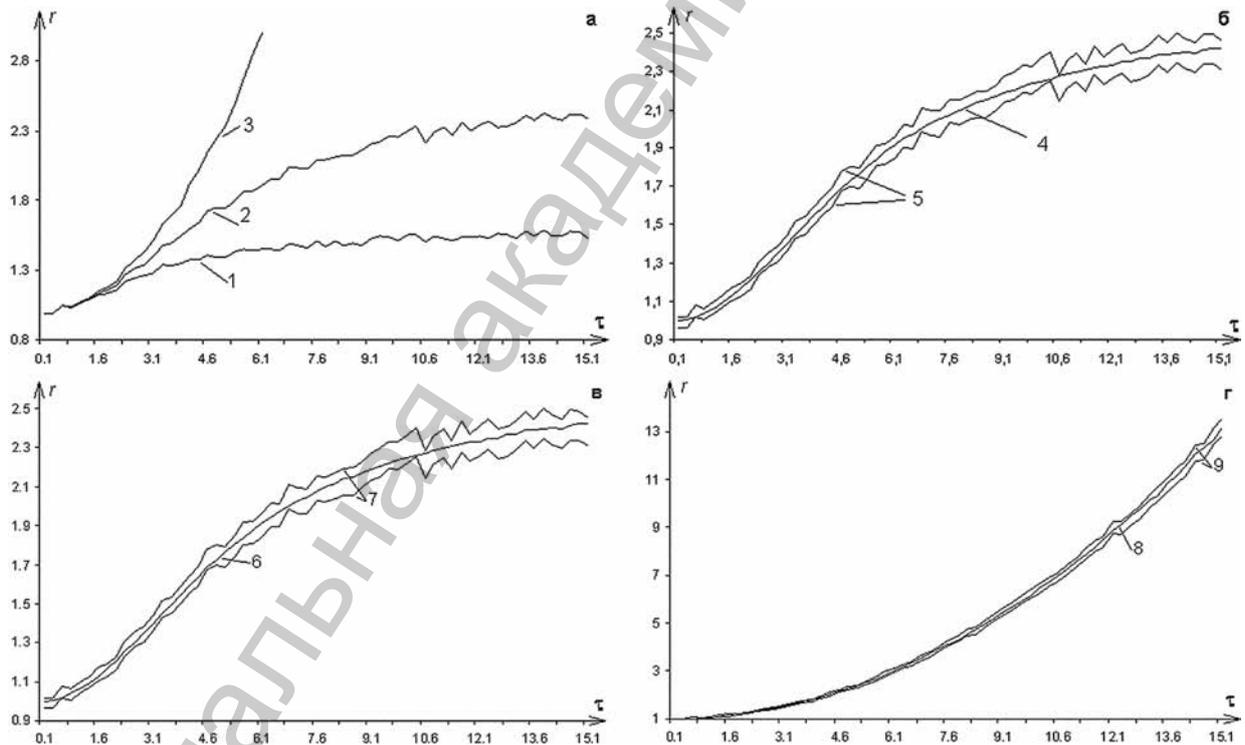
Рассмотрим ещё одну возможную прогнозирующую статистику:

$$\hat{x}_{T+1} = f_2(A_T^*) = \theta \frac{a+b}{2}. \quad (23)$$

**Т е о р е м а 6.** Пусть для модели (13) наблюдаются значения  $x_1, \dots, x_{T-1}$ , случайное событие  $A_T^* = \{x_T \in [a, b]\}$ . Тогда условный риск прогнозирования для статистики (23) равен:

$$r_T(f_2) = \frac{\sigma^2}{1 - \theta^2} + \frac{\theta^2 (a+b)^2}{4} - \frac{\theta^2 \sigma}{\sqrt{1 - \theta^2}} \Psi \left( a, b, 0, \frac{\sigma}{\sqrt{1 - \theta^2}}, b, a \right). \quad (24)$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о** следует из определения условного риска прогнозирования (3) и соотношений (8) – (10). ■



Результаты численных экспериментов: а – сравнение трех прогнозирующих статистик: 1 – риск оптимальной прогнозирующей статистики (17), 2 – риск статистики (20), 3 – риск статистики (23); б – сравнение теоретического и экспериментального значения риска оптимальной прогнозирующей статистики (17): 4 – теоретическое значение риска статистики (17), 5 – 95%-ные доверительные границы; в – сравнение теоретического и экспериментального значения риска прогнозирующей статистики (20): 6 – теоретическое значение риска статистики (20), 7 – 95%-ные доверительные границы; г – сравнение теоретического и экспериментального значения риска прогнозирующей статистики (23): 8 – теоретическое значение риска статистики (23), 9 – 95%-ные доверительные границы

С л е д с т в и е 12. Пусть выполнены условия теоремы 6 и  $\tau = b - a \rightarrow 0$ . Тогда для условного риска справедливо следующее асимптотическое разложение:

$$r_T(f_2) = \sigma^2 + \theta^2 \tau^2 / 12 + \theta^2 (1 - \theta^2)^2 \tau^4 (a^2 - \sigma^2 / (1 - \theta^2)) / 360 \sigma^4 + o(\tau^4).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о проводится аналогично доказательству следствия 8. ■

Очевидно, что при  $\tau$ , близких к нулю, риск прогнозирования для статистики (23) значительно больше, чем риск прогнозирования для статистик (17) и (20).

**4. Численные результаты.** Для сравнения прогнозирующих статистик (17), (20) и (23) проведены компьютерные эксперименты. Для оценивания риска прогнозирования при каждой фиксированной длине интервала цензурирования  $\tau$  использовался метод Монте-Карло с числом прогонов  $N = 10000$ . Используются следующие значения параметров:  $p = 1$ ,  $\theta = 0,8$ ,  $q = 1$ ,  $p = 1$ ,  $T = 100$ ,  $\tau \in \{0, 0,5, \dots, 15\}$ . Моделируется временной ряд длины  $T + 1$ . Предпоследнее наблюдение сгенерированного временного ряда  $x_T$  заменяется случайным интервалом цензурирования  $[a_T, b_T]$  длины  $\tau$  следующим образом: генерируется случайная величина  $\alpha$ , равномерно распределенная на отрезке  $[0, 1]$ , и вычисляются границы интервала цензурирования:  $a_T = x_T - \alpha \tau$  и  $b_T = x_T + \alpha(1 - \tau)$ . Результаты численных экспериментов представлены на рисунке.

На рисунке *a* изображены графики зависимостей экспериментальных значений риска для всех трех прогнозирующих статистик от  $\tau$ . Как видно из рисунка, оптимальная прогнозирующая статистика (17) имеет наименьший риск, риск статистики (20) принимает почти в два раза большие значения, а риск статистики (23) возрастает очень быстро и уже при малых  $\tau$  принимает достаточно большие значения.

На рисунках *b*–*г* изображены усредненные теоретические значения риска прогнозирования для статистик (17), (20) и (23) в зависимости от  $\tau$ , вычисленные по формулам (18), (22) и (24) соответственно, и 95%-ные доверительные границы риска. Экспериментальные и теоретические значения риска находятся в хорошем согласии.

## Литература

1. Бокс Дж., Дженкинс Г. Анализ временных рядов. Прогноз и управление. М., 1974.
2. Андерсон Т. Статистический анализ временных рядов. М., 1976.
3. Харин Ю. С. Оптимальность и робастность в статистическом прогнозировании. Минск, 2008.
4. Литтл Р. Дж. А., Рубин Д. Б. Статистический анализ данных с пропусками. М., 1990.
5. Park J. W., Genton M. G., Ghosh S. K. // The Canadian Journal of Statistics. 2007. Vol. 35, N 1. P. 151–168.
6. Gomez G., Espinal A., Lagakos W. // Statistics in medicine. 2003. N 22. P. 409–425.
7. Zeng D., Lin D. Y. // Journal of Royal statistical society. Series B. 2007. N 69, part 4. P. 507–564.
8. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., 1963.
9. Андерсон Т. В. Введение в многомерный статистический анализ данных. М., 1963.
10. Харин Ю. С., Гурин А. С. // Искусственный интеллект. 2005. № 4. С. 292–301.

*Yu. S. KHARIN, I. A. BADZIAHIN*

## OPTIMAL FORECASTING OF AUTOREGRESSIVE TIME SERIES UNDER INTERVAL CENSORING

### Summary

Problems of statistical forecasting are considered for autoregressive time series observed under interval censoring. Optimal forecasting statistics is proposed, its mean-square risk is evaluated. Comparison of optimal and widely used in practice forecasting statistics is made. Numerical results are given.

УДК 519.213.2+519.216

А. В. КУЗЬМИНА

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИСПЕРСИОННОГО ГАММА-ПРОЦЕССА

Белорусский государственный университет

(Поступила в редакцию 25.06.2010)

Дисперсионный гамма-процесс (variance gamma process) является трехпараметрическим процессом и относится к классу процессов Леви. Применяется в финансовой математике для описания динамики цен акций в вероятностно-стохастических моделях определения стоимостей опционов.

Д. Б. Мадан и Е. Сенета ввели в рассмотрение симметричный дисперсионный гамма-процесс (параметр  $\theta = 0$ ) в 1990 г. Д. Б. Мадан, П. П. Карр и Е. С. Чанг вывели формулу для определения стоимости европейского опциона – колл в случае, когда изменение цены акции задается трехпараметрическим дисперсионным гамма-процессом [1]. Формулы для вычисления стоимости американского опциона, барьерного американского опциона и барьерного европейского опциона в случае, когда изменение цены акции задается дисперсионным гамма-процессом, приведены в [2, 3].

В работе дается определение дисперсионного гамма-процесса, два способа его представления, а также приводятся алгоритмы его моделирования, реализация которых осуществляется в системе MATLAB® 7.6.0 (R2008a).

О п р е д е л е н и е 1. Случайная величина  $\gamma$  имеет  $\Gamma$ -распределение (гамма-распределение) с параметрами формы  $a > 0$ , масштаба  $b > 0$ , если ее плотность распределения имеет вид

$$f_{\gamma}(x) = \frac{b^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} \exp(-bx), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (1)$$

а  $\Gamma(x) = \int_0^{\infty} z^{x-1} e^{-z} dz$ ,  $x > 0$  – гамма-функция. В этом случае будем обозначать  $\gamma \sim \Gamma(a, b)$ .

О п р е д е л е н и е 2. Случайный процесс  $G = (G_t)_{t \geq 0}$  с параметрами  $a > 0$ ,  $b > 0$ , заданный на вероятностном пространстве  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  со значениями в  $\mathbb{R}$ , называется гамма-процессом, если выполнены следующие условия:

- 1)  $G_0 = 0$ ;
- 2)  $G$  имеет независимые приращения: для любого  $n \geq 1$  и любого набора точек  $t_j \in [0, \infty)$ ,  $j = \overline{0, n}$  таких, что  $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n$ , величины  $G_{t_0}, G_{t_1} - G_{t_0}, \dots, G_{t_n} - G_{t_{n-1}}$  являются независимыми;
- 3) для любых  $s \geq 0, t \geq 0$   $G$  имеет стационарные с гамма-распределением приращения с параметрами  $at > 0, b > 0$ , т. е.

$$G_{s+t} - G_s \stackrel{d}{=} G_t - G_0 \sim \Gamma(at, b),$$

где  $\stackrel{d}{=}$  обозначает равенство по распределению.

О п р е д е л е н и е 3. Случайная величина  $\mathfrak{G}$  имеет дисперсионное гамма-распределение с параметрами  $\sigma > 0, \nu > 0, \theta \in \mathbb{R}$ , если ее плотность распределения имеет вид

$$f_{\mathfrak{G}}(x) = \int_0^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi g}} \exp\left(-\frac{(x-\theta g)^2}{2\sigma^2 g}\right) \frac{y^{\frac{1}{\nu}-1} \exp\left(-\frac{g}{\nu}\right)}{\nu^{\frac{1}{\nu}} \Gamma\left(\frac{1}{\nu}\right)} dg, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Случайную величину  $\mathfrak{G}$  с дисперсионным гамма-распределением будем обозначать  $\mathfrak{G} \sim V(\sigma, \nu, \theta)$ .

О п р е д е л е н и е 4. Случайный процесс  $V = (V_t)_{t \geq 0}$  с параметрами  $\sigma > 0, \nu > 0, \theta \in \mathbb{R}$ , заданный на вероятностном пространстве  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  со значениями в  $\mathbb{R}$ , называется дисперсионным гамма-процессом, если выполнены следующие условия:

- 1)  $V_0 \stackrel{n.n.}{=} 0$ ;
- 2)  $V$  имеет независимые приращения: для любого  $n \geq 1$  и любого набора точек  $t_j \in [0, \infty)$   $j = \overline{0, n}$  таких, что  $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n$ , величины  $V_{t_0}, V_{t_1} - V_{t_0}, \dots, V_{t_n} - V_{t_{n-1}}$  являются независимыми;
- 3) для любых  $s \geq 0, t \geq 0$   $V$  имеет стационарные с дисперсионным гамма-распределением приращения с параметрами  $\sigma\sqrt{t} > 0, \nu/t > 0, t\theta > 0$ , т. е.

$$V_{t+s} - V_s \stackrel{d}{=} V_t - V_0 \sim V(\sigma\sqrt{t}, \nu/t, t\theta).$$

Дисперсионный гамма-процесс  $V = (V_t)_{t \geq 0}$  можно определить двумя способами [1, 4].

Первый состоит в использовании стандартного винеровского процесса  $W = (W_t)_{t \geq 0}$  и гамма-процесса  $G = (G_t)_{t \geq 0}$  с параметрами  $a = 1/\nu$  и  $b = 1/\nu$ , а именно:

$$V_t = \theta G_t + \sigma W_{G_t},$$

где  $W = (W_{G_t})_{t \geq 0}$  – стандартный винеровский процесс в случайные моменты времени  $G_t$ ,  $G = (G_t)_{t \geq 0}$  – гамма-процесс,  $\sigma > 0, \nu > 0, \theta \in \mathbb{R}$ .

Т е о р е м а 1. Характеристическая функция дисперсионного гамма-процесса имеет вид:

$$\phi_{V_t}(u) = \left( \frac{1}{1 - i\nu\theta u + (\sigma^2\nu/2)u^2} \right)^{\frac{t}{\nu}}, \quad (3)$$

где  $i^2 = -1$ ,  $i$  – мнимая единица.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу рекуррентного правила для математических ожиданий [5]  $E[X] = E[E[X | Y]]$  характеристическую функцию дисперсионного гамма-процесса можно представить как

$$\phi_{V_t}(u) = E[\exp(iuV_t)] = E\left[E[\exp(iuV_{G_t}) | G_t]\right] = E\left[E[\exp(iu(\theta G_t + \sigma W_{G_t})) | G_t]\right] = E\left[\exp\left(iu\theta - \frac{u^2\sigma^2}{2}\right) G_t\right],$$

где  $G = (G_t)_{t \geq 0}$  – гамма-процесс,  $W = (W_{G_t})_{t \geq 0}$  – стандартный винеровский процесс в случайные моменты времени  $G_t$ .

Таким образом, имеем

$$\phi_{V_t}(u) = E \left[ \exp \left( iu\theta - \frac{u^2 \sigma^2}{2} \right) G_t \right] = \int_0^{\infty} \exp \left( iu\theta g - \frac{u^2 \sigma^2}{2} g \right) f_{G_t}(g) dg,$$

где  $f_{G_t}(g) = \left( \frac{1}{v} \right)^t \frac{g^{t-1} e^{-\frac{1}{v}g}}{\Gamma \left( \frac{t}{v} \right)}$ .

Подставляя  $f_{G_t}(g)$  в выражение для  $\phi_{V_t}(u)$  и производя замену переменных  $z = g \left( -iu\theta + \frac{u^2 \sigma^2}{2} + \frac{1}{v} \right)$ , получаем (3). Теорема доказана.

Моменты дисперсионного гамма-процесса  $V = (V_t)_{t \geq 0}$  с параметрами  $\sigma, v, \theta \in \mathbb{R}$  приведены в табл. 1 [1].

Таблица 1

математическое ожидание	$\theta t$
дисперсия	$(\sigma^2 + v\theta^2)t$
асимметрия	$\theta v(3\sigma^2 + 2v\theta^2)/t^{1/2}(\sigma^2 + v\theta^2)^{3/2}$
эксцесс	$3(1 + 2v/t - v\theta^4 t(\sigma^2 + v\theta^2)^{-2})$

Второй способ определения дисперсионного гамма-процесса заключается в представлении  $\bar{V} = (\bar{V}_t)_{t \geq 0}$  как разности двух независимых гамма-процессов  $G^1 = (G_t^1)_{t \geq 0}$  с параметрами  $a, b_1$  и  $G^2 = (G_t^2)_{t \geq 0}$  с параметрами  $a, b_2$ , т. е.

$$\bar{V}_t = G_t^1 - G_t^2.$$

**Т е о р е м а 2.** *Параметры  $a, b_1, b_2$  дисперсионного гамма-процесса  $\bar{V} = (\bar{V}_t)_{t \geq 0}$  связаны с параметрами  $\sigma, v, \theta \in \mathbb{R}$  дисперсионного гамма-процесса  $V = (V_t)_{t \geq 0}$  следующими соотношениями:*

$$a = 1/v > 0,$$

$$b_1 = \left( \sqrt{\frac{1}{4}\theta^2 v^2 + \frac{1}{2}\sigma^2 v} + \frac{1}{2}\theta v \right)^{-1} > 0, \quad (4)$$

$$b_2 = \left( \sqrt{\frac{1}{4}\theta^2 v^2 + \frac{1}{2}\sigma^2 v} - \frac{1}{2}\theta v \right)^{-1} > 0.$$

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** В силу независимости гамма-процессов  $G^1 = (G_t^1)_{t \geq 0}$ ,  $G^2 = (G_t^2)_{t \geq 0}$  характеристическая функция дисперсионного гамма-процесса  $\bar{V} = (\bar{V}_t)_{t \geq 0}$  представима в виде произведения характеристических функций гамма-процессов  $G^i = (G_t^i)_{t \geq 0}, i = 1, 2$ :

$$\phi_{V_t}(u) = \left( \frac{1}{1 - i \frac{u}{b_2}} \right)^{at} \left( \frac{1}{1 + i \frac{u}{b_1}} \right)^{at}, \quad (5)$$

где

$$\phi_{G_t^1}(u) = \left( \frac{1}{1 - i \frac{u}{b_1}} \right)^{at}, \quad \phi_{G_t^2}(u) = \left( \frac{1}{1 + i \frac{u}{b_2}} \right)^{at}.$$

Из (3) и (5) получаем следующие соотношения:

$$\begin{aligned} a &= 1/\nu, \\ \frac{1}{b_1 b_2} &= \frac{\sigma^2 \nu}{2}, \\ \frac{1}{b_1} - \frac{1}{b_2} &= \theta \nu. \end{aligned} \tag{6}$$

Решая (6) относительно  $b_1$  и  $b_2$ , получаем (4). Теорема доказана.

Моменты дисперсионного гамма – процесса  $\bar{V} = (\bar{V}_t)_{t \geq 0}$  с параметрами  $a, b_1, b_2$  приведены в табл. 2.

Таблица 2

математическое ожидание	$at(b_2 - b_1)/(b_1 b_2)$
дисперсия	$at(b_2^2 + b_1^2)/(b_1 b_2)^2$
асимметрия	$2(at)^{-1/2}(b_2^3 - b_1^3)/(b_2^2 + b_1^2)^{3/2}$
эксцесс	$3(1 + 2(at)^{-1}(b_2^4 + b_1^4)/(b_2^2 + b_1^2)^2)$

Существует несколько способов моделирования дисперсионного гамма-процесса [4, 6]. Приведем алгоритмы моделирования, используемые в данной работе.

А л г о р и т м 1.

- 1) Генерируем гамма-процесс  $G = (G_t)_{t \geq 0}$  с параметрами  $a = 1/\nu$  и  $b = 1/\nu$ .
- 2) Генерируем стандартное броуновское движение  $W = (W_t)_{t \geq 0}$ .
  - а) Генерируем стандартные нормально распределенные  $N(0,1)$  случайные числа  $\{v_t, t = 1, 2, \dots\}$ .
  - б) Полагаем  $W_0 = 0$ .
  - в)  $W_t = W_{t-1} + \sqrt{G_t - G_{t-1}} v_t, t \geq 1$ .
- 3) Дисперсионный гамма-процесс  $V = (V_t)_{t \geq 0}$  с параметрами  $\sigma > 0, \nu > 0, \theta \in \mathbb{R}$  генерируем как

$$V_t = \theta G_t + \sigma W_{G_t}.$$

А л г о р и т м 2.

- 1) Генерируем гамма-процесс  $G^1 = (G_t^1)_{t \geq 0}$  с параметрами  $a > 0, b_1 > 0$ .
- 2) Генерируем гамма-процесс  $G^2 = (G_t^2)_{t \geq 0}$  с параметрами  $a > 0, b_2 > 0$ .
- 3) Дисперсионный гамма-процесс  $\bar{V} = (\bar{V}_t)_{t \geq 0}$  с параметрами  $a > 0, b_1 > 0, b_2 > 0$  получаем как

$$\bar{V}_t = G_t^1 - G_t^2.$$

На рис. 1, 2 представлены траектории дисперсионных гамма-процессов, моделирование которых осуществляется алгоритмами 1 и 2 соответственно.

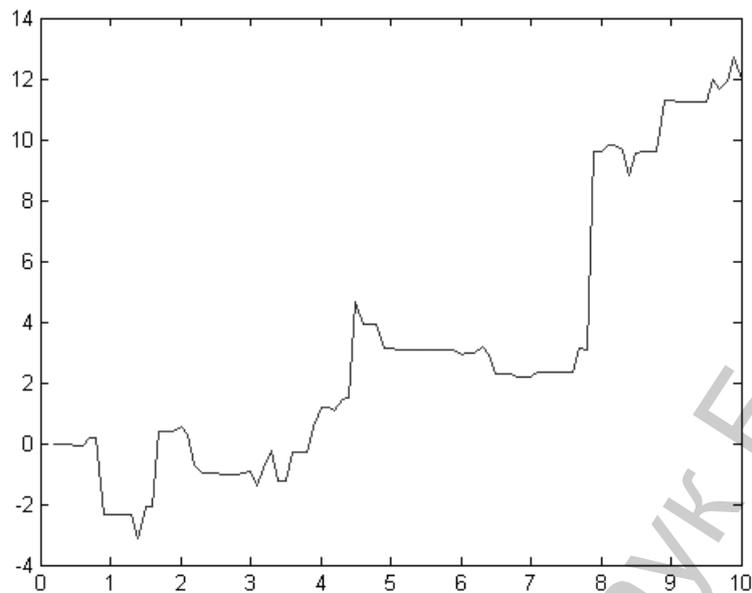


Рис. 1. Траектория дисперсионного гамма-процесса с параметрами  $\sigma = 2, \nu = 1, \theta = 1$

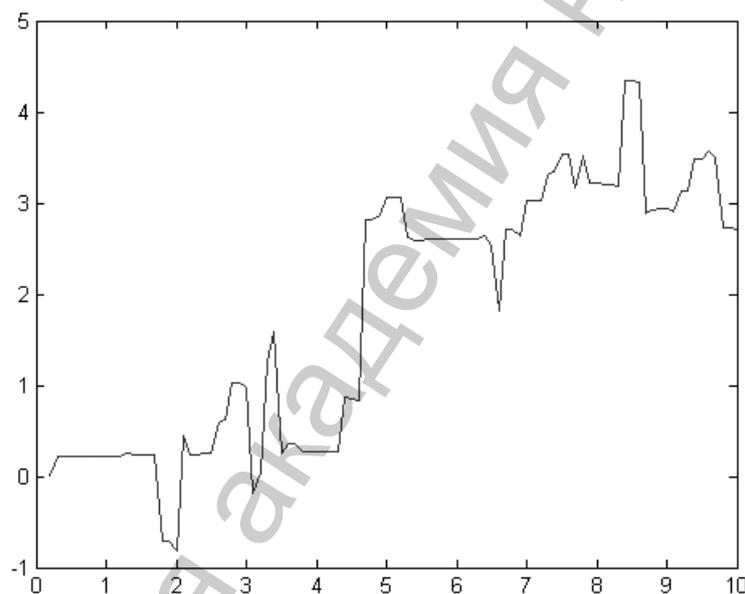


Рис. 2. Траектория дисперсионного гамма-процесса с параметрами  $a = 1, b_1 = 0,5, b_2 = 1$

### Литература

1. Madan D. B., Carr P. P., Chang E. C. // European Finance Preview, 1998. Vol. 2. P. 79–105.
2. Hirs A., Madan D. B. // Journal of Computational Finance. 2003. Vol. 7(2). P. 63–80.
3. Fiorani F. // Thesis Universita degli Studi di Trieste. 2004.
4. Schoutens W. Levy processes in finance. Wiley, 2003. P. 109–111.
5. Медведев Г. А. Математические модели финансовых рисков. Ч. 2. Риски страхования. Минск, 2001. С. 25.
6. Cont R., Tankov P. Financial modeling with jump processes. Chapman and Hall CRC Press, 2003. P. 192.

*A. V. KUZMINA*

### VARIANCE GAMMA PROCESS SIMULATION

#### Summary

This article presents the variance gamma process definition and some properties of this process. The two ways of the variance gamma process simulation are considered.

УДК 519.24

ЧЭНЬ ХАЙЛУН

## ОБ ОЦЕНКЕ ПАРАМЕТРОВ $\alpha$ -УСТОЙЧИВЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

Белорусский государственный университет

(Поступила в редакцию 22.06.2010)

**Введение.** На практике оценка параметров  $\alpha$ -устойчивого распределения имеет важное значение, и в настоящее время известны различные методы их оценивания: метод максимального правдоподобия [1–3], метод Хилла [4], метод квантилей [5], метод характеристических функций (CF) [6] и так далее. Для оценки параметров симметричного распределения  $S\alpha S$  используется метод **дробных моментов низкого порядка (FLOM)**, метод экстремума, метод моментов логарифма [7, 8] и др. Метод максимального правдоподобия требует достаточно сложных вычислений. В методе квантилей необходимо использовать таблицу квантилей, и только для случая  $\alpha \in [0.6, 2]$ , что ограничивает его применение. Метод характеристических функций имеет преимущества – сокращение необходимых вычислений и высокая точность оценок  $\alpha$  и  $\sigma$ . Но параметры  $\beta$  и  $\mu$  достаточно трудно оценить, так как в процессе их оценивания нужно использовать оценочные значения  $\alpha$  и  $\sigma$ , а это приводит к накоплению ошибок, что делает оценки параметров  $\beta$  и  $\mu$  далекими от истинных. Эти ошибки еще существеннее при  $\alpha \rightarrow 1$  и  $\beta \neq 0$  ввиду того, что характеристическая функция  $\alpha$ -устойчивого распределения меняет вид при  $\alpha = 1$ . Е. Е. Куруоглу предлагает путем преобразований превращать несимметричное распределение в симметричное, что позволяет этот метод, пригодный лишь для  $S\alpha S$ , применять для оценивания параметров несимметричного распределения [9]. Однако Е. Е. Куруоглу не указывает метод оценки параметра  $\mu$ , а предполагает, что  $\mu = 0$ , и предложенный им метод рассматривается при  $\alpha \neq 1$ . Поэтому поиск метода совместных оценок четырех параметров с высокой точностью является непростой задачей.

**1. Метод CF для оценки параметров.** Случайная величина  $X$  называется устойчивой, если логарифм ее характеристической функции имеет вид

$$\psi(\theta) = \ln(\varphi(\theta)) = \begin{cases} -\sigma^\alpha |\theta|^\alpha + i \left( \mu\theta + \sigma^\alpha |\theta|^\alpha \beta \operatorname{sign}(\theta) \tan \frac{\pi\alpha}{2} \right), & \alpha \neq 1, \\ -\sigma|\theta| + i \left( \mu\theta - \sigma|\theta| \beta \frac{2}{\pi} \operatorname{sign}(\theta) \ln|\theta| \right), & \alpha = 1, \end{cases} \quad (1)$$

где  $\varphi(\theta) = E \exp[i\theta X]$ ,  $\alpha \in (0, 2]$ ,  $\beta \in [-1, 1]$ ,  $\sigma > 0$ ,  $\mu \in R$ ,  $\theta \in R$ . В этом случае будем писать  $X \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$ .

Основная идея метода CF состоит в том, чтобы по выборочным данным оценить характеристическую функцию и затем, используя действительную и мнимую часть логарифма характеристической функции, оценить  $\alpha$ ,  $\sigma$  и  $\beta$ ,  $\mu$ . Однако, в связи с тем, что характеристическая функция  $\alpha$ -устойчивого распределения меняет вид при  $\alpha = 1$ , достаточно трудно получить точную оценку параметров  $\beta$  и  $\mu$ .

**2. Оценки параметров методом FLOM** можно разделить на две категории – метод оценки параметров симметричного распределения  $S\alpha S$  и метод оценки параметров несимметричного распределения.

Е. Е. Курюглу предлагает использовать метод FLOM для оценивания параметров только в случае  $\mu = 0$ . Этот метод строится на основе следующих лемм.

**Л е м м а 1** [9]. Пусть  $X \sim S_\alpha(\sigma, \beta, 0)$ , тогда, если  $\alpha \neq 1$ , то

$$v_p = E\left[|X|^p\right] = \frac{\Gamma(1-p/\alpha)}{\Gamma(1-p)} \left| \frac{\sigma^\alpha}{\cos\theta} \right|^{p/\alpha} \frac{\cos(p\theta/\alpha)}{\cos(p\pi/\alpha)},$$

для  $p \in (-1, \alpha)$ , где

$$\theta = \arctan\left(\beta \tan \frac{\pi\alpha}{2}\right). \quad (2)$$

**Л е м м а 2** [9]. Пусть  $X \sim S_\alpha(\sigma, \beta, 0)$ , тогда

$$v_p = E\left[X^{(p)}\right] = \frac{\Gamma(1-p/\alpha)}{\Gamma(1-p)} \left| \frac{\sigma^\alpha}{\cos\theta} \right|^{p/\alpha} \frac{\sin(p\theta/\alpha)}{\sin(p\pi/\alpha)},$$

для  $p \in (-2, -1) \cup (-1, \alpha)$ , где  $X^{(p)} = \text{sign}(X)|X|^p$ .

Рассмотрим  $n$  независимых наблюдений  $X_1, \dots, X_n$  за случайной величиной  $X \sim S_\alpha(\sigma, \beta, 0)$ .

Оценки для  $v_p$  и  $v_p$  будут иметь вид:

$$\hat{v}_p = A_p = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |X_k|^p, \quad \hat{v}_p = S_p = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k^{(p)},$$

где  $p \in (-2, -1) \cup (-1, \alpha)$ .

**Т е о р е м а 1.** Оценки  $\hat{v}_p$  и  $\hat{v}_p$  для  $v_p$  и  $v_p$  являются несмещенными и состоятельными оценками.

**Д о к а з а т е л ь с т в о.**

$$E\hat{v}_p = \frac{1}{n} (E[|X_1|^p] + E[|X_2|^p] + \dots + E[|X_n|^p]) = \frac{1}{n} \cdot nE[|X_1|^p] = v_p,$$

$$E\hat{v}_p = \frac{1}{n} (E[X_1^{(p)}] + E[X_2^{(p)}] + \dots + E[X_n^{(p)}]) = \frac{1}{n} \cdot nE[X_1^{(p)}] = v_p.$$

Из закона больших чисел в форме Хинчина [10, 11] получаем:

$$\hat{v}_p = \frac{|X_1|^p + |X_2|^p + \dots + |X_n|^p}{n} \xrightarrow{p} E\left[|X_1|^p\right] = v_p, \text{ при } n \rightarrow \infty,$$

$$\hat{v}_p = \frac{X_1^{(p)} + X_2^{(p)} + \dots + X_n^{(p)}}{n} \xrightarrow{p} E\left[X_1^{(p)}\right] = v_p, \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Теорема доказана.

В силу лемм 1, 2 можно оценивать следующие параметры  $\alpha$ -устойчивого распределения.

а) Для оценки параметра  $\alpha$ , когда  $q = \frac{p\pi}{2}$ , используем равенство [7]:

$$\sin\left(\frac{p\pi}{\hat{\alpha}}\right) / \left(\frac{p\pi}{\hat{\alpha}}\right) = \left[ q \left( \frac{A_p A_{-p}}{\tan(q)} + S_p S_{-p} \tan(q) \right) \right]^{-1}.$$

Зная оценку  $\hat{\alpha}$ , находим оценки  $\hat{\theta}$ , где  $\theta$  задается равенством (2). Для этого решаем следующие уравнения:

$$1) \frac{S_p}{A_p} = \frac{\tan(p\hat{\theta}/\hat{\alpha})}{\tan(p\pi/2)},$$

$$2) A_p S_{-p} = \frac{\sin(2p\hat{\theta} / \hat{\alpha})}{\hat{\alpha} \sin(p\pi / \hat{\alpha})};$$

$$3) A_p A_{-p} = \frac{2}{\hat{\alpha}} \left( \frac{\sin p\pi}{1 + \cos p\pi} \right) \frac{\cos^2(p\hat{\theta} / \hat{\alpha})}{\sin(p\pi / \hat{\alpha})};$$

$$4) S_p S_{-p} = \frac{2}{\hat{\alpha}} \left( \frac{\sin(p\pi)}{1 - \cos(p\pi)} \right) \frac{\sin^2(p\hat{\theta} / \hat{\alpha})}{\sin(p\pi / \hat{\alpha})}.$$

б) Зная оценки  $\hat{\alpha}$  и  $\hat{\theta}$ , находим оценку параметра  $\sigma$  в виде [9]:

$$\hat{\sigma} = \left| \cos(\hat{\theta}) \right| \left[ \frac{\Gamma(1-p) \cos(p\pi/2)}{\Gamma(1-p/\hat{\alpha}) \cos(p\hat{\theta}/\hat{\alpha})} A_p \right]^{1/p}.$$

в) Зная оценки  $\hat{\alpha}$  и  $\hat{\theta}$ , для оценки параметра  $\beta$  можно использовать следующую формулу [9]:

$$\hat{\beta} = \tan \hat{\theta} / \tan(\pi \hat{\alpha} / 2).$$

В связи с тем, что соотношения  $A_p A_{-p}$  и  $S_p S_{-p}$  фактически определяются только для  $|\hat{\theta}|$ , при их использовании оцениваем только  $|\hat{\beta}|$  [9].

**3. Комбинированный метод оценки параметров.** В настоящее время в литературе мало методов для оценки параметра  $\mu$ . А когда  $\alpha \rightarrow 1$  и  $\beta \neq 0$ , то достаточно сложно оценить  $\mu$ . И даже в случае  $\mu = 0$  нет хорошего способа для его оценивания. В [12] дается оценка параметра  $\mu$  в случае  $\alpha \in (1, 2]$ . Чтобы получить хорошую оценку в статистическом смысле параметра  $\mu$  для случая  $\alpha \in (0, 2]$  на основании свойства устойчивых распределений [12], используем следующую теорему.

**Т е о р е м а 2** [9, 13]. Пусть  $X_k$  – независимые одинаково распределенные устойчивые случайные величины с параметрами  $\alpha, \sigma, \beta, \mu, t$ . е.  $X_k \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$ . Тогда

$$Z = \sum_{k=1}^n a_k X_k \sim S_\alpha \left( \left( \sum_{k=1}^n |a_k|^\alpha \right)^{1/\alpha} \sigma, \frac{\sum_{k=1}^n a_k^{(\alpha)}}{\sum_{k=1}^n |a_k|^\alpha} \beta, \sum_{k=1}^n a_k \mu \right),$$

где  $a_k^{(\alpha)} = \text{sign}(a_k) |a_k|^\alpha, k = \overline{1, n}, a_k \in \mathbb{R}, \alpha \in (0, 2], \beta \in [-1, 1], \sigma > 0, \mu \in \mathbb{R}$ .

Рассмотрим  $n$  независимых наблюдений  $X_1, \dots, X_n$  за случайной величиной  $X \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$ .

Из теоремы могут быть выведены три типа преобразований:

$$X_k^C \sim X_{3k} + X_{3k-1} - 2X_{3k-2} \sim S_\alpha \left( (2+2^\alpha)^{1/\alpha} \sigma, \left( \frac{2-2^\alpha}{2+2^\alpha} \right) \beta, 0 \right); \quad (3)$$

$$X_k^D \sim X_{3k} + X_{3k-1} - 2^{1/\alpha} X_{3k-2} \sim S_\alpha(4^{1/\alpha} \sigma, 0, (2-2^{1/\alpha}) \mu); \quad (4)$$

$$X_k^S \sim X_{2k} - X_{2k-1} \sim S_\alpha(2^{1/\alpha} \sigma, 0, 0), \quad (5)$$

где  $X^C$  – центрирующее преобразование,  $X^D$  – выравнивающее преобразование,  $X^S$  – симметричное преобразование.

Нетрудно заметить, что длина последовательности  $X^C$  и  $X^D$  составляет  $1/3$  длины исходной последовательности, а длина последовательности  $X^S$  –  $1/2$  длины исходной последовательности. В связи с тем, что данное преобразование может преобразовать случайную последовательность

$X_k \sim S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$  в симметричное распределение  $X_k^D \sim S_{\alpha^D}(\sigma^D, \beta^D, \mu^D)$  и  $\mu^D = \text{median}(X_k^D)$  [14], то

$$\mu = \mu^D (2 - 2^{1/\alpha})^{-1}. \quad (6)$$

Предлагаем поправку оценки параметра  $\beta$ , учитывая следующие обозначения:  $X_{md}$  – медиана распределения случайной последовательности;  $X_{max}$  – максимальное значение последовательности;  $X_{min}$  – минимальное значение последовательности.

Пусть

$$K = \text{sign}(|X_{max} - X_{md}| - |X_{min} - X_{md}|), \quad (7)$$

тогда  $\beta = K|\beta|$ , что позволяет определить знак  $\beta$ .

Е. Е. Куруоглу не рассматривал случай оценки  $\beta$ , если  $\mu \neq 0$ . Используя преобразование (3) (обозначим  $A$ ), получаем распределение с  $\mu = 0$ , и для оценки параметра  $\beta$  используем формулу

$$\beta = \left( \frac{2 + 2^\alpha}{2 - 2^\alpha} \right) \beta^C, \text{ где } \beta^C \text{ – параметр преобразования (3). Однако если оценивание параметра } \alpha \text{ будет}$$

далеким от истинного, то это приведет к ошибке при оценке  $\beta$ . В этом случае введем другую форму преобразования (3) (обозначим  $B$ ):

$$X_k^{\bar{C}} \sim X_k - \mu \sim S_\alpha(\sigma, \beta, 0). \quad (8)$$

В ( $B$ ) сначала оцениваем параметр  $\mu$ , а затем, используя преобразование (8), получаем распределение с  $\mu = 0$ . Потом оцениваем  $\beta$ , используя оценку, полученную из соотношения  $A_{-p}A_p$ . Следует учесть, что при использовании этого метода возникают ошибки при оценке параметра  $\mu$ , но они мало влияют на оценку  $\beta$ .

Учитывая, что длина последовательности должна быть кратна 3, смоделируем 9999 значений  $\alpha$ -устойчивой случайной величины. Преобразуем их, используя соотношения (3) и (8), и оценим параметр  $\beta$ . Результат оценки приведен на рис. 1. Оценки параметра  $\beta$  с помощью преобразования ( $B$ ) дают лучшие результаты, чем с помощью преобразования ( $A$ ). Поэтому для оценки параметра  $\beta$  будем использовать преобразование ( $B$ ).

Сопоставив методы оценок параметров  $\alpha$ -устойчивого распределения, можно сделать следующие выводы.

- 1) Для оценки параметров  $\alpha$  и  $\sigma$  целесообразно применять метод СФ.
- 2) Для оценки параметров  $\beta$  и  $\mu$  ( $\alpha \neq 1$ ) – вышеописанный комбинированный метод.
- 3) Для оценки параметров  $\beta$  и  $\mu$  ( $\alpha = 1$ ) – метод СФ.

**4. Результаты моделирования.** Смоделируем последовательность  $\alpha$ -устойчивых случайных величин ( $N = 9999$ ) при  $\alpha \in [0.2, 1.8]$  и оценим параметры (рис. 2).

Проведём сравнительный анализ комбинированного метода оценки параметров и метода СФ для симметричной устойчивой случайной величины  $S_\alpha(1,0,0)$  (рис. 3).

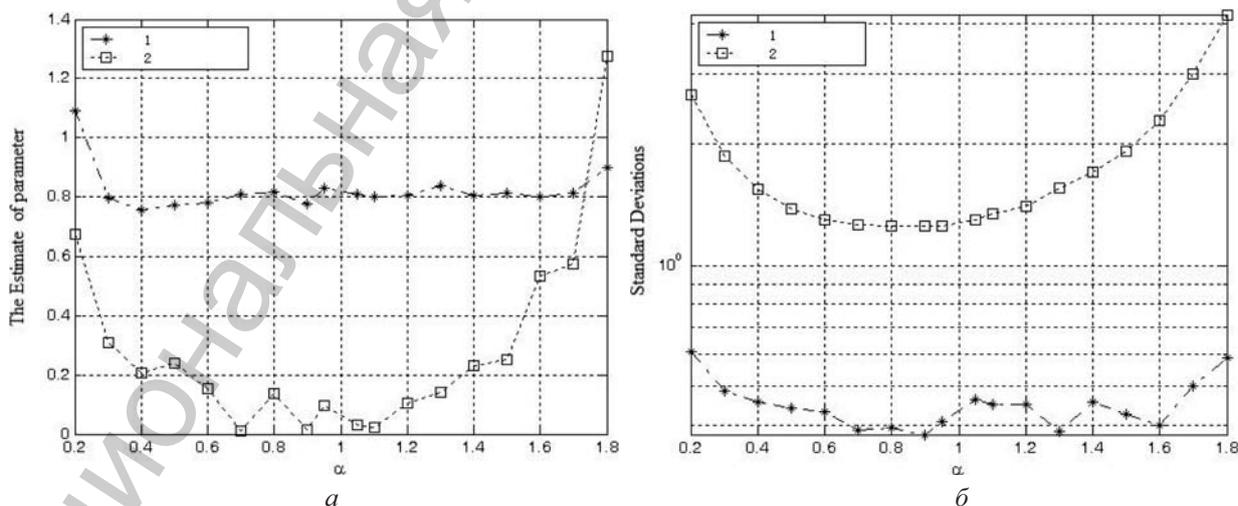


Рис. 1. Оценка параметра  $\beta$  и ее стандартное отклонение для  $S_\alpha(2,0,9,1)$ : 1 – преобразование ( $B$ ); 2 – преобразование ( $A$ )

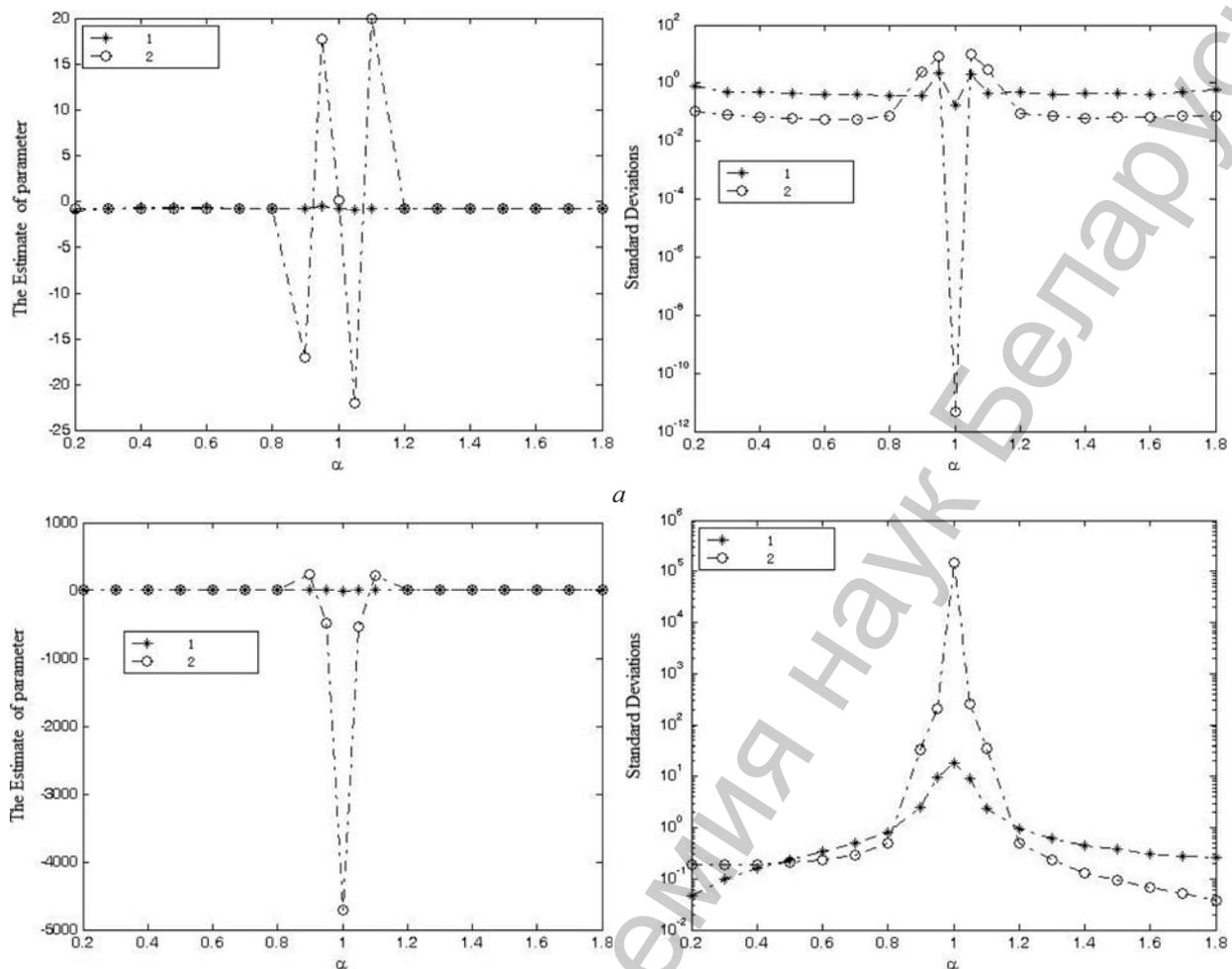


Рис. 2. Оценки параметров  $\beta$  (а) и  $\mu$  (б) и их стандартные отклонения для  $S_\alpha(2, -0.9, 1)$ : 1 – комбинированный метод; 2 – метод CF

Таблица 1. Оценка параметра  $\beta$  и ее стандартное отклонение при  $\alpha$ , близких к 1

$S_\alpha(2, -0.9, 1) (\beta = -0.9)$					
$\alpha$	0.90	0.95	1.00	1.05	1.10
Комбинированный метод	-0.8189 (0.3780)	-0.5440 (2.1103)	-0.8884 (0.1683)	-1.0424 (2.0061)	-0.8092 (0.4440)
Метод CF	-16.993 (2.5154)	17.753 (8.1145)	$1.44 \times 10^{-13}$ ( $4.57 \times 10^{-12}$ )	-22.06 (10.281)	19.908 (2.8111)
$S_\alpha(1, 0, 0) (\beta = 0)$					
$\alpha$	0.90	0.95	1.00	1.05	1.10
Комбинированный метод	$-3.00 \times 10^{-3}$ (0.1219)	$-4.01 \times 10^{-3}$ (0.1160)	$-1.86 \times 10^{-3}$ (0.0747)	$2.74 \times 10^{-4}$ (0.1316)	$4.55 \times 10^{-3}$ (0.1273)
Метод CF	$-4.80 \times 10^{-4}$ (0.0567)	$5.80 \times 10^{-3}$ (0.1084)	$-7.18 \times 10^{-16}$ ( $1.81 \times 10^{-14}$ )	$3.17 \times 10^{-3}$ (0.0725)	$2.00 \times 10^{-3}$ (0.0621)

Таблица 2. Оценка параметра  $\mu$  и ее стандартное отклонение при  $\alpha$ , близких к 1

$S_\alpha(2, -0.9, 1) (\mu = 1)$					
$\alpha$	0.90	0.95	1.00	1.05	1.10
Комбинированный метод	1.2398 (2.4528)	2.0959 (9.7951)	-0.1201 (18.26)	0.4134 (9.2316)	0.8140 (2.3457)
Метод CF	$2.39 \times 10^2$ (32.503)	$-4.78 \times 10^2$ ( $2.08 \times 10^2$ )	$-4.70 \times 10^3$ ( $1.489 \times 10^5$ )	$-5.30 \times 10^2$ ( $2.57 \times 10^2$ )	$2.25 \times 10^2$ (34.543)
$S_\alpha(1, 0, 0) (\mu = 0)$					
$\alpha$	0.90	0.95	1.00	1.05	1.10
Комбинированный метод	$1.0295 \times 10^{-3}$ (0.7852)	$-2.4514 \times 10^{-2}$ (1.7413)	$-3.7650 \times 10^{-2}$ (1.3164)	$-3.6197 \times 10^{-2}$ (1.7552)	$2.2179 \times 10^{-2}$ (0.8410)
Метод CF	$3.5412 \times 10^{-3}$ (0.4245)	$-7.6779 \times 10^{-2}$ (1.4505)	11.8660 (299.99)	$3.9201 \times 10^{-2}$ (0.8615)	$1.1582 \times 10^{-2}$ (0.3355)

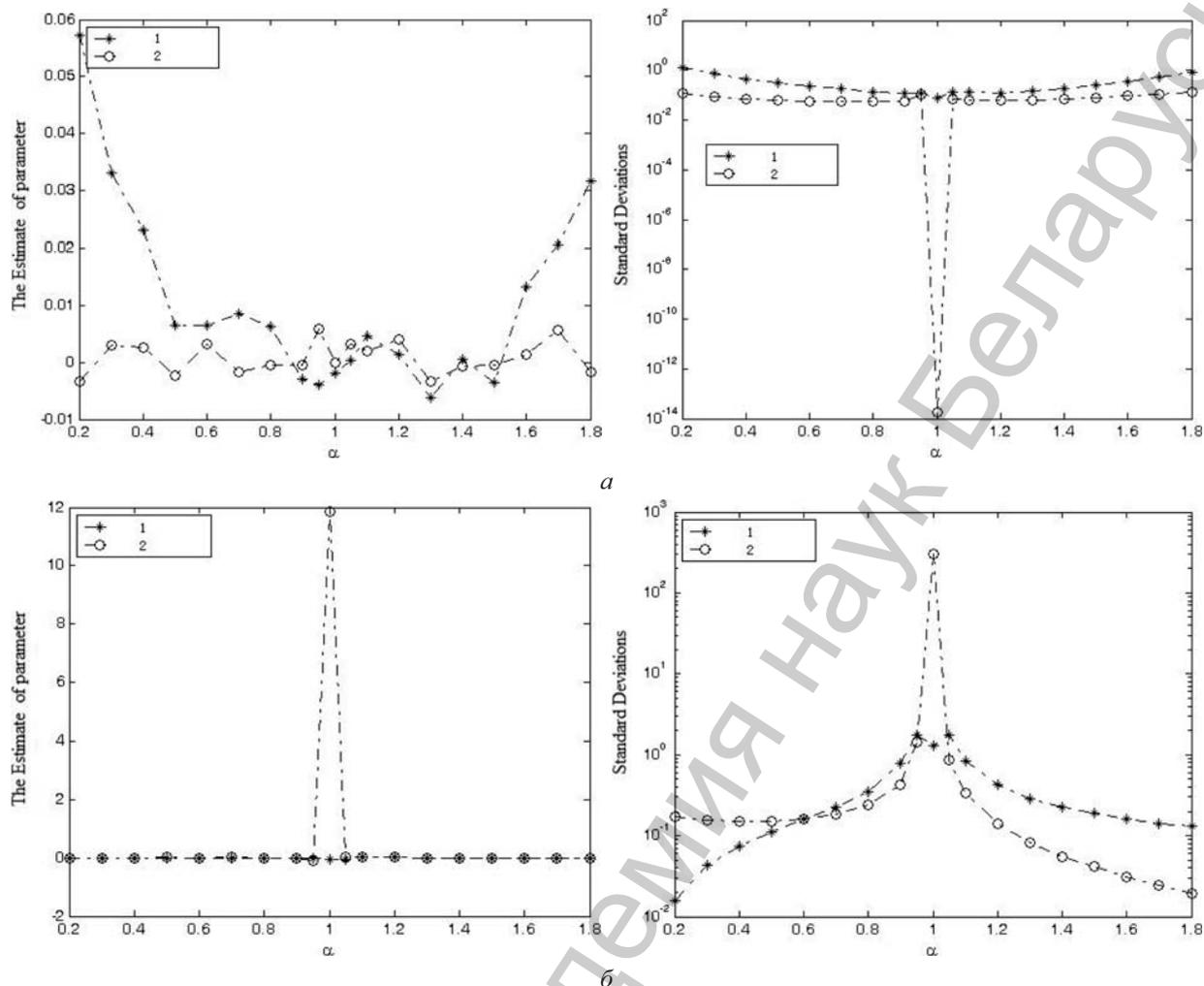


Рис. 3. Оценки параметров  $\beta$  (а) и  $\mu$  (б), и их стандартные отклонения для  $S_\alpha(1,0,0)$ : 1 – комбинированный метод; 2 – метод CF

В табл. 1 и 2 дается сравнение оценок параметров  $\beta$  и  $\mu$  комбинированным методом и методом CF. На основе симметричного распределения  $S_\alpha(1,0,0)$  оценки методом CF параметров  $\beta$  и  $\mu$  лучше, чем на основе несимметричного распределения. При этом для оценки параметра  $\mu$  для  $\alpha$ , близких к 1, комбинированный метод лучше метода CF. А для несимметричного распределения  $S_\alpha(2,-0.9,1)$  комбинированный метод оценки параметров  $\beta$  и  $\mu$  при  $\alpha$ , близких к 1, заметно лучше метода CF.

Из табл. 1 видно, что метод CF даёт более точные оценки параметров  $\beta$  и  $\mu$  для случайной величины  $X \sim S_\alpha(1,0,0)$ , чем для  $X \sim S_\alpha(\sigma,\beta,\mu)$ .

Если сравнивать комбинированный метод и метод CF, можно сказать, что первый даёт более точные оценки параметра  $\mu$  при  $\alpha$ , близких к 1.

**Заключение.** В статье приводятся традиционные методы оценивания параметров, метод CF и метод FLOM. Известно, что данные методы имеют ряд недостатков, и в этой связи в работе предложен новый усовершенствованный комбинированный метод.

### Литература

1. Du Mouchel W. H. // Annals of Statistics. 1973. Vol. 3. P. 948–957.
2. Vodenschatz J. S., Nikias C. L. // Signal Processing, IEEE Transactions on. Vol. 47. Is. 5. May 1999. P. 1382–1384.
3. Чэнь Хайлун, Ле Хонг Шон // Вестн. БГУ. Сер. 1. 2010. № 1. С. 123–127.
4. Чэнь Хайлун // Труды 66-й научной конференции студентов и аспирантов Белорусского государственного университета, 18–21 мая 2009 г., Минск. В 3 ч. Ч. 1. Минск, 2010. С. 252–255.

5. McCulloch J. H. // Simulation and Computation. 1986. Vol. 15. P. 1109–1136.
6. Koutrouvelis I. A. // Journal of the American Statistical Association. 1980. Vol. 75, N 372. P. 918–928.
7. Xinyu Ma, Nikias C. L. // Signal Processing, IEEE Transactions on. Dec. 1995. Vol. 43, Is. 12. P. 2884–2897.
8. Tsihrintzis G. A., Nikias C. L. // Signal Processing, IEEE Transactions on. June 1996. Vol. 44(6). P. 1492–1503.
9. Kuruoglu E. E. // Signal Processing. IEEE Transaction on. Oct. 2001. Vol. 49(10). P. 2192–2201.
10. Манига А. Д. Теория вероятностей и математическая статистика. М., 2001.
11. Гнеденко Б. В. Курс теории вероятностей. М., 1961.
12. Samorodnitsky G., Naqqu M. Stable Non-Gaussian Random Processes: Stochastic Models with Infinite Variance. Chapman and Hall; New York; London, 1994.
13. Труш Н. Н., Соболева Т. В. Статистический анализ оценок спектральных плотностей устойчивых случайных процессов. Минск, 2008.
14. Золотарев В. М. Одномерные устойчивые распределения. М., 1983.

CHEN HAILONG

## ESTIMATION OF PARAMETERS OF $\alpha$ -STABLE DISTRIBUTIONS

### Summary

In this article a joint estimation method of parameters of the  $\alpha$ -stable distribution with parameters  $\alpha, \sigma, \beta, \mu$  at  $\alpha \in (0, 2]$  is presented. Firstly the parameters  $\alpha$  and  $\sigma$  are estimated by means of the character function (CF) method for the samples. Based on the bias-removed transformation the method of estimating the location parameter  $\mu$  is proposed. And then, based on centralizing transformation by using the estimation of  $\mu$  and the fractional lower order moment (FLOM) method, new estimator for a skew parameter  $\beta$  is proposed.

ФІЗІКА

УДК 530.145

В. В. КУДРЯШОВ, А. В. БАРАН

ОБЪЕДИНЕНИЕ МОДИФИЦИРОВАННОГО КВАЗИКЛАССИЧЕСКОГО  
МЕТОДА И ВАРИАЦИОННОГО ПОДХОДА ДЛЯ РЕШЕНИЯ  
РАДИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЁДИНГЕРА

Институт физики им. Б. И. Степанова НАН Беларуси

(Поступила в редакцию 22.10.2010)

Многие интересные физические задачи требуют решения уравнения Шрёдингера для сферически-симметричных потенциалов  $V(r)$ . Радиальное уравнение Шрёдингера может быть записано в форме

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \psi(r)}{dr^2} + \left( V(r) + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr^2} - E \right) \psi(r) = 0, \quad (1)$$

идентичной одномерному уравнению Шрёдингера с эффективным потенциалом, являющимся суммой исходного потенциала  $V(r)$  и центробежного потенциала. В настоящей работе мы рассмотрим степенные потенциалы

$$V(r) = \alpha r^k, \quad \alpha > 0, \quad k \geq 1, \quad (2)$$

которые очень важны в физике частиц. Как правило, практические вычисления невозможны без применения различных приближенных методов.

Известно [1, 2], что удачное преобразование исходного уравнения существенно улучшает результаты использования приближения. Рассмотрим степенную подстановку

$$r = q^s, \quad s > 0, \quad \psi(r) = r^{(s-1)/2s} \Psi(q). \quad (3)$$

Преобразованное уравнение имеет вид

$$-\hbar^2 \frac{d^2 \Psi(q)}{dq^2} + Q(q) \Psi(q) = 0, \quad (4)$$

где

$$Q(q) = \frac{2ms^2}{q^2} \left( \alpha q^{(2+k)s} - E q^{2s} \right) + \frac{\hbar^2}{q^2} \left( s^2 (l+1/2)^2 - \frac{1}{4} \right). \quad (5)$$

Р. Лангер [1] использовал частные случаи  $s = 2$  и  $s = \infty$  (экспоненциальная подстановка), когда он применял ВКБ-приближение к задаче Кеплера. В [3] значения  $s = 1$  для  $l = 0$  и  $s = 2$  для  $l \neq 0$  были выбраны в рамках нового модифицированного квазиклассического метода в случае потенциалов (2). В настоящей работе  $s$  рассматривается как варьируемый параметр. Оптимальное значение вариационного параметра будет найдено посредством минимизации интегральной невязки в соответствии с новым усовершенствованным вариационным подходом, проверенным в [4].

Одним из ранних и простых способов получения приближенных собственных значений и собственных функций радиального уравнения Шрёдингера является ВКБ-метод (см., например, [1, 2, 5] и ссылки в них). ВКБ-подход имеет дело с логарифмической производной  $Y(q) = d \ln \Psi(q) / dq$ . ВКБ-ряды являются асимптотическими разложениями по степеням постоянной Планка  $\hbar$  двух независимых частных логарифмических производных  $Y^\pm(q)$ . ВКБ-приближение содержит конечное число лидирующих членов  $Y_n^\pm(q)$  из полных разложений. Это приближение не пригодно в окрестности точек поворота, где  $Q(q) = 0$ . В то время как в большинстве случаев главной целью усовершенствования ВКБ-метода (см., например, [2, 5, 6, 7]) являлось достижение наивысшей точности в вычислении собственных значений энергии для радиального уравнения Шрёдингера, наша задача состоит в том, чтобы построить удовлетворительное приближение для собственных функций с правильным поведением в начале координат, в окрестности точек поворота и вдали от них.

Анализ хорошо известной структуры лидирующих членов  $Y_n^\pm(q)$  и рекуррентных соотношений [8, 9] позволил перестроить исходные асимптотические ВКБ-ряды как бесконечные суммы новых составляющих (парциальных) асимптотических рядов [10, 11]. Полный ряд аппроксимируется конечным числом лидирующих парциальных рядов в противоположность использованию конечного числа лидирующих членов  $Y_n^\pm(q)$  в общепринятом ВКБ-подходе. Явное суммирование двух лидирующих парциальных рядов и их обобщение дает новую приближенную логарифмическую производную

$$Y_{app}(q) = Y(q; t) = b_1(q)y_1(a; t) + b_2(q)y_2(a; t) \quad (6)$$

с параметром смешивания  $t$ . Здесь используются следующие обозначения:

$$a(q) = \frac{1}{\hbar^{2/3}} \frac{Q(q)}{|dQ(q)/dq|^{2/3}}, \quad b_1(q) = \frac{1}{\hbar^{2/3}} \frac{dQ(q)/dq}{|dQ(q)/dq|^{2/3}}, \quad b_2(q) = \frac{d^2Q(q)/dq^2}{dQ(q)/dq}. \quad (7)$$

Функции

$$y_1(a; t) = \frac{d}{da} \ln(\text{Ai}(a) + t\text{Bi}(a)), \quad (8)$$

$$y_2(a; t) = \frac{1}{30} \left[ -8a^2 (y_1(a; t))^2 - 3 - 4ay_1(a; t) + 8a^3 \right] \quad (9)$$

выражены с помощью хорошо изученных функций Эйри  $\text{Ai}(a)$  и  $\text{Bi}(a)$  [12].

Не удивительно, что асимптотики предложенного приближения совпадают с ВКБ-асимптотиками вдали от точек поворота. В то же время новое приближение воспроизводит известное [9] удовлетворительное приближение вблизи точек поворота.

Теперь можно построить в явном виде приближенные радиальные волновые функции для связанных состояний в случае степенного потенциала, когда  $Q(q)$  имеет вид (5).

Во-первых, необходимо воспроизвести правильное предельное поведение волновой функции в области около начала координат ( $r \rightarrow 0, q \rightarrow 0$ ):

$$\Psi_{ex}(r) \rightarrow r^{l+1}, \quad \Psi_{ex}(q) \rightarrow q^{sl+(s+1)/2}, \quad Y_{ex}(q) \rightarrow \frac{sl+(s+1)/2}{q}. \quad (10)$$

Указанное требование определяет значение  $t$  следующей формулой:

$$t_0 = \frac{-c(l, s)\text{Ai}(a_0) + a_0(d\text{Ai}(a_0)/da_0)}{c(l, s)\text{Bi}(a_0) - a_0(d\text{Bi}(a_0)/da_0)}, \quad (11)$$

где  $c(l, s) = 1 - \sqrt{1 + \frac{5}{4} \left( \frac{8a_0^3 - 3}{10} + s(l + 1/2) + 1/2 \right)}$ ,  $a_0 = \left( \frac{s^2}{4} (l + 1/2)^2 - \frac{1}{16} \right)^{1/3}$ .

Две действительные точки поворота  $q_-$  и  $q_+$  ( $Q(q_{\pm}) = 0$ ) разделяют три области.

В первой области, где  $0 < q < q_-$ , выбираем единственную приближенную частную логарифмическую производную  $Y(q; t_0)$ . Во второй области, где  $q_- < q < q_+$ , следует описать осциллирующее решение исходного уравнения Шрёдингера (1). Поэтому в данном случае выбираются две приближенные частные логарифмические производные  $Y(q; +i)$  и  $Y(q; -i)$ . В третьей области, где  $q > q_+$ , необходимо описать только убывающее решение исходного уравнения Шрёдингера (1). В этом случае выбираем единственную приближенную частную логарифмическую производную  $Y(q; 0)$ . В случае  $l = 0, s = 1$  полагаем  $q_- = 0$ .

Поскольку в развиваемом подходе точки поворота не являются сингулярными, то не возникает трудностей с формулами связи, которые появляются в обычном ВКБ-методе. Сшивая частные решения в точках поворота, получаем приближение для радиальной волновой функции

$$\Psi_{app}(r) = N_{app} r^{(s-1)/2s} \Psi_{app}(q), \quad (12)$$

где функция  $\Psi_{app}(q)$  представлена следующими формулами:

$$\Psi_1(q) = \cos \varphi \exp \left( - \int_q^{q_-} Y(q'; t_0) dq' \right), \quad (13)$$

если  $0 < q < q_-$ ;

$$\Psi_2(q) = \exp \left( \int_{q_-}^q \frac{Y(q'; +i) + Y(q'; -i)}{2} dq' \right) \cos \left( \int_{q_-}^q \varepsilon \frac{Y(q'; +i) - Y(q'; -i)}{2i} dq' - \varphi \right), \quad (14)$$

если  $q_- < q < q_+$ ;

$$\Psi_3(q) = \frac{1}{2} (-1)^n \exp \left( \int_{q_+}^q Y(q'; 0) dq' \right) \exp \left( \int_{q_-}^{q_+} \frac{Y(q'; +i) + Y(q'; -i)}{2} dq' \right), \quad (15)$$

если  $q > q_+$ . Здесь

$$q = r^{1/s}, \quad \varphi = \frac{\pi}{3} - \arctg t_0, \quad \varepsilon = (dQ(q) / dq) |dQ(q) / dq|^{-1}$$

и  $N_{app}$  – нормировочный постоянный множитель.

Из требования непрерывности волновой функции получаем правило квантования

$$\int_{q_-}^{q_+} \varepsilon \frac{Y(q; +i) - Y(q; -i)}{2i} dq = \pi(n + 1/3) + \varphi, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (16)$$

которое неявно определяет спектральное значение энергии.

Удобно ввести безразмерные величины

$$x = \left( \frac{2m\alpha}{\hbar^2} \right)^{1/(k+2)} r, \quad e = \left( \frac{2m}{\hbar^2 \alpha^{2/k}} \right)^{k/(k+2)} E.$$

Тогда уравнение Шрёдингера переписывается в виде

$$H\psi(x) - e\psi(x) = 0 \quad (17)$$

с гамильтонианом

$$H = -\frac{d^2}{dx^2} + x^k + \frac{l(l+1)}{x^2}. \quad (18)$$

Заметим, что до сих пор значение  $s$  не фиксировалось. Будем рассматривать  $s$  как варьируемый параметр, а  $\Psi_{app}(r) \equiv \psi(s, x)$  – как пробную функцию в вариационном подходе.

До настоящего времени в рамках вариационного подхода остается неразрешенным вопросом о том, как найти универсальный критерий выбора оптимального значения вариационного параметра. По нашему мнению, такой критерий должен быть прямо связан с исходной спектральной задачей. Перепишем уравнение Шрёдингера для нормированной волновой функции в следующем виде:

$$\frac{H\psi(x)}{\langle \psi | H | \psi \rangle} - \psi(x) = 0. \quad (19)$$

В соответствии с (19) в [4] введены вектор невязки

$$|D(s)\rangle = \frac{H|\psi(s)\rangle}{\langle \psi(s) | H | \psi(s) \rangle} - |\psi(s)\rangle \quad (20)$$

и локальная невязка

$$D(s, x) = \langle x | D(s) \rangle = \frac{H\psi(s, x)}{\langle \psi(s) | H | \psi(s) \rangle} - \psi(s, x) \quad (21)$$

для нормированной пробной функции  $\psi(s, x)$ , которая не является точным решением уравнения (19). В случае приближенной функции  $\psi(s, x)$  имеем неравенство  $D(s, x) \neq 0$ .

В дополнение к локальной невязке определим интегральную невязку

$$d(s) = \langle D(s) | D(s) \rangle = \frac{\langle \psi(s) | H^2 | \psi(s) \rangle}{\langle \psi(s) | H | \psi(s) \rangle^2} - 1, \quad (22)$$

которая характеризует качество приближения и равна нулю для точного решения уравнения Шрёдингера.

Введенная характеристика  $d(s)$  имеет прямой геометрический смысл. Зададим нормированный пробный вектор  $|\psi(s)\rangle$  в гильбертовом пространстве. При действии оператора  $H$  получим вектор  $H|\psi(s)\rangle$ . Можно найти угол  $\theta(s)$  между векторами  $|\psi(s)\rangle$  и  $H|\psi(s)\rangle$  из скалярного произведения этих векторов:

$$\cos \theta(s) = \frac{\langle \psi(s) | H | \psi(s) \rangle}{\sqrt{\langle \psi(s) | H^2 | \psi(s) \rangle}}. \quad (23)$$

Отсюда получим следующее соотношение

$$\operatorname{tg}^2 \theta(s) = d(s). \quad (24)$$

Гамильтониан  $H$  поворачивает приближенный пробный вектор на угол  $\theta(s)$  и растягивает его, тогда как при действии гамильтониана точный собственный вектор только растягивается, но не поворачивается. Степень близости приближенного собственного вектора к точному собственному вектору определяется углом поворота  $\theta(s)$ . Определим оптимальное значение  $s_0$  вариационного параметра из условия минимальности интегральной невязки. Заметим, что ищется абсолютный минимум функции  $d(s)$ .

Можно вычислить две величины

$$e_1(s) = \langle \psi(s) | H | \psi(s) \rangle \quad (25)$$

и

$$e_2(s) = \sqrt{\langle \psi(s) | H^2 | \psi(s) \rangle} \quad (26)$$

с помощью найденных нормированных приближенных волновых функций ( $\langle \psi(s) | \psi(s) \rangle = 1$ ). Следует подчеркнуть, что  $e_1(s) \neq e_2(s)$ , когда волновые функции не являются точными. Будем характеризовать приближение величинами энергетических погрешностей

$$\delta e_1(s) = \frac{e_1(s)}{e_{ex}} - 1, \quad \delta e_2(s) = \frac{e_2(s)}{e_{ex}} - 1, \quad (27)$$

где  $e_{ex}$  – точное значение энергии.

Табл. 1 показывает существенную зависимость характеристик  $d$ ,  $\delta e_1$  и  $\delta e_2$  от варьируемого параметра  $s$  в частном случае  $k=2$ ,  $l=1$ ,  $n=2$ . Видно, что уменьшение интегральной невязки приводит к значительному уменьшению характеристик  $\delta e_1$  и  $\delta e_2$ . Здесь  $s_o = 4,33$ .

В табл. 2–4 представлена оценка приближения, когда значение варьируемого параметра является оптимальным ( $s = s_o$ ), и, следовательно, интегральная невязка становится минимальной. Значения величин  $\delta e_1$  и  $\delta e_2$  для потенциалов с  $k=1$  и  $k=4$  вычислены с использованием результатов точного численного расчета энергий в [13]. Дано сравнение наших результатов с недавними результатами применения так называемого интегрального квазиклассического метода в случае сферически-симметричных потенциалов [14]. Для линейного потенциала с  $l=0$  используемый нами подход дает точные значения энергии. Таблицы 2–4 демонстрируют пригодность предложенного в данной работе приближения в случае степенных потенциалов для различных значений квантовых чисел  $l$  и  $n$ . Видно, что  $s_o = 1$  для  $l=0$  и различных  $k$  и  $n$ , как и в [3], однако значения  $s_o$  зависят от  $k$ ,  $l$  и  $n$ , если  $l \neq 0$ .

Таблица 1. Зависимость  $d$ ,  $\delta e_1$ ,  $\delta e_2$  от  $s$  для  $k=2$ ,  $l=1$ ,  $n=2$

$s$	$d$	$\delta e_1$	$\delta e_2$
1	$1,173 \cdot 10^{-3}$	$7,271 \cdot 10^{-4}$	$1,314 \cdot 10^{-3}$
2	$1,117 \cdot 10^{-4}$	$4,280 \cdot 10^{-5}$	$9,864 \cdot 10^{-5}$
4,33	$4,333 \cdot 10^{-5}$	$1,438 \cdot 10^{-5}$	$3,605 \cdot 10^{-5}$
$\infty$	$9,722 \cdot 10^{-5}$	$2,308 \cdot 10^{-5}$	$7,396 \cdot 10^{-5}$

Таблица 2. Численная проверка предложенного приближения в случае  $k=1$

$l$	$n$	$e_{ex}$	$\delta e$ [14]	$s_o$	$d$	$\delta e_1$	$\delta e_2$
0	0	2,33811	$5,00 \cdot 10^{-3}$	1	0	0	0
0	1	4,08795	$1,50 \cdot 10^{-3}$	1	0	0	0
0	2	5,52056	$7,00 \cdot 10^{-4}$	1	0	0	0
1	0	3,36126	$1,20 \cdot 10^{-3}$	1,59	$5,916 \cdot 10^{-3}$	$1,021 \cdot 10^{-3}$	$3,978 \cdot 10^{-3}$
1	1	4,88445	$7,00 \cdot 10^{-4}$	2,54	$5,986 \cdot 10^{-5}$	$3,168 \cdot 10^{-5}$	$6,160 \cdot 10^{-5}$
1	2	6,20762	$4,00 \cdot 10^{-4}$	4,55	$1,586 \cdot 10^{-5}$	$1,007 \cdot 10^{-5}$	$1,799 \cdot 10^{-5}$
2	0	4,24818	$5,00 \cdot 10^{-4}$	1,62	$3,068 \cdot 10^{-3}$	$7,122 \cdot 10^{-4}$	$2,246 \cdot 10^{-3}$
2	1	5,62971	$3,00 \cdot 10^{-4}$	1,89	$1,307 \cdot 10^{-5}$	$1,560 \cdot 10^{-5}$	$2,213 \cdot 10^{-5}$

Таблица 3. Численная проверка предложенного приближения в случае  $k=2$

$l$	$n$	$e_{ex}$	$s_o$	$d$	$\delta e_1$	$\delta e_2$
0	0	3	1	$1,217 \cdot 10^{-4}$	$5,634 \cdot 10^{-5}$	$1,172 \cdot 10^{-4}$
0	1	7	1	$1,417 \cdot 10^{-6}$	$1,889 \cdot 10^{-6}$	$2,598 \cdot 10^{-6}$
0	2	11	1	$1,630 \cdot 10^{-7}$	$3,330 \cdot 10^{-7}$	$4,145 \cdot 10^{-7}$
1	0	5	1,31	$1,327 \cdot 10^{-2}$	$1,727 \cdot 10^{-3}$	$8,353 \cdot 10^{-3}$
1	1	9	2,27	$1,771 \cdot 10^{-4}$	$5,927 \cdot 10^{-5}$	$1,478 \cdot 10^{-4}$
1	2	13	4,33	$4,333 \cdot 10^{-5}$	$1,438 \cdot 10^{-5}$	$3,605 \cdot 10^{-5}$
2	0	7	1,32	$7,559 \cdot 10^{-3}$	$1,147 \cdot 10^{-3}$	$4,923 \cdot 10^{-3}$
2	1	11	1,64	$3,882 \cdot 10^{-5}$	$2,912 \cdot 10^{-5}$	$4,853 \cdot 10^{-5}$
2	2	15	2,52	$1,207 \cdot 10^{-5}$	$6,435 \cdot 10^{-6}$	$1,247 \cdot 10^{-5}$

Таблица 4. Численная проверка предложенного приближения в случае  $k = 4$

$l$	$n$	$e_{ex}$	$\delta e$ [14]	$s_o$	$d$	$\delta e_1$	$\delta e_2$
0	0	3,79967	$-2,85 \cdot 10^{-2}$	1	$1,683 \cdot 10^{-3}$	$2,552 \cdot 10^{-4}$	$1,097 \cdot 10^{-3}$
0	1	11,6448	$-5,30 \cdot 10^{-3}$	1	$3,256 \cdot 10^{-5}$	$5,366 \cdot 10^{-6}$	$2,165 \cdot 10^{-5}$
0	2	21,2384	$-1,80 \cdot 10^{-3}$	1	$3,965 \cdot 10^{-6}$	$6,498 \cdot 10^{-7}$	$2,632 \cdot 10^{-6}$
1	0	7,10845	$-1,00 \cdot 10^{-2}$	1,02	$1,882 \cdot 10^{-2}$	$2,866 \cdot 10^{-3}$	$1,226 \cdot 10^{-2}$
1	1	16,0327	$-3,80 \cdot 10^{-3}$	1,94	$4,827 \cdot 10^{-4}$	$1,198 \cdot 10^{-4}$	$3,611 \cdot 10^{-4}$
1	2	26,3500	$-1,60 \cdot 10^{-3}$	3,66	$1,131 \cdot 10^{-4}$	$3,271 \cdot 10^{-5}$	$8,924 \cdot 10^{-5}$
2	0	10,8424	$-4,70 \cdot 10^{-3}$	1,005	$1,307 \cdot 10^{-2}$	$1,654 \cdot 10^{-3}$	$8,178 \cdot 10^{-3}$
2	1	20,6435	$-3,00 \cdot 10^{-3}$	1,40	$1,131 \cdot 10^{-4}$	$5,495 \cdot 10^{-5}$	$1,115 \cdot 10^{-4}$
2	2	31,6147	$-1,70 \cdot 10^{-3}$	2,23	$3,768 \cdot 10^{-5}$	$1,199 \cdot 10^{-5}$	$3,084 \cdot 10^{-5}$

Хотя модифицированный квазиклассический метод и дает удовлетворительное качественное описание волновых функций в важном случае радиального уравнения Шрёдингера со степенными потенциалами при использовании достаточно широкого класса степенных подстановок, однако можно добиться существенного улучшения количественных результатов с помощью оптимального выбора подстановки, которая определяется условием минимальности интегральной невязки.

### Литература

1. Langer R. E. // Phys. Rev. 1937. Vol. 51. P. 669–676.
2. Fröman N., Fröman P. O. // Phase-Integral Method: Allowing Nearlying Transition Points. New York, 1996.
3. Kudryashov V. V. // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. 2006. Vol. 9. P. 403–409.
4. Kudryashov V. V., Reshetnyak V. I. // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. 2008. Vol. 11. P. 385.
5. Krieger J. B., Rosenzweig C. // Phys. Rev. 1967. Vol. 164. P. 171–173.
6. Seetharaman M., Vasan S. S. // J. Math. Phys. 1986. Vol. 27. P. 1031–1036.
7. Lakshmanan M. et al. // Phys. Rev. A. 1994. Vol. 49. P. 3296–3309.
8. Bender C. M., Olaussen K., Wang P. S. // Phys. Rev. D. 1977. Vol. 16. P. 1740–1748.
9. Bender C. M., Orszag S. A. Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers. New York, 1978.
10. Кудряшов В. В. // Докл. НАН Беларуси. 1998. Т. 42. С. 45–49.
11. Kudryashov V. V., Vannu Yu. V. // J. Appl. Math. 2002. Vol. 2. P. 265–275.
12. Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям. М., 1979.
13. Карнаков Б. М., Мур В. Д., Попов В. С. // ЖЭТФ. 1995. Т. 107. С. 1768–1779.
14. Лобашев А. А., Трунов Н. Н. // ТМФ. 2000. Т. 124. С. 463–480.

V. V. KUDRYASHOV, A. V. BARAN

### UNIFICATION OF MODIFIED SEMI-CLASSICAL METHOD AND VARIATIONAL APPROACH FOR SOLUTION OF THE RADIAL SCHRÖDINGER EQUATION

#### Summary

The trial radial wave functions are constructed with the help of explicit summation of the leading constituent WKB series and varied power-law substitution. The optimal value of a variational parameter is found by means of minimization of integral discrepancy. The proposed approach is applied to the power-law potentials.

УДК 534.8:535.5

В. Г. ГУДЕЛЕВ<sup>1</sup>, Г. В. КУЛАК<sup>2</sup>, А. Г. МАТВЕЕВА<sup>2</sup>

**УГЛОВОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ГИПЕРЗВУКА,  
ВОЗБУЖДАЕМОГО ЛАЗЕРНЫМИ ИМПУЛЬСАМИ В ТВЕРДЫХ ТЕЛАХ**

<sup>1</sup> Институт физики им. Б. И. Степанова НАН Беларуси

<sup>2</sup> Мозырский государственный педагогический университет им. И. П. Шамякина

(Поступила в редакцию 16.07.2010)

**Введение.** При создании устройств неразрушающего контроля и оптической диагностики используют различные методы возбуждения ультразвука в твердых телах, в том числе основанные на явлениях теплового расширения, электрострикции, оптического пробоя [1–3]. Генерация объемных ультразвуковых (УЗ) волн в условиях брэгговской дифракции света на ультразвуке в стекле при воздействии импульсных лазерных пучков, различающихся частотой на  $\Delta f = 116$  МГц, реализована в работе [3]. В настоящее время значительный интерес для исследователей и разработчиков представляют особенности генерации акустических импульсов в линейном и нелинейном режиме оптико-акустического возбуждения в непрозрачных материалах [1]. Особое внимание уделяется нелинейному режиму лазерной абляции, при котором достигаются наиболее высокие уровни давления на поверхность твердого тела [1, 4]. Оптико-акустические источники ультразвука имеют ряд преимуществ перед традиционными: отсутствие контакта со средой, возможность легкого изменения геометрических параметров оптико-акустической антенны [4]. Для диагностики дефектов материалов используют раздельно-совмещенные источники и приемники ультразвука [5]. В этом случае применяют источник ультразвука в виде полоски прямоугольной формы, наклоненной к поверхности твердого тела под углом  $\beta$ . Схема возбуждения и приема УЗ волн через призму представлена на рис. 1.

Область возбуждения гиперзвука имеет вид прямоугольника с размерами вдоль осей  $OX$  и  $OY$  соответственно:  $-a/2 \leq x \leq a/2$ ,  $-b/2 \leq y \leq b/2$ . Вычисление Фурье-компонент частотного спектра производится интегрированием по площади отверстия прямоугольной формы. Существуют три основных типа волн, используемых для неразрушающего контроля [1]:

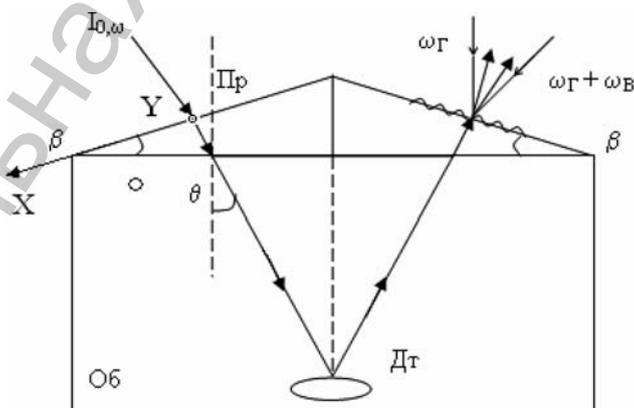


Рис. 1. Схема детектирования дефекта материала (Об – образец, Дт – дефект, Пр – призма,  $\theta$  – полярный угол,  $\beta$  – угол наклона призмы;  $\omega_{\Gamma}$ ,  $\omega_{\Gamma} + \omega_{\text{В}}$  – частоты оптического излучения, используемого в гетеродинной схеме детектирования рассеянного акустического сигнала)

продольные (L), сдвиговые (S) и рэлеевские (R). В дальнейшем будем рассматривать особенно-сти возбуждения объемных – продольных и сдвиговых – УЗ волн.

**Теоретические результаты и обсуждение.** Лазерный импульс длительностью  $\tau$  распространяется под углом  $\beta$  к оси  $OZ$  и возбуждает высокочастотные ультразвуковые волны различной поляризации и пространственно-углового распределения. При этом форма акустического импульса существенно отличается от формы светового [4, 6, 7], а эффективность преобразования световой энергии в ультразвуковую для конденсированных сред  $\sim 10^{-4}-10^{-5}$ . Предположим, что световой импульс имеет гауссово распределение, т. е.  $f(t) = \exp(-t^2 / \tau^2)$ . Ультразвуковая волна является затухающей с коэффициентом поглощения  $\alpha_s = \Gamma \cdot \Omega^2$ , где  $\Gamma$  – некоторый коэффициент, зависящий от рода материала и его физических свойств,  $\Omega \sim 1/\tau$  – частота ультразвука. Такая зависимость коэффициента поглощения гиперзвука от частоты характерна для поликристаллов, включая металлы [8]. Фурье-спектры продольной ( $\tilde{U}_l(\Omega)$ ) и сдвиговой ( $\tilde{U}_s(\Omega)$ ) ультразвуковых волн имеют вид [5, 9]:

$$\tilde{U}_l(\Omega) = \frac{P_f a b \gamma^2 e^{-\alpha_s r}}{4\pi\mu r \cos^2 \beta} D_l(\theta) \frac{\sin(A_l)}{A_l} \frac{\sin(B_l)}{B_l} e^{i(k_l r - \Omega t)}, \quad (1)$$

$$\tilde{U}_s(\Omega) = \frac{P_f a b e^{-\alpha_s r}}{4\pi\mu r \cos^2 \beta} D_s(\theta) \frac{\sin(A_s)}{A_s} \frac{\sin(B_s)}{B_s} e^{i(k_s r - \Omega t)}, \quad (2)$$

где  $A_{l,s} = a(k_\beta \sin \beta - k_{l,s} \sin \theta \cos \alpha) / 2$ ,  $B_{l,s} = b(k_{l,s} \sin \theta \sin \alpha) / 2$ ,  $\theta$  – полярный угол,  $\alpha$  – азимутальный угол, отсчитываемый от оси  $OX$ ,  $\beta$  – угол наклона призмы;  $P_f$  – давление на поверхность твердого тела в области воздействия оптического излучения;  $r$  – расстояние до точки наблюдения УЗ-волны;  $A_{l,s} = k_{l,s} \sin \theta$  ( $k_{l,s} = \Omega / v_{l,s}$ ,  $v_{l,s}$  – фазовые скорости продольной и сдвиговой УЗ-волны;  $k_\beta = \Omega / v_{lpr}$  ( $v_{lpr}$  – фазовая скорость продольной УЗ-волны в призме); угловые распределения продольных  $D_l$  и сдвиговых  $D_s$  УЗ-волн даются соотношениями [9]:

$$D_l(\theta) = \frac{\cos \theta (1 - 2\gamma^2 \sin^2 \theta)}{(2\gamma^2 \sin^2 \theta - 1)^2 + 4\gamma^3 \sin^2 \theta \cos \theta \sqrt{\gamma^2 - \sin^2 \theta}}, \quad (3)$$

$$D_s(\theta) = \frac{\sin \theta \cos \theta \sqrt{\gamma^2 - \sin^2 \theta}}{(2\sin^2 \theta - 1)^2 + 4\sin^2 \theta \cos \theta \sqrt{\gamma^2 - \sin^2 \theta}}, \quad (4)$$

где  $\gamma = \mu / (\lambda + 2\mu)$ , причем  $\lambda, \mu$  – постоянные Ламе.

Временная форма акустического импульса дается соотношением [1, 4]:

$$U_{l,s}(\tilde{t}_{l,s}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{U}_{l,s}(\Omega) F(\Omega) e^{-i\Omega \tilde{t}_{l,s}} d\Omega, \quad (5)$$

где  $\tilde{t}_{l,s} = t - r / v_{l,s}$ ,  $F(\Omega) = \tau_a \sqrt{\pi} \exp(-\tau_a^2 \Omega^2 / 4)$  – частотный спектр акустического импульса при угле  $\theta = 0$ . Длительность акустического импульса  $\tau_a$  определяется особенностями поглощения энергии светового импульса поверхностью металла [4, 6, 7].

Подставив выражения (1) – (4) в (5) и выполнив интегрирование численными или аналитическими методами (см. [10, 11]), получим временную форму акустического импульса продольной  $U_l(t)$  и сдвиговой  $U_s(t)$  ультразвуковой волны. При численных расчетах применяется алгоритм быстрого преобразования Фурье.

В одномерном случае оптико-акустического возбуждения ультразвука ( $b \gg a$ ) вычисление по формуле (5) удастся провести аналитически [11], тогда амплитуды смещений даются выражениями:

$$U_l(\tilde{t}_l) = \frac{P_f ab \gamma^2 \sqrt{\tau_a}}{16\sqrt{\pi} \mu r} D_l(\theta) T_V^l(\tilde{t}_l), \quad (7)$$

$$U_s(\tilde{t}_s) = \frac{P_f ab \sqrt{\tau_a}}{4\sqrt{\pi} \mu r} D_s(\theta) T_V^s(\tilde{t}_s), \quad (8)$$

где

$$T_V^{l,s}(\tilde{t}_s) = \frac{\sqrt{i^4 \sqrt{2}}}{q_{l,t}} \exp\left[-\frac{(\tilde{t}_{l,s}^2 + q^2)}{2\tau_a^2}\right] (iT_{V+}^{l,s} - T_{V-}^{l,s}),$$

причем  $q_{l,s} = a \sin \theta / v_{l,s}$ ,

$$T_{V\pm}^{l,s} = [\sqrt{\tilde{t}_{l,s} \pm q_{l,s}} \exp(\mp q_{l,s} \tilde{t}_{l,s} / \tau_a^2 \mp i\sqrt{2}(\tilde{t}_{l,s} \pm q_{l,s}) / \tau_a) - \sqrt{\tilde{t}_{l,s} \mp q_{l,s}} \exp(\pm q_{l,s} \tilde{t}_{l,s} / \tau_a^2 \mp i\sqrt{2}(\tilde{t}_{l,s} \mp q_{l,s}) / \tau_a)].$$

Численные расчеты проводились для продольной УЗ волны и материала, выполненного из стали (Fe). При этом полагалось, что  $P_f = 10$  МПа,  $\rho = 7800$  кг/м<sup>3</sup>,  $v_l = 5100$  м/с,  $a = b = 3$  мм,  $\lambda = 0,49 \cdot 10^{10}$  Па,  $\mu = 7,84 \cdot 10^{10}$  Па,  $r = 10$  мм,  $\Gamma = 10^{-10}$  Гц<sup>-2</sup>.

На рис. 2 представлена форма акустического импульса  $U_l$  продольных УЗ волн для падающего гауссового импульса длительностью  $\tau = 10^{-9}$  с. Такой импульс преобразуется в акустический импульс, распространяющийся в том же направлении и имеющий длительность  $\tau_a = 10^{-6}$  с. В общем случае фазовые скорости продольных УЗ волн в материале призмы  $v_{lpr}$  и диагностируемом материале  $v_l$  отличаются между собой. Для упрощения расчетов положим, что угол  $\beta = 0$  и область лазерного возбуждения имеет форму прямоугольника площадью, равной  $ab$ . В таком случае угловое распределение возбуждаемого гиперзвука определяется полярным углом  $\theta$  и азимутальным углом  $\alpha$ .

При малых углах отклонения от нормали (рис. 2, а) форма акустического импульса близка к гауссовому распределению в дальней зоне дифракции. С увеличением угла  $\theta$  в акустическом импульсе появляется провал в центре временной характеристики ( $\tilde{t}_l = 0$ , рис. 2, б). При малых углах с увеличением полярного угла амплитуда и длительность импульса (по уровню 3 дБ) увеличивается; при больших углах имеют место противоположные закономерности.

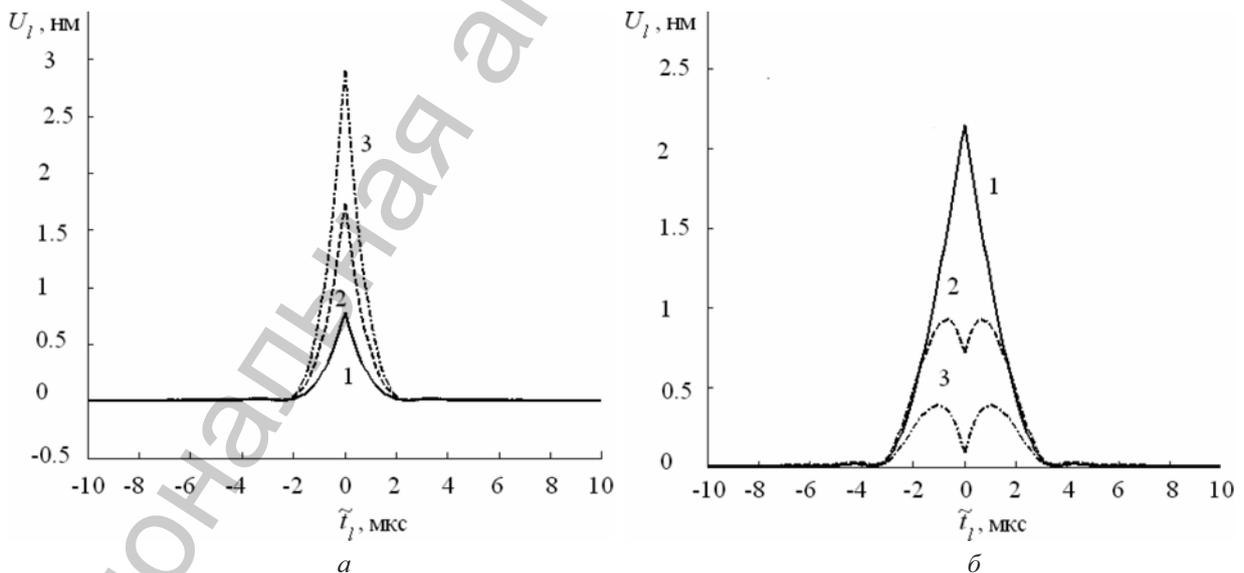


Рис. 2. Зависимость нормированной амплитуды смещения  $U_l$  от времени  $\tilde{t}_l$  для малых (а) полярных углов  $\theta$ : 1 – 10°, 2 – 15°, 3 – 20° и больших (б) углов  $\theta$ : 1 – 65°, 2 – 75°, 3 – 85° ( $a = b = 3$  мм,  $r = 10$  мм,  $v_l = 5100$  м/с,  $\tau_a = 1$  мкс,  $P_f = 10$  МПа,  $\alpha = 0$ ,  $\beta = 0$ ,  $\alpha_s = 0$ )

Следует отметить, что при значительных азимутальных углах  $\alpha$  ( $\alpha \geq 10^\circ$ ) и больших полярных углах  $\theta$ , соответствующих рис. 2, б, провала в центра импульса не наблюдается. Акустический импульс имеет форму, близкую к гауссовому, а изменяется лишь его амплитуда и длительность.

Диаграмма направленности акустического импульса продольных и сдвиговых УЗ волн определяется параметрами  $D_{l,s}$  и размерами полоски возбуждения  $a$  и  $b$ . Продольные УЗ волны возбуждаются практически при любых углах (кроме  $\theta = \pm 90^\circ$ ). Сдвиговые УЗ волны не возбуждаются при углах  $\theta = \pm \arcsin \gamma$ ; при  $\theta = \pm 36^\circ$  наблюдается отчетливо выраженный максимум сдвиговых УЗ волн [5, 9]. Максимальная амплитуда сдвиговых УЗ волн примерно в восемь раз превышает максимальную амплитуду продольных.

Расчеты показывают, что амплитуда акустического импульса продольных УЗ волн уменьшается при увеличении размера области лазерного возбуждения  $a$  квадратной формы. При увеличении размера области возбуждения УЗ волны квадратной формы  $a$  от 3 до 9 мм амплитуда импульса уменьшается от 2,3 до 0,1 нм. Эта особенность обусловлена дифракционными особенностями возбуждения гиперзвука, определяемыми функцией  $\sin(A)/A$ . При увеличении коэффициента поглощения ультразвука от 0 до  $7 \text{ см}^{-1}$  амплитуда акустического импульса уменьшается от 2,4 до 1,2 нм; длительность акустического импульса увеличивается при увеличении коэффициента поглощения  $\alpha_s$ .

**Заключение.** Рассмотренные особенности оптико-акустического возбуждения высокочастотного ультразвука показывают, что диаграмма направленности такого источника может легко изменяться варьированием размеров полоски прямоугольной формы и угла наклона призмы возбуждения, наложенной на поверхность твердого тела. Установлено, что форма гауссового акустического импульса, распространяющегося вдоль нормали к поверхности твердого тела, существенно трансформируется при увеличении полярного и азимутального угла. Это позволяет диагностировать дефекты материалов, регистрируя временную форму оптико-акустического источника излучения.

### Литература

1. Zang S. Y., Paul M., Fassbender S., Schleichert U. And Arnold W. // Res. Nondestr. Eval. 1990. Vol. 2. P. 143–155.
2. Прохоренко П. П. // Современные методы и приборы контроля качества и диагностики состояния объектов: материалы Междунар. науч.-техн. конф. Могилев, 2004. С. 3–7.
3. Аджамов А. А. // Акуст. журн. 1988. Т. 34, вып. 2. С. 209–214.
4. Лямшев Л. М. // Успехи физ. наук. 1981. Т. 135, вып. 4. С. 636–669.
5. Буденков Г. А., Недзведская О. В. Динамические задачи теории упругости в приложении к проблемам акустического контроля и диагностики, М., 2004.
6. Островская Г. В. // ЖТФ. 2002. Т. 72, вып. 10. С. 95–102.
7. Носов В. В., Мажукин В. И. // Математическое моделирование. 1994. Т. 6, № 1. С. 3–53.
8. Труэлл Р., Эльбаум Ч., Чик Б. Ультразвуковые методы в физике твердого тела. М., 1972.
9. Kharusi M. S., Farnell G. W. // J. Acoust. Soc. Amer. 1970. Vol. 48, N 2. P. 665–670.
10. Справочник по специальным функциям. С формулами, графиками и математическими таблицами / Под ред. М. Абрамовица и И. Стигана. М., 1979.
11. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов сумм рядов и произведений, М., 1963.

V. G. GUDELEV, G. V. KULAK, A. G. MATVEEVA

### ANGLE DISTRIBUTION OF HYPERSOUND GENERATED BY LASER PULSES IN SOLIDS

#### Summary

Features of laser excitation of ultrasonic waves through a prism by a radiation source of rectangular form are investigated. It is shown that with increase in a polar angle (for small angles  $\sim 10\text{--}30^\circ$ ) there is an increase in amplitude and reduction of duration of an ultrasonic impulse; for big polar angles ( $\sim 60\text{--}80^\circ$ ) with their increase the amplitude of an impulse decreases, and in its centre there is a failure. It is established that with increase in the size of the excitation area of rectangular form the amplitude of an impulse can decrease; with increase in the factor of absorption of ultrasound its amplitude decreases, and duration increases.

УДК 548.0

С. Н. ДОВЫДЕНКО

**ОСОБЕННОСТИ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СВЕТА  
ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНЫМ БИИЗОТРОПНЫМ СЛОЕМ**

*Белорусский государственный университет*

*(Поступила в редакцию 01.10.2010)*

**Введение.** В последнее время материалы с электрической и магнитной гиротропией [1–5], а также биизотропные среды, сочетающие свойства гиротропного и невзаимного материалов, в материальных уравнениях которых взаимная зависимость электрического и магнитного полей определяется вещественными коэффициентами [6–8], привлекают пристальное внимание исследователей. Это связано с перспективами их использования при создании компактных оптических устройств, таких как волоконно-оптические волноводы, оптические модуляторы и т. д. В проведенных ранее исследованиях изучены особенности распространения собственных волн в биизотропных средах [8–9], получены коэффициенты отражения и преломления световых волн на границе изотропной и биизотропной сред [10–11], а также двух биизотропных сред [12], определена зависимость угла Брюстера от параметров биизотропной среды [13]. В настоящей статье решена задача преобразования произвольно поляризованного излучения плоскопараллельным биизотропным слоем, окруженным различными средами. Исследуется влияние параметров слоя на характер отражения и пропускания.

**Расчет.** Рассмотрим вначале преобразование световой волны на границе полубесконечных изотропной и биизотропной сред. Для описания волн, распространяющихся в биизотропной среде, будем использовать уравнения Максвелла, представленные в виде [1]:

$$n(\mathbf{s} \times \mathbf{E}) = \mathbf{B}; -n(\mathbf{s} \times \mathbf{H}) = \mathbf{D}, \quad (1)$$

где  $n$  – показатель преломления биизотропной среды,  $\mathbf{s}$  – единичный вектор направления распространения световой волны,  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$  – векторы напряженности электрического и магнитного поля,  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{B}$  – векторы электрической и магнитной индукции.

Уравнения связи для биизотропной среды имеют вид [2]:

$$\mathbf{D} = \epsilon \left[ \mathbf{E} + \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} (\chi - ig) \mathbf{H} \right]; \mathbf{B} = \mu \left[ \mathbf{H} + \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} (\chi + ig) \mathbf{E} \right]. \quad (2)$$

Здесь  $\chi$  и  $g$  – действительные параметры невзаимности и киральности соответственно,  $\epsilon$  и  $\mu$  – электрическая и магнитная проницаемость биизотропной среды. Отметим, что уравнения (2) описывают при  $\chi = 0$  киральную среду (среду Пастера), а при  $g = 0$  – невзаимную среду (среду Теллегена). Как правило, значение параметра невзаимности  $\chi$  в средах мало и имеет порядок  $10^{-4}$  [13], однако в настоящее время получают среды с параметром невзаимности порядка  $10^{-1}$  [14].

Используя уравнения (1) и (2), получаем волновое уравнение для собственных волн, распространяющихся в биизотропной среде:

$$n^2 \mathbf{s} \times \mathbf{s} \times \mathbf{E} = -\mu \epsilon (1 - \chi^2 - g^2) \mathbf{E} + 2ign \sqrt{\mu \epsilon} \mathbf{s} \times \mathbf{E}, \quad (3)$$

откуда для показателя преломления имеем:

$$n_{\pm} = \sqrt{\mu \epsilon} (\sqrt{1 - \chi^2} \pm g). \quad (4)$$

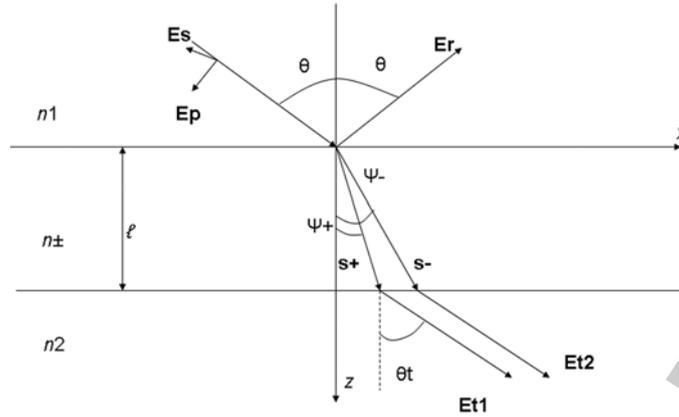


Рис. 1. Геометрия преобразования светового излучения биизотропным слоем

Таким образом, в биизотропной среде будут распространяться две волны с разными показателями преломления, зависящими как от параметра киральности, так и от значения невзаимности.

Пусть произвольно поляризованная волна падает на границу биизотропной среды (рис. 1), показатели преломления которой определяются соотношениями (4). Представим вектор электрической напряженности суперпозицией векторов:

$$\mathbf{E} = E_s \mathbf{e}_s + E_p \mathbf{e}_p, \quad (5)$$

один из которых ( $\mathbf{e}_p$ ) лежит в плоскости падения световой волны, а другой ( $\mathbf{e}_s$ ) ортогонален ей. Воспользовавшись граничными условиями непрерывности тангенциальных составляющих векторов магнитной и электрической напряженности и уравнениями (2), получим выражения для компонент векторов электрической и магнитной напряженностей волн, преломленных в биизотропную среду, и волны, отраженной от нее:

$$E_y^\pm = t_s^\pm E_s + t_p^\pm E_p, \quad E_x^\pm = \pm i s_z^\pm E_y^\pm, \quad E_z^\pm = \mp i s_x^\pm E_y^\pm; \quad (6)$$

$$\text{где } t_s^\pm = 2 \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} \cos \theta D(\theta) a_\pm; \quad t_p^\pm = \pm i 2 \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} \cos \theta D(\theta) b_\pm; \quad s_x^\pm = \sin \Psi_\pm; \quad s_z^\pm = \cos \Psi_\pm;$$

$$D(\theta) = \frac{1}{\left( \frac{\varepsilon}{\mu} + \frac{\varepsilon_1}{\mu_1} \right) (s_z^+ + s_z^-) \cos \theta + 2 \sqrt{\frac{\varepsilon \varepsilon_1}{\mu \mu_1}} \sqrt{1 - \chi^2} (\cos^2 \theta + s_z^+ s_z^-)};$$

$$a_\pm = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} (\sqrt{1 - \chi^2} \pm i \chi) \cos \theta + \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} s_z^\mp; \quad b_\pm = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} (\sqrt{1 - \chi^2} \pm i \chi) s_z^\mp + \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} \cos \theta;$$

$\theta$  – угол падения;  $\varepsilon_1$  и  $\mu_1$  – электрическая и магнитная проницаемости изотропной среды;  $n_1$  – показатель преломления изотропной среды;  $\Psi_\pm$  – угол преломления, определяемый соотношением  $n_1 \sin \theta = n_\pm \sin \Psi_\pm$ ;

$$E_s^r = r_{ss} E_s + r_{ps} E_p, \quad E_p^r = r_{sp} E_s + r_{pp} E_p, \quad (7)$$

$$r_{ss} = \left| D(\theta) \left[ \left( \frac{\varepsilon}{\mu} + \frac{\varepsilon_1}{\mu_1} \right) (s_z^+ + s_z^-) \cos(\theta) + 2 \sqrt{\frac{\varepsilon \varepsilon_1}{\mu \mu_1}} \sqrt{1 - \chi^2} (\cos^2(\theta) - s_z^+ s_z^-) \right] \right|;$$

$$r_{pp} = \left| D(\theta) \left[ \left( \frac{\varepsilon}{\mu} - \frac{\varepsilon_1}{\mu_1} \right) (s_z^+ + s_z^-) \cos(\theta) + 2 \sqrt{\frac{\varepsilon \varepsilon_1}{\mu \mu_1}} \sqrt{1 - \chi^2} (\cos^2(\theta) - s_z^+ s_z^-) \right] \right|;$$

$$r_{ps} = \left| D(\theta) \left[ 2\sqrt{\frac{\varepsilon\varepsilon_1}{\mu\mu_1}} \cos(\theta) (i\sqrt{1-\chi^2} (s_z^+ - s_z^-) - \chi(s_z^+ + s_z^-)) \right] \right|; r_{sp} = r_{ps}.$$

Согласно выражениям (6), в биизотропной среде будут распространяться две циркулярно поляризованные волны с противоположным направлением вращения. Из выражений (7), определяющих поле отраженной волны, видно, что независимо от поляризации падающей волны поляризация отраженной волны будет эллиптической.

Далее рассмотрим преобразование световой волны на границе полубесконечных биизотропной и изотропной сред, причем диэлектрическая и магнитная проницаемости последней соответственно  $\varepsilon_2$  и  $\mu_2$ . Из граничных условий следуют соотношения для коэффициентов преломления световых волн:

$$t_p''^{\pm} = \frac{\mp i 2\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} (\sqrt{1-\chi^2} \pm i\chi) s_z^{\mp}}{\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} s_z^{\mp} + \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} (\sqrt{1-\chi^2} \pm i\chi) \cos\theta_t}; \quad t_s''^{\pm} = \frac{2\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} (\sqrt{1-\chi^2} \pm i\chi) s_z^{\mp}}{\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} s_z^{\mp} + \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} (\sqrt{1-\chi^2} \pm i\chi) \cos\theta_t}. \quad (8)$$

Отметим, что угол преломления волн удовлетворяет соотношению  $n_2 \sin\theta_t = n_{\pm} \sin\Psi_{\pm}$ , где  $n_2$  – показатель преломления изотропной среды.

Для коэффициентов отражения циркулярно поляризованных волн из решения уравнений граничных условий получаем следующее выражение:

$$r''^{\pm} = \frac{\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} s_z^{\mp} - \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} (\sqrt{1-\chi^2} \pm i\chi) \cos\theta_t}{\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}} s_z^{\mp} + \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} (\sqrt{1-\chi^2} \pm i\chi) \cos\theta_t}. \quad (9)$$

Далее рассмотрим преобразование световой волны плоскопараллельным биизотропным слоем толщины  $\ell$ , разделяющим полубесконечные изотропные среды с диэлектрическими и магнитными проницаемостями  $\varepsilon_1, \mu_1$  и  $\varepsilon_2, \mu_2$  соответственно (рис. 1). Используя полученные соотношения (6) – (9), а также метод многолучевой интерференции [15], можем записать соотношения для коэффициентов преломления и отражения биизотропного плоскопараллельного слоя:

$$R_{ss} = r_{ss} + \frac{t_s^+ t_s'^+ r''^+ \exp(i\delta_+)}{1 - r'^+ r''^+ \exp(i\delta_+)} + \frac{t_s^- t_s'^- r''^- \exp(i\delta_-)}{1 - r'^- r''^- \exp(i\delta_-)}; \quad R_{sp} = r_{sp} + \frac{t_s^+ t_p'^+ r''^+ \exp(i\delta_+)}{1 - r'^+ r''^+ \exp(i\delta_+)} + \frac{t_s^- t_p'^- r''^- \exp(i\delta_-)}{1 - r'^- r''^- \exp(i\delta_-)}; \quad (10)$$

$$R_{pp} = r_{pp} + \frac{t_p^+ t_p'^+ r''^+ \exp(i\delta_+)}{1 - r'^+ r''^+ \exp(i\delta_+)} + \frac{t_p^- t_p'^- r''^- \exp(i\delta_-)}{1 - r'^- r''^- \exp(i\delta_-)}; \quad R_{ps} = r_{ps} + \frac{t_p^+ t_s'^+ r''^+ \exp(i\delta_+)}{1 - r'^+ r''^+ \exp(i\delta_+)} + \frac{t_p^- t_s'^- r''^- \exp(i\delta_-)}{1 - r'^- r''^- \exp(i\delta_-)};$$

$$T_{ss} = \frac{t_s^+ t_s''^+ \exp(i\delta_+)}{1 - r'^+ r''^+ \exp(i\delta_+)} + \frac{t_s^- t_s''^- \exp(i\delta_-)}{1 - r'^- r''^- \exp(i\delta_-)}; \quad T_{sp} = \frac{t_s^+ t_p''^+ \exp(i\delta_+)}{1 - r'^+ r''^+ \exp(i\delta_+)} + \frac{t_s^- t_p''^- \exp(i\delta_-)}{1 - r'^- r''^- \exp(i\delta_-)}; \quad (11)$$

$$T_{pp} = \frac{t_p^+ t_p''^+ \exp(i\delta_+)}{1 - r'^+ r''^+ \exp(i\delta_+)} + \frac{t_p^- t_p''^- \exp(i\delta_-)}{1 - r'^- r''^- \exp(i\delta_-)}; \quad T_{ps} = \frac{t_p^+ t_s''^+ \exp(i\delta_+)}{1 - r'^+ r''^+ \exp(i\delta_+)} + \frac{t_p^- t_s''^- \exp(i\delta_-)}{1 - r'^- r''^- \exp(i\delta_-)},$$

где  $\delta_{\pm} = \frac{4\pi}{\lambda_0} \ell n_{\pm} \cos\Psi_{\pm}$ ;  $\lambda_0$  – длина световой волны в вакууме. В соотношениях (10), (11) введены обозначения для коэффициентов отражения и преломления для границы биизотропной и изотропной среды (диэлектрическая и магнитная проницаемости последней соответственно  $\varepsilon_1$  и  $\mu_1$ ):

$$t_p^{\pm} = \frac{\mp i 2 \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} (\sqrt{1-\chi^2} \pm i\chi) s_z^{\mp}}{\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} s_z^{\mp} + \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} (\sqrt{1-\chi^2} \pm i\chi) \cos \theta}; \quad t_s^{\pm} = \frac{2 \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} (\sqrt{1-\chi^2} \pm i\chi) s_z^{\mp}}{\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} s_z^{\mp} + \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} (\sqrt{1-\chi^2} \pm i\chi) \cos \theta};$$

$$r'^{\pm} = \frac{\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} s_z^{\mp} - \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} (\sqrt{1-\chi^2} \pm i\chi) \cos \theta}{\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}} s_z^{\mp} + \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} (\sqrt{1-\chi^2} \pm i\chi) \cos \theta}.$$

Векторы электрической напряженности световых волн, прошедшей биизотропный слой и отраженной от него, определяются соотношениями:

$$E_s^T = T_{ss} E_s + T_{ps} E_p, \quad E_p^T = T_{sp} E_s + T_{pp} E_p, \quad E_s^R = R_{ss} E_s + R_{ps} E_p, \quad E_p^R = R_{sp} E_s + R_{pp} E_p. \quad (12)$$

Формулы (6) – (12) справедливы для любого направления распространения электромагнитных волн в биизотропной среде. Выражения, определяющие коэффициенты отражения и преломления для границы раздела изотропной и биизотропной сред, в случае  $\chi = 0$  и  $g = 0$  соответствуют формулам Френеля отражения и преломления волны на границе раздела диэлектриков.

**Результаты численного моделирования.** На основе полученных уравнений (7) – (11) произведен расчет амплитудных коэффициентов отражения и преломления биизотропной полубесконечной среды и биизотропного плоскопараллельного слоя при следующих значениях:  $\ell = 6 \cdot 10^{-6}$  м;  $\lambda = 1,06 \cdot 10^{-6}$  м;  $\mu = 1$ ;  $\varepsilon = 1,5$ ;  $\chi = 0,1$ ;  $g = 0,2$ ;  $\mu_1 = 1$ ;  $\varepsilon_1 = 1,1$ ;  $\mu_2 = 1$ ;  $\varepsilon_2 = 3,4$ . Проанализируем поле отраженной волны. Существует три случая преобразования световой волны биизотропной средой: 1) в биизотропной среде распространяются две волны; 2) в биизотропной среде распространяется только одна волна, а для второй выполняется условие полного отражения; 3) в биизотропной среде световая волна не распространяется, падающая волна испытывает полное отражение на первой границе. Как показывает расчет, при выполнении условия полного отражения для волны, распространяющейся в биизотропной среде с большей скоростью, существует возможность преобразования падающего  $s$ -поляризованного в  $p$ -поляризованное световое излучение, что возможно при равенстве нулю коэффициента  $r_{ss}$  ( $R_{ss}$ ), при этом  $r_{sp} \neq 0$  ( $R_{sp} \neq 0$ ) (см. формулы (7), (12)). Действительно, как видно из графиков (рис. 2, а, в), существуют углы падения  $s$ -поляризованного светового поля ( $\theta \approx 77^\circ$  для полубесконечной среды;  $\theta \approx 21^\circ, 77^\circ$  для плоскопараллельного слоя), при которых  $r_{ss} = 0$  ( $R_{ss} = 0$ ), а коэффициент  $r_{sp}$  ( $R_{sp}$ ) отличен от нуля и принимает значения от 0,1 до 0,8. Тогда, как следует из (7), (12), при указанных углах падения световой волны на границу раздела как с полубесконечной биизотропной средой, так и с биизотропным слоем имеет место поворот плоскости поляризации отраженного светового излучения относительно падающего на угол  $\pi/2$ . Величина угла падения, при которой наблюдается данное явление, будет уменьшаться при увеличении значений параметров киральности и невзаимности.

Подобный эффект поворота на угол  $\pi/2$  плоскости поляризации света при отражении от биизотропной полубесконечной среды или слоя при падении на них  $p$ -поляризованного излучения наблюдается, если возможно распространение двух собственных волн (4). При этом коэффициент отражения поля с ортогональной поляризацией имеет значение 0,1–0,2; а значение угла падения определяется из равенства нулю коэффициентов  $r_{pp}$  и  $R_{pp}$  (см. выражения (7), (12)). В случае выполнения условия полного отражения для волны, распространяющейся в биизотропной среде с большей скоростью, при отражении падающего  $p$ -поляризованного светового излучения от полубесконечной биизотропной среды не существует угла Брюстера, что демонстрирует кривая 1 (рис. 2, б).

В общем случае преобразования светового поля биизотропной средой или биизотропным плоскопараллельным слоем отраженная (рис. 2) и преломленная (рис. 3) волны будут эллиптически поляризованы независимо от поляризации падающего излучения. Отметим, что для невзаимной

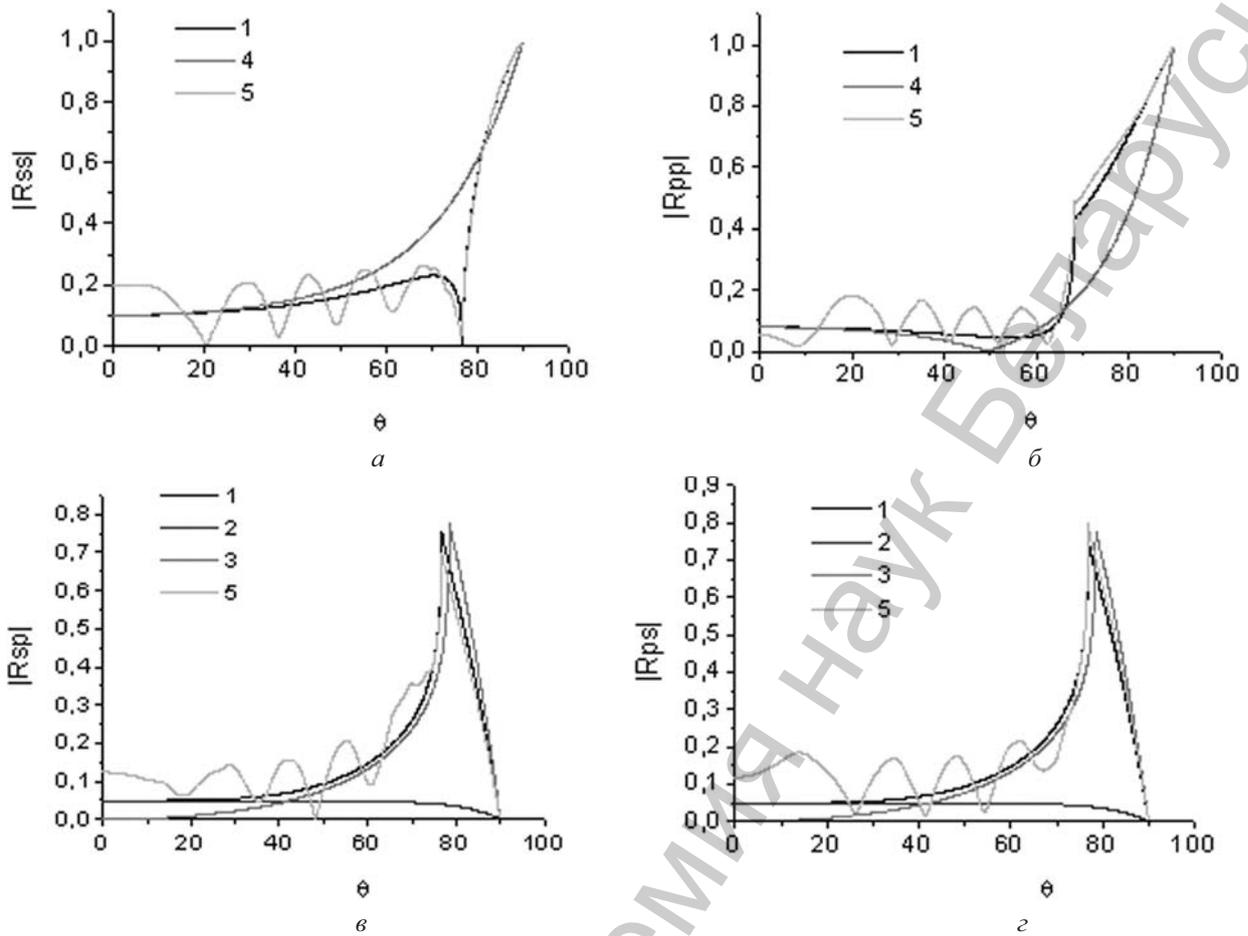


Рис. 2. Зависимость амплитудных коэффициентов отражения от угла падения световой волны: для полубесконечной биизотропной среды ( $1 - g = 0,2; \chi = 0,1$ ;  $2 - g = 0; \chi = 0,1$ ;  $3 - g = 0,2; \chi = 0$ ;  $4 - g = 0; \chi = 0$ ) и плоскопараллельного биизотропного слоя ( $5 - g = 0,2; \chi = 0,1$ )

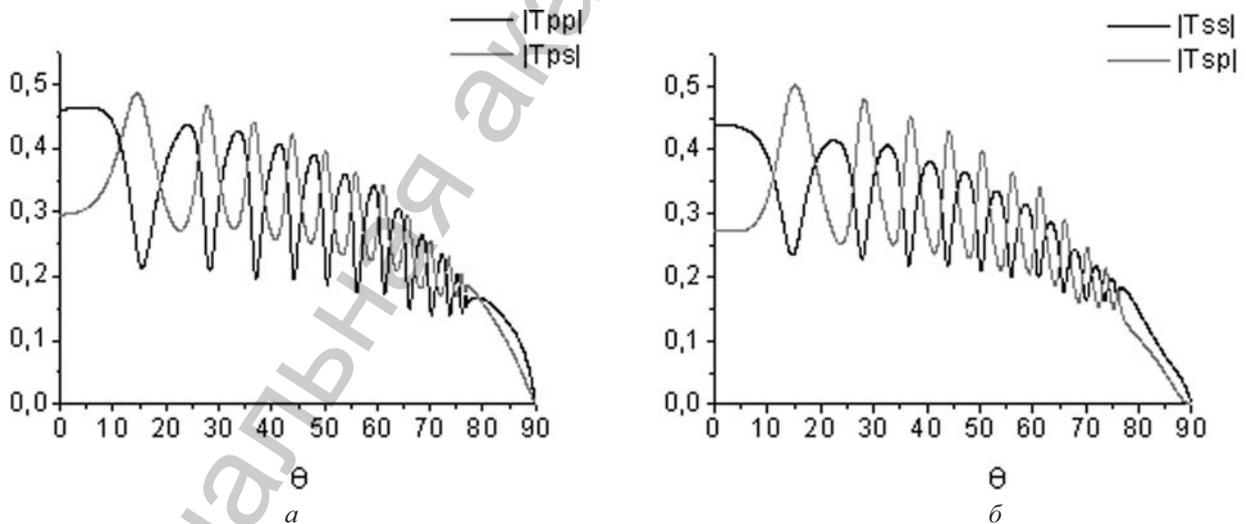


Рис. 3. Зависимость амплитудных коэффициентов пропускания плоскопараллельного биизотропного слоя с параметрами  $g = 0,2; \chi = 0,1$  от угла падения световой волны

среды это справедливо для широкого диапазона углов падения, начиная от близких к  $0^\circ$ , (кривая 2, рис. 2, в, г). Причем эллиптичность оказывается зависящей от параметров киральности и невзаимности, однако влияние последнего проявляется слабее.

**Выводы.** В настоящей статье получены корректные соотношения для коэффициентов отражения и преломления произвольно поляризованной световой волны, падающей на биизотропный слой под произвольным углом.

Показано, что отраженное и преломленное излучение оказывается эллиптически поляризованным, причем эллиптичность зависит от параметров киральности и невзаимности, однако влияние последнего проявляется слабее.

Установлена возможность и определены условия преобразования  $s$ -поляризованного в  $p$ -поляризованное световое излучение и обратно в биизотропном слое. Найдено, что для осуществления  $s \rightarrow p$  преобразования поляризации необходимо, чтобы угол падения световой волны на биизотропный слой отвечал условию неполного отражения, когда в слое возможно распространение одной собственной волны с меньшей скоростью. Показано, что эффективность  $p \rightarrow s$  поляризационного преобразования оказывается меньше, чем  $s \rightarrow p$ .

Полученные результаты представляют интерес при разработке поляризаторов на основе структур, содержащих биизотропные материалы.

### Литература

1. Федоров Ф. И. Теория гиротропии. Минск, 1976.
2. Бокуть Б. В., Сердюков А. Н., Федоров Ф. И. // Кристаллография. 1970. Т. 15. С. 1002–1006.
3. Филиппов В. В. // Опт. и спектр. 1977. Т. 42. С. 963–968.
4. Барковский Л. М. // Кристаллография. 1977. Т. 22. С. 21–26.
5. Семченко I. V., Третьяков S. A., Serdyukov A. N. Research on chiral and bianisotropic media in byelorussia and russia in the last ten years. In Progress in Electromagnetics research. Pier 12. Electromagnetic waves / Chief Editor: J. A. Kong. EMW Publishing Cambridge. Massachusetts, USA. P. 335–360.
6. Raab R. E., Sihvola A. H. // J. Phys. A: Math. Gen. 1997. Vol. 30. P. 1335.
7. Lakhtakia A., Weiglhofer W. S. // IEEE Trans. Microwave Theory Tech. 1995. Vol. 43. P. 2722.
8. Serdyukov A. N., Semchenko I. V., Tret'yakov S. A., Sihvola A. H. Electromagnetics of Bi-anisotropic Materials Theory and Applications. Gordon and Breach Science Publishers, Amsterdam, 2001.
9. Lindell I. V., Sihvola A. H., Tret'yakov S. A., Viitanen A. I. Electromagnetic waves in chiral and biisotropic media. London: Artech House, 1994.
10. Lindell I. V., Sihvola A. H. // Optics Communication. 1992. Vol. 89. P. 1–4.
11. Lindell I. V., Sihvola A. H. // Microwave and Optical Technology Letter. 1993 Vol. 6. P. 581–585.
12. Lindell I. V. // Microwave and Optical Technology Letter. 1993 Vol. 6. P. 228–230.
13. Lindell I. V., Sihvola A. H. // IEEE Microwave Symposium Digest 1992. Vol. 2. P. 1135–1138.
14. Krichev'tsov B. B., Pavlov V. V., Pisarev R. V., Gridnev V. N. // J. Phys.: Condens. Matter. 1993. Vol. 5. P. 8233–8244.
15. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. М., 1973.

S. N. DOVYDENKO

### PECULIARITIES OF LIGHT TRANSFORMATION BY THE PLATE-LAKE BIISOTROPIC LAYER

#### Summary

In this article the peculiarities of transformation of light wave with arbitrary polarization by a half-infinity biisotropic medium and a biisotropic layer surrounded by different media are considered. Analytical expressions are obtained for refraction and reflection coefficients of transformed waves. The influence of layer parameters on refraction and reflection is investigated.

It is shown that at arbitrary polarization of incident light the reflected wave is elliptically polarized. The possibility is established and the conditions are determined for  $\pi/2$  turning the polarization plate of the wave at reflection from the biisotropic medium/layer. The refraction of the light wave by a plate-lake biisotropic layer is analyzed. It is grounded that the wave, transmitted the layer, is elliptically polarized, at that its ellipticity depends on chiral and non-reciprocal parameters, the non-reciprocity influence is weaker.

УДК 621.373.826

В. В. КОЛОС<sup>1</sup>, М. И. МАРКЕВИЧ<sup>2</sup>, В. Ф. СТЕЛЬМАХ<sup>3</sup>,  
А. М. ЧАПЛАНОВ<sup>2</sup>, Ю. С. ЕМЕЛЬЯНЕНКО<sup>4</sup>

## ФОРМИРОВАНИЕ ДИСИЛИЦИДА ТИТАНА В СИСТЕМЕ TiN/Ti/Si ПРИ БЫСТРОЙ ТЕРМИЧЕСКОЙ ОБРАБОТКЕ

<sup>1</sup>НПО «Интеграл»

<sup>2</sup>Физико-технический институт НАН Беларуси

<sup>3</sup>Белорусский государственный университет

<sup>4</sup>Институт физики им. Б. И. Степанова НАН Беларуси

(Поступила в редакцию 21.09.2009)

**Введение.** С увеличением плотности тока в СБИС возникает проблема межслойных соединений и контактов к активным и пассивным элементам схемы [1–4]. В качестве материала для металлизации исследуется дисилицид титана ( $\text{TiSi}_2$ ), обладающий малым удельным сопротивлением ( $20 \text{ мкОм}\cdot\text{см}$ ) [4–7].

Следует отметить, что дальнейшее увеличение степени интеграции невозможно без быстрых методов термообработки систем, возникает необходимость снижать тепловую нагрузку на полупроводниковую пластину при создании больших интегральных схем [1–10].

Импульсные или непрерывные ламповые нагреватели обеспечивают нагрев имплантированного полупроводника за время от  $10^{-3}$  до  $10 \text{ с}$  [6]. Эти методы имеют преимущества по сравнению с термическим отжигом: они дешевле, легко реализуются, увеличивают производительность. При кратковременном воздействии ламповых нагревателей отжиг происходит, как правило, без перераспределения внедренной примеси, так как процесс отжига происходит в твердой фазе за короткое время и примесь не успевает продиффундировать на большое расстояние, что позволяет сформировать мелкозалегающие  $p$ - $n$ -переходы. [6]. В настоящее время на ведущих предприятиях микроэлектроники с КМОП и БиКМОП технологиями для создания систем металлизации с топологическими нормами  $0,3 \text{ мкм}$  и менее используется быстрая термическая обработка (БТО).

В связи с этим в последние годы существенно возрос интерес к исследованию синтеза контактно-металлизационных систем (КМС) на основе силицидов тугоплавких металлов методом БТО с использованием различных источников светового излучения.

При импульсной обработке некогерентным светом в твердой фазе наиболее перспективным является режим, использующий обработку длительностью от единиц до десятков секунд [5, 8, 9]. При таких режимах отсутствуют резкие градиенты температур по толщине образца, приводящие к возникновению термоустойчивых комплексов точечных и линейных дефектов, улучшается восприимчивость и качество термообработки. К таким методам относятся синтез с помощью импульсных газоразрядных галогенных [1] или ксеноновых [8–10] ламп. В данной работе рассматривается синтез КМС на основе силицидов титана методом двухступенчатой БТО гетероструктуры TiN/Ti/Si с применением галогенных ламп.

**Методика эксперимента.** В качестве исходных подложек использовали пластины монокристаллического кремния ориентации (001). Для снятия собственного оксида пластины кремния очищали химическим травлением в растворе плавиковой кислоты и непосредственно в камере перед нанесением пленок металлов поверхность подложки подвергали ВЧ травлению в атмосфере

аргона на глубину 5 нм. После этого пластины Si помещались в установку Varian m2i и в едином вакуумном цикле методом магнетронного распыления последовательно осаждались пленки титана и нитрида титана.

При выборе конкретного способа синтеза КМС исходили из данных работы [10], в которой показано, что после ионной имплантации кремния высокотемпературный отжиг в одну стадию при температуре 800–1000 °С приводит к появлению дислокаций, комплексов точечных дефектов, не чувствительных к дальнейшим обработкам.

При проведении отжига в две стадии на первой стадии при температуре 600–650 °С в процессе рекристаллизации аморфизированного кремния остается незначительная часть точечных дефектов, которые устраняются на второй стадии высокотемпературного отжига. Кроме того, условия синтеза  $TiSi_2$  в гетеросистеме TiN/Ti/Si должны коррелировать с режимами отжига формируемых интегральных схем (ИС). При формировании  $TiSi_2$  в одну стадию (температура отжига ~ 800 °С) происходит реакция образования оксида титана.

Формирование  $TiO_x$  может приводить к закорачиванию сток/исток-затвора и отказам СБИС. Поэтому для устранения данных нежелательных явлений БТО проводилась в две стадии: сначала низкотемпературная обработка (при температуре примерно 650 °С) для создания твердого раствора титана в кремнии и образования фазы  $TiSi_x$ , а затем – термообработка при температуре ~ 850 °С, что позволило сформировать низкотемпературную фазу дисилицида титана C54.

Фазовый состав пленок дисилицида титана, полученных при БТО, исследовался на электронографе ЭМР-102 на отражение. Для расшифровки электронограмм использовалась база данных «Of the International Centre for Diffraction Data».

Методом Оже-электронной спектроскопии (ОЭС) с послойным травлением ионами аргона на спектрометре PHI-660 фирмы Perkin Elmer проведен анализ элементного состава образцов по толщине. Механические напряжения силицидных структур измерялись на установке Tencor FLX5200.

**Результаты и обсуждение.** Построенные по результатам анализа методом ОЭС распределения концентраций компонентов пленок (в атомных процентах) по глубине для гетероструктур, прошедших двухступенчатую быструю термическую обработку и после снятия слоя нитрида титана приведены на рис. 1.

Анализ показывает, что на поверхности структуры находится нарушенный слой, содержащий адсорбированный кислород, концентрация которого быстро убывает по глубине структуры. Как следует из приведенных данных, кислород адсорбируется только на поверхности после удаления слоя нитрида титана и не участвует в процессе формирования дисилицида титана при БТО. Ниже находится слой дисилицида титана с отношением компонент  $N_{Si}/N_{Ti} \sim 2,4$ . Это несоответствие отражает избыточное содержание кремния в структуре  $TiSi_2$ . Следует отметить, что присутствие на поверхности кремния и высокое его содержание в пленке титана свидетельствует о том, что диффузия атомов Si в пленку титана предпочтительна. В то же время переходный слой на межфазной границе указывает и на диффузию в данной системе титана в кремний.



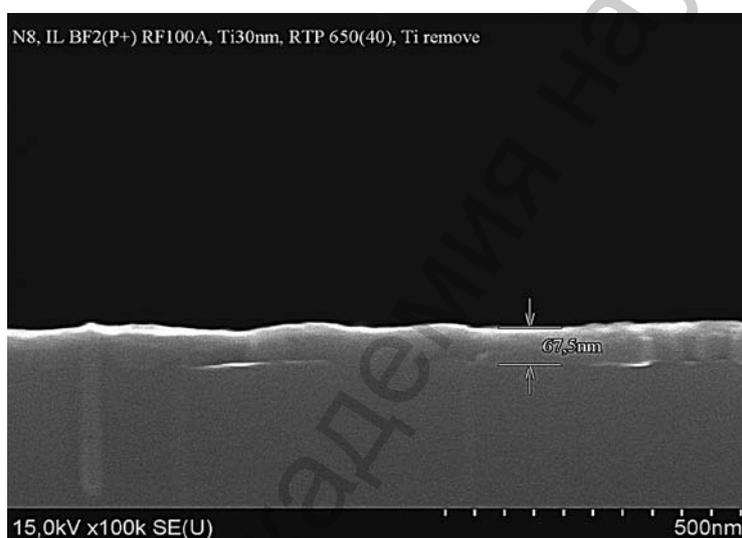
Рис. 1. Профили концентраций элементов по времени для гетероструктуры TiN/Ti/Si, прошедших двухступенчатую БТО

Исследования методом электронной дифракции показали, что после второй стадии отжига при температуре 850 °С ( $t = 30$  с) на поверхности кремния образуется дисилицид титана  $\text{TiSi}_2$  в модификации C54 (табл. 1).

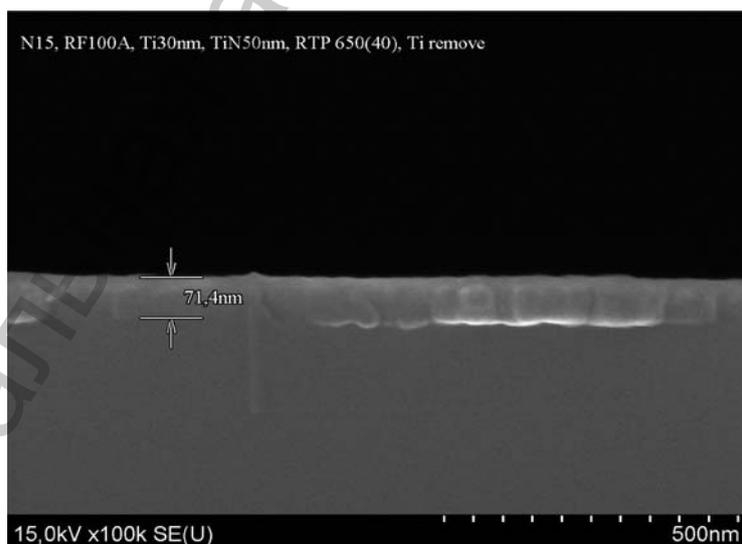
Таблица 1. Результаты расчета электронограмм пленки  $\text{TiSi}_x$ , полученной при БТО

Экспериментальные данные d, Å	Теоретические данные ASTM для $\text{TiSi}_2$ (C54) d, Å	hkl
3,20	3,19	021
2,83	2,84	130
2,24	2,23	131
1,92	1,935	061
1,82	1,81	200
1,54	1,52	132
1,43	1,42	230

На рис. 2 представлены поперечные сечения слоев  $\text{TiSi}_x$ , сформированных при температуре 650 °С, соответственно без и под защитной пленкой TiN.



a



b

Рис. 2. Поперечное сечение слоя  $\text{TiSi}_x$ , полученного после первой стадии обработки при температуре отжига 650 °С без защитной пленки (a) и под защитной пленкой (b) TiN

Из представленных данных следует, что обработка под слоем нитрида титана приводит к столбчатому росту зерен по толщине слоя. Шероховатость границы раздела  $\text{TiSi}_x$ -Si на рис. 2, а меньше, чем на рис. 2, б, что свидетельствует об анизотропном росте зерен силицида титана, обусловленном их кристаллографической ориентацией. Из рис. 2 следует, что в обоих случаях, сформированные слои имеют столбчатую структуру. При синтезе под слоем нитрида титана образуются зерна равной толщины по сравнению с тем случаем, когда пленка нитрида титана отсутствует.

Следует отметить, что при быстрой термической обработке скорость подъема температуры до «полочки» отжига оказывает существенное влияние на возникновение остаточных напряжений в исследуемой структуре. В системе тонкая пленка – подложка всегда присутствуют механические напряжения в силу несоответствия параметров решеток, различия коэффициентов термического расширения, внутренних структурных напряжений.

При нагреве изменяется внутренняя энергия гетеросистемы, что обусловлено образованием фаз  $\text{TiSi}_x$ , ростом зерен и т. д. В результате повышения температуры протекают два конкурирующих процесса: возникновение термонапряжений и релаксация напряжений. Если время выхода температуры на «полочку» близко по величине ко времени релаксации напряжений, то это минимальное время, которое необходимо для перестройки структуры.

В нашем случае с увеличением скорости нагрева структура не успевает релаксировать и величина остаточных напряжений возрастает.

В табл. 2 представлены механические напряжения в  $\text{TiSi}_2$  после второй стадии обработки при температуре 850 °С. Относительная погрешность измерений таких напряжений составляет 10%.

Таблица 2. Механические напряжения в структуре  $\text{TiSi}_x$  после второй стадии обработки

Скорость нагрева, град/с	30	40	60	80
Напряжения в пленках $\text{TiSi}_x$ , МПа	1216,2	1220,2	1411,5	1979,4

Данные свидетельствуют, что с повышением скорости подъема температуры остаточные напряжения возрастают и этот процесс носит нелинейный характер.

**Заключение.** Анализ экспериментальных данных показывает, что фотонная обработка с использованием галогенных ламп в две стадии отжига (первая стадия при температуре 650 °С, вторая при 850 °С) позволяет сформировать слой дисилицида титана в модификации C54, имеющей низкое удельное электросопротивление. Величина остаточных механических напряжений возрастает с увеличением скорости нагрева и имеет нелинейный характер. Защитный слой нитрида титана при БТО приводит к более равномерному формированию зерен по толщине в системе TiN/Ti/Si.

## Литература

1. Пилипенко В. А. Быстрые термообработки в технологии СБИС. Минск, 2004.
2. Зи С. Физика полупроводниковых приборов. М., 1984. С. 26.
3. Борисенко В. Е. Твердофазные процессы в полупроводниках при импульсном нагреве. Минск, 1992.
4. Мьюрарка Ш. Силициды для БИС. М., 1986. С. 41.
5. Пилипенко В. А., Горушко В. А., Пономарь В. Н., Пилипенко И. В. // Вестник БГУ. 2001. Сер. 1. № 2. С. 43.
6. Вейко В. П., Метев С. М. Лазерные технологии в микроэлектронике. София, 1991.
7. Niess J., Paul S., Buschbaum S. et al. // Materials Science and Engineering B. 2004. Vol. 114–115. P. 141–150.
8. Бурова С. В., Здобин В. П., Иевлев В. М. и др. // Электронная промышленность. 1988. № 2. С. 34–37.
9. Иевлев В. М., Кущев С. Б., Санин В. Н. // ФХОМ. 2002. № 1. С. 27–31.
10. МОП–СБИС. Моделирование элементов и технологических процессов. М., 1988.

*V. V. KOLOS, M. I. MARKEVICH, V. F. STELMAKH, A. M. CHAPLANOV, Y. S. EMELYANENKO*

## TITANIUM DISILICIDE FORMATION IN THE TiN/Ti/Si SYSTEM SUBJECT TO RAPID HEAT TREATMENT

### Summary

The work is devoted to investigation of structure phase transformations occurring in the TiN/Ti/Si system during a two-stage rapid heat treatment (RHT). The investigation results indicate that RHT involving two stages, the first of which is carried out at a temperature of 650 °C and the second at 850 °C enables the formation of a low-resistance titanium disilicide layer of C54 modification. The use of a protecting titanium nitride layer during RHT results in obtaining a more homogeneous grain formation across a thickness in the TiN/Ti/Si system.

УДК 534.8

В. Г. ГУРТОВОЙ<sup>1</sup>, А. У. ШЕЛЕГ<sup>1</sup>, В. А. ЛЮПО<sup>2</sup>

## ВЛИЯНИЕ ЭЛЕКТРОННОГО И ГАММА-ИЗЛУЧЕНИЯ НА ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА МОНОКРИСТАЛЛОВ КТіОРО<sub>4</sub>

<sup>1</sup>Научно-практический центр НАН Беларуси по материаловедению

<sup>2</sup>Гродненский государственный университет им. Я. Купалы

(Поступила в редакцию 13.05.2010)

**Введение.** Кристаллы КТіОРО<sub>4</sub> (КТР) характеризуются большой нелинейностью оптических свойств, малой диэлектрической проницаемостью в области высоких частот, высокой оптической прочностью и невысокой стоимостью получения по сравнению с другими оптически нелинейными кристаллами, что делает их перспективными для использования в качестве элементов лазерной техники, микро- и оптоэлектроники. Кроме того, они обладают сегнето- и пьезоэлектрическими свойствами с температурой сегнетоэлектрического фазового перехода  $T_c = 934$  К, ионной проводимостью и хорошей температурной и механической стабильностью [1–2]. Кристаллическая структура КТіОРО<sub>4</sub> имеет пространственную группу  $R\bar{3}m2_1$  с параметрами элементарной ячейки при комнатной температуре  $a = 12,814$  Å,  $b = 6,404$  Å,  $c = 10,616$  Å [3].

Для эффективного практического использования этих кристаллов необходимо знать влияние ионизирующих излучений на их физические свойства.

В данной работе исследовано влияние различных доз электронного и  $\gamma$ -излучения на электропроводность и диэлектрическую проницаемость кристаллов КТіОРО<sub>4</sub> в области температур 120 – 340 К на частотах измерительного поля  $10^2$ – $10^6$  Гц.

**Методика измерений.** Электропроводность ( $\sigma$ ) и диэлектрическая проницаемость ( $\epsilon$ ) кристаллов КТР измерялись с помощью цифрового измерителя Е7–20 на частотах измерительного поля  $10^2$ – $10^6$  Гц. Температурные зависимости  $\sigma$ ,  $\epsilon$  определялись в режиме квазистационарного непрерывного нагревания образца со скоростью  $\sim 0,5$  К/мин. Образец помещался в специальный держатель, который опускался в пары жидкого азота. Температура образца измерялась хромель-копелевой термопарой, спай которой находился на поверхности образца. Регулировка температуры осуществлялась терморегулятором с помощью нагревателя, вмонтированного в держатель образца. В качестве образцов использовались монокристаллические пластинки КТіОРО<sub>4</sub> толщиной  $\sim 1$  мм, вырезанные таким образом, чтобы их поверхности совпадали с кристаллографической плоскостью (001) с точностью 5–10'. Исследовались как необлученные кристаллы, так и облученные  $\gamma$ -квантами дозой  $10^7$  Р и электронами с энергией 4 МэВ дозами  $10^{15}$  см<sup>-2</sup>,  $3 \cdot 10^{15}$  см<sup>-2</sup>,  $10^{16}$  см<sup>-2</sup>.

**Результаты исследований и их обсуждение.** На рис. 1 приведены температурные кривые диэлектрической проницаемости кристаллов КТР вдоль кристаллографического направления [001] в интервале температур 120–340 К на частотах измерительного поля  $10^4$ ,  $10^5$  и  $10^6$  Гц в зависимости от дозы электронного облучения. Видно, что для исследуемого кристалла характерна значительная дисперсия диэлектрической проницаемости, причем с ростом температуры дисперсия увеличивается. Величина  $\epsilon$  уменьшается при повышении измерительной частоты. Такое поведение температурных зависимостей диэлектрической проницаемости можно объяснить существованием релаксационной поляризации на низких частотах в кристаллах КТР, которая вносит большой вклад в статическую диэлектрическую проницаемость и обуславливает большие

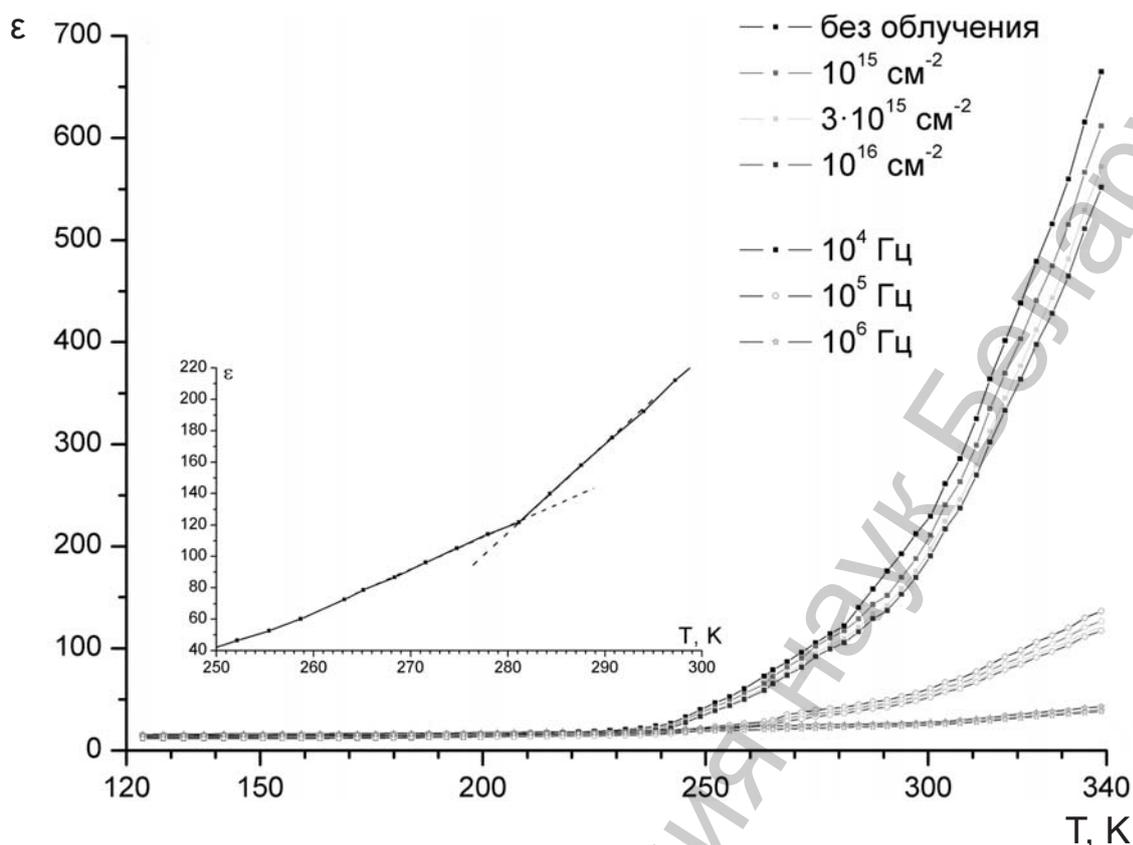


Рис. 1. Температурные зависимости диэлектрической проницаемости кристаллов  $\text{KTiOPO}_4$  вдоль кристаллографического направления [001] для разных доз электронного облучения. На врезке – температурная зависимость  $\epsilon$  необлученного кристалла в области фазового перехода на частоте 10 кГц

потери на низких частотах. При низких температурах (ниже 200 К) значения  $\epsilon$  почти не зависят от частоты и  $\epsilon \approx 15\text{--}20$ . При  $T > 200$  К величина  $\epsilon$  быстро возрастает, особенно на малых частотах (100 и 1000 Гц). На частоте измерительного поля 100 Гц при  $T = 340$  К  $\epsilon \approx 19\ 200$ . Такая зависимость диэлектрической проницаемости от частоты характерна для суперионных сегнетоэлектриков, к группе которых принадлежат исследуемые кристаллы [1]. Показано, что под действием электронного облучения величина диэлектрической проницаемости уменьшается, что, скорее всего, связано с увеличением степени дефектности кристалла вследствие наведения радиационных дефектов.

Температурные зависимости электропроводности  $\sigma$  монокристалла КТР вдоль кристаллографического направления [001] в интервале температур 120–340 К на частотах измерительного поля  $10^4$ ,  $10^5$  и  $10^6$  Гц для различных доз электронного облучения приведены на рис. 2. Видно, что с увеличением температуры электропроводность быстро растет. Следует отметить, что абсолютные значения электропроводности сильно зависят от частоты измерительного электрического поля, что особенно заметно в области низких температур. Это обусловлено наложением проводимости обычного характера и прыжковой проводимости. Значение  $\sigma$  с ростом частоты увеличивается на несколько порядков. Облучение кристаллов КТР пучком электронов приводит к существенному увеличению удельной электропроводности в результате наведения радиационных дефектов вакансионного типа по всему объему кристалла [4]. Увеличение степени дефектности оказывает влияние на величину несобственной проводимости и приводит к возрастанию суммарной электропроводности.

Следует отметить большое значение электропроводности кристалла КТР по сравнению с обычными ионными диэлектриками, что связано с «рыхлостью» кристаллической структуры и высокой подвижностью ионов  $\text{K}^+$ . В такой структуре возможно наличие большого числа эквивалентных междоузлий внутри элементарной ячейки, в которые могут переходить ионы из своего

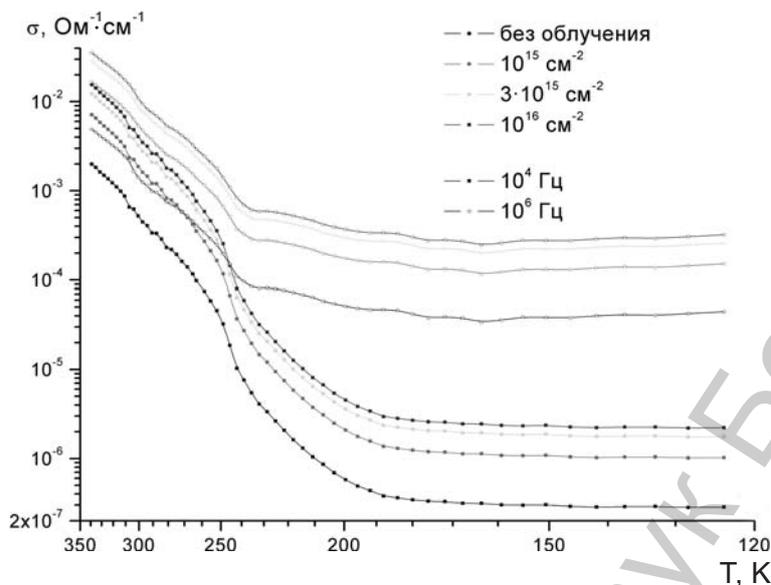


Рис. 2. Температурные зависимости электропроводности кристаллов  $\text{KTiOPO}_4$  вдоль кристаллографического направления [001] для разных доз электронного облучения

стабильного положения, и «окон» для движения этих ионов с небольшой энергией активации [3]. В кристаллах КТР легкоподвижные ионы  $\text{K}^+$  заполняют часть пустот кристаллической решетки, причем пустоты вдоль кристаллографического направления [001] остаются свободными и, вероятно, при температурном воздействии на кристаллическую решетку служат «каналами» движения ионов  $\text{K}^+$ , определяя возникновение высокой ионной проводимости.

На графике зависимости  $\epsilon = f(T)$  для кристаллов КТР (см. врезку на рис. 1) имеется излом при  $T \sim 280$  К. Он указывает на фазовый переход (ФП) типа порядок–беспорядок II рода. Вывод о наличии ФП II рода подтверждается, в частности, видом аномалии на температурной зависимости теплоемкости [5]. Аналогичные выводы о природе аномалии на температурной зависимости диэлектрической проницаемости сделаны авторами работы [3].

На рис. 3 приведена зависимость  $\sigma$  кристаллов КТР от дозы электронного облучения на частоте 10 кГц. С увеличением дозы электронного облучения, ее влияние на электропроводность кристаллов КТР уменьшается, что объясняется эффектом насыщения кристалла радиационными дефектами. Радиационные дефекты вакансионного типа могут находиться в разных пространственных конфигурациях со своим набором ковалентных связей. Наиболее простым является представление дефекта как бистабильной системы с ангармоническим потенциалом вида

$V(q_n) = A \frac{q_n^2}{2} - B \frac{q_n^3}{3} + C \frac{q_n^4}{4}$ , где коэффициенты зависят от атомного окружения и числа локали-

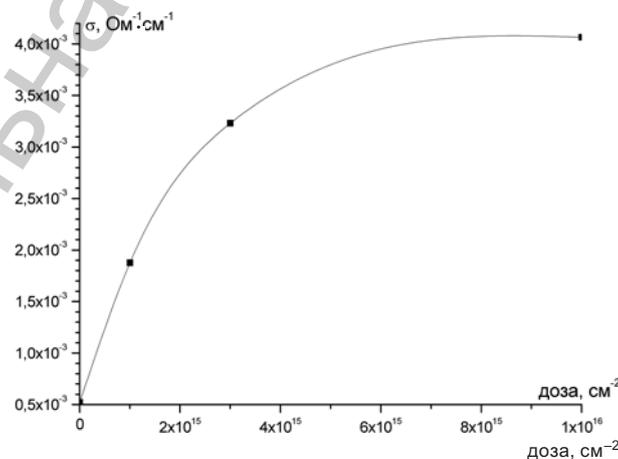


Рис. 3. Зависимость электропроводности кристаллов КТР от дозы электронного облучения на частоте 10 кГц

зованных электронов (так называемый одноузельный асимметричный двумный потенциал радиационного дефекта) [4]. Увеличение дозы облучения приводит к увеличению асимметрии потенциала и локализации дефекта в одной из ям, что исключает изменение его состояния, ведет к уменьшению аномальной части комплексной диэлектрической проницаемости  $\epsilon^*$  и проявляется в уменьшении величины  $\epsilon$  и возрастании электропроводности. Дальнейшее увеличение дозы облучения может привести к обратному процессу уменьшения асимметрии, и дефект будет находиться в симметричном уплощенном двумном потенциале с возрастанием величины диэлектрической проницаемости  $\epsilon$  и уменьшением проводимости  $\sigma$ . В нашем случае, как видно из рис. 3, доза электронного облучения недостаточно велика для возникновения этого эффекта.

Следует отметить, что фазовый переход II рода типа порядок–беспорядок при  $T \sim 280$  К, при исследовании диэлектрических характеристик облученных кристаллов не выявлен. Возможно, это связано с тем, что на кривой зависимости  $\epsilon = f(T)$  для необлученного кристалла этот фазовый переход проявляется в виде небольшого излома (см. врезку на рис. 1), который с увеличением дозы электронного облучения сглаживается.

Исследования показали, что облучение кристаллов  $\text{KTiOPO}_4$   $\gamma$ -квантами дозой  $10^7$  Р не оказывает существенного влияния на температурные зависимости электропроводности и диэлектрической проницаемости.

**Заключение.** В результате проведенных нами исследований установлено, что облучение кристаллов КТР электронами приводит к наведению радиационных дефектов вакансионного типа по всему объему кристалла. Вследствие этого с увеличением дозы электронного облучения наблюдается уменьшение величины диэлектрической проницаемости и возрастание электропроводности в кристаллах КТР. Наблюдается исчезновение на кривой зависимости  $\epsilon = f(T)$  аномалии, связанной с фазовым переходом II рода типа порядок–беспорядок. Показано, что  $\gamma$ -излучение дозой  $10^7$  Р не оказывает существенного влияния на диэлектрические свойства этих кристаллов.

### Литература

1. Леонов А. П., Воронкова В. И., Стефанович С. Ю., Яновский В. К. // Письма в ЖЭТФ. 1985. Т. 11. Вып. 2. С. 85–94.
2. Богомолов А. А., Гречишкин Р. М., Сергеева О. Н., Щербаков В. В. // Кристаллография. 1997. Т. 42. № 3. С. 478–480.
3. Калесникас В. А., Павлова Н. И., Рез И. С., Григис И. П. // Литов. физ. сб. (Вильнюс). 1982. Т. 22. № 5. С. 87–91.
4. Тареев Б. М. Физика диэлектрических материалов. М., 1982.
5. Шелег А. У., Декола Т. И., Теханович Н. П., Лугинец А. М. // Физика твердого тела. 1999. Т. 41. № 3. С. 497–501.

*V. G. HURTAVY, A. U. SHELEG, V. A. LIOPO*

### ELECTRONIC AND GAMMA-RADIATION INFLUENCE ON DIELECTRIC PROPERTIES OF SINGLE $\text{KTiOPO}_4$ CRYSTALS

#### Summary

Measurements of dielectric permeability and electroconductivity in the temperature range 120–340 K not irradiated  $\text{KTiOPO}_4$  crystals and irradiated by  $\gamma$ -quanta and electrons are investigated. It is established that at electron irradiation dielectric permeability decreases, and electroconductivity increases. It is shown that the  $\gamma$ -irradiation with a dose of  $10^7$  R does not influence essentially on dielectric properties of these crystals.

УДК 538.54.16

*А. И. АКИМОВ, Г. К. САВЧУК*

**СВЯЗЬ ТЕМПЕРАТУРЫ СВЕРХПРОВОДЯЩЕГО ПЕРЕХОДА  
С ПАРАМЕТРАМИ КРИСТАЛЛИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЫ  
ТАЛЛИЙСОДЕРЖАЩИХ СВЕРХПРОВОДНИКОВ**

*НПЦ НАН Беларуси по материаловедению, Минск*

*(Поступила в редакцию 10.03.2010)*

**Введение.** Проблемой корреляции температуры перехода ( $T_c$ ) в сверхпроводящее состояние с различными характеристиками сверхпроводящих материалов занимались многие исследователи, начиная с момента открытия высокотемпературной сверхпроводимости (ВТСП). Однако, изучение критических структурных параметров, которые определяют значение температуры перехода в сверхпроводящее состояние остается до настоящего времени одной из важнейших проблем высокотемпературной сверхпроводимости. На связь  $T_c$  со структурными параметрами катионной подрешетки указывалось в [1–4]. Обобщив существующие экспериментальные данные, авторы показали, что для всех фаз ВТСП температура перехода в сверхпроводящее состояние зависит не только от концентрации носителей, но и от определенных параметров кристаллической структуры.

К заметным изменениям  $T_c$  может приводить изменение параметров кристаллической решетки под действием давления [5–6]. В [6–7] представлены результаты исследований влияния гидростатического давления на температуру перехода образцов таллийсодержащей фазы  $Tl_2Ba_2CuO_6$  (Tl2201).

Влияние высокого давления холодного прессования (1–6 ГПа) на параметры кристаллической структуры и температуру перехода в сверхпроводящее состояние для таллийсодержащей фазы 2201 подробно не исследовалось. В литературе не приводятся также данные по изменению структурных параметров образцов, обработанных высоким давлением в условиях холодного прессования и имеющих различную степень анионной дефектности в результате отжигов в различных средах.

Целью данной работы являлось исследование связи  $T_c$  с параметрами кристаллической структуры сверхпроводящих керамических образцов фазы Tl2201 в зависимости от величины давления холодного прессования и степени анионной дефектности.

**Экспериментальная часть.** Образцы сверхпроводящих керамических материалов были получены в лаборатории электронной керамики ГНПО «НПЦ НАН Беларуси по материаловедению» (г. Минск) по керамической технологии. Синтез сверхпроводящей фазы Tl2201 проводился из оксидов  $Tl_2O_3$ ,  $CuO$  и  $BaO_2$  при температурах 830–860 °С в течение 4–5 ч. Синтезированные образцы размалывались в среде этилового спирта. Полученная суспензия сушилась при комнатной температуре. Затем из порошка формовались без добавления связки диски высотой 3,5–4 мм, которые заворачивались в пленку из фторопласта и помещались в контейнер аппарата высокого давления. Холодное квазигидростатическое прессование производилось при давлениях 1–6 ГПа в течение одной минуты при комнатной температуре. Отжиг керамических образцов осуществлялся в тиглях из алунда, закрытых притертыми крышками, при температуре 860 °С в течение 6–10 ч.

Измерения температур сверхпроводящего перехода керамических образцов, полученных с использованием высокого давления холодного прессования, производились индуктивным и резистивным методами.

Керамические образцы, компактированные в условиях холодного прессования при давлении 4 ГПа, подвергались повторным отжигам в вакууме и в среде аргона с помощью термоанализатора французской фирмы «Setaram». После повторных отжигов все сверхпроводящие образцы оставались однофазными, имели тетрагональную симметрию пространственной группы  $I4/mmm$ .

Рентгенофазовые и рентгеноструктурные исследования как обработанных высоким давлением, так и отожженных сверхпроводящих образцов состава  $Tl_2Ba_2CuO_{6\pm x}$  проводились при комнатной температуре в  $CuK\alpha$  монохроматическом излучении. По полученным рентгеновским дифракционным данным методом Ритвельда с использованием пакета прикладных программ «GSAS» [7] уточнялись параметры кристаллической структуры керамических образцов. В процессе уточнения определялись: значения параметров  $a$  и  $c$  элементарной кристаллической ячейки ( $\text{Å}$ ), координаты атомов ( $x, y, z$ ) в долях соответствующих параметров элементарной кристаллической ячейки, заселенности  $n$  атомами своих позиций, среднеквадратичные динамические смещения  $U$  атомов относительно своих положений равновесия ( $\text{Å}^2$ ). По уточненным значениям координат атомов и параметров элементарной кристаллической ячейки вычислялись основные межатомные расстояния ( $\text{Å}$ ) для исследуемых структур.

**Результаты и их обсуждение.** На рис. 1 показана кристаллическая структура сверхпроводящего соединения  $Tl_2Ba_2CuO_{6\pm x}$ . Как видно, образцы фазы  $Tl_2Ba_2CuO_{6\pm x}$  имеют слоистый характер структуры, при этом плоскость атомов меди расположена между двумя плоскостями атомов бария.

Структурным фрагментом (рис. 2), определяющим сверхпроводящие свойства фазы 2201, является перовскитоподобный сэндвич [2–4, 8], состоящий из  $CuO_2$ -плоскостей. Кислород, находящийся в плоскости слоя меди, называется планарным ( $O1_{\text{план}}$ ), а в вершинах октаэдра перпендикулярных слою – аксиальным или апикальным ( $O2_{\text{апик}}$ ).

Для определения характера влияния высокого давления холодного прессования на параметры кристаллической структуры сверхпроводящей фазы  $Tl_2Ba_2CuO_{6\pm x}$  и установления связи структурных параметров с  $T_c$  использовались структурные данные, полученные при каждом давлении не менее чем на 10 образцах (в таблицах приводятся значения усредненных параметров).

В табл. 1 представлены уточненные значения параметров кристаллических структур сверхпроводящих керамических неотожженных образцов фазы  $Tl_2Ba_2CuO_{6\pm x}$  в зависимости от величины давления холодного прессования. Из полученных данных видно, что воздействие давления величиной 1–4 ГПа приводит к уменьшению как параметра  $a$ , так и параметра  $c$  элементарной кристаллической ячейки. Использование давления холодного прессования порядка 4 ГПа и выше практически не вызывает изменения параметра  $a$ , в то время как параметр  $c$  уменьшается.

Полученные данные свидетельствуют, что при увеличении давления холодного прессования наблюдается рост величины смещений атомов бария от 0,084 (1 ГПа) до 0,085 (6 ГПа). При этом атомы кислорода  $O2_{\text{апик}}$  сдвигаются от атомов таллия к атомам меди, что сопровождается при росте давления заметным сокращением расстояний  $Cu-O2_{\text{апик}}$  (табл. 2).

Из вычисленных значений межплоскостных расстояний следует, что расстояние  $Cu-O1_{\text{план}}$  в зависимости от величины давления холодного прессования изменяется незначительно, а, начиная с давления 3,5–4 ГПа, указанное расстояние остается практически неизменным, что коррелирует с тем, что температура сверхпроводящего перехода также не изменяется. Согласно полученным данным, значения межатомных расстояний  $Cu-O1_{\text{план}}$  в плоскости слоя лежат в диапазоне

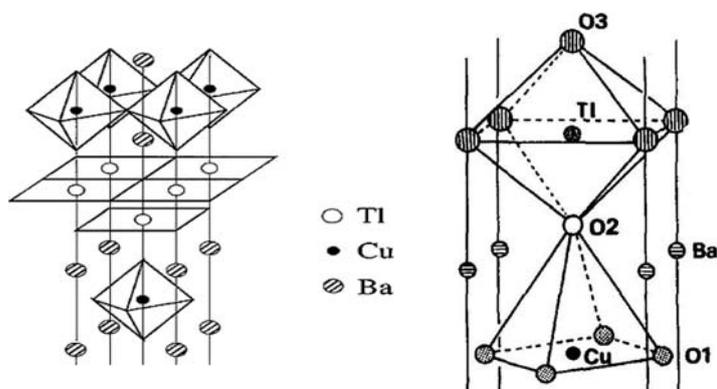


Рис. 1. Кристаллическая структура керамических образцов фазы  $Tl_2Ba_2CuO_{6\pm x}$  [1,8]

Рис. 2. Вид структурного фрагмента фазы  $Tl_2Ba_2CuO_{6\pm x}$

Таблица 1. Параметры кристаллической структуры образцов фазы  $Tl_2Ba_2CuO_{6\pm x}$  в зависимости от величины давления холодного прессования

	Параметры	Давление, ГПа					
		1	2	3	4	5	6
Ионы	<b>a</b>	3,873(1)	3,869(1)	3,863(2)	3,854(2)	3,854(2)	3,854(2)
	<b>c</b>	23,149(3)	23,149(3)	23,141(4)	23,141(1)	23,140(0)	23,138(0)
$Tl^{+3}/Cu^{+1}$ (0,5, 0,5, z)	<i>z</i>	0,2038	0,2036	0,2035	0,20345	0,2033	0,2032
	<i>n</i>	0,960/0,033	0,960/0,035	0,961/0,035	0,963/0,037	0,963/0,037	0,963/0,037
	<i>U-Tl<sup>+3</sup></i>	0,019	0,019	0,019	0,019	0,019	0,019
	<i>U-Cu<sup>+1</sup></i>	0,041	0,041	0,041	0,041	0,041	0,041
$Ba^{+2}$ (0, 0, z)	<i>z</i>	0,0840	0,0843	0,0845	0,0846	0,0847	0,0849
	<i>n</i>	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0
	<i>U</i>	0,005	0,005	0,005	0,005	0,005	0,005
$Cu^{+2}/Tl^{+1}$ (0,5,0,5, z)	<i>z</i>	0,0075	0,0075	0,0075	0,0075	0,0075	0,0075
	<i>n</i>	0,967/0,033	0,965/0,035	0,965/0,035	0,964/0,036	0,964/0,036	0,964/0,036
	<i>U-Cu<sup>+2</sup></i>	0,005	0,005	0,005	0,005	0,005	0,005
	<i>U-Tl<sup>+1</sup></i>	0,021	0,021	0,021	0,021	0,022	0,022
O(1) (0, 0,5, 0)	<i>n</i>	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0
	<i>U</i>	0,108	0,104	0,103	0,103	0,102	0,101
O(2) (0,5, 0,5, z)	<i>z</i>	0,1145	0,1122	0,1118	0,1098	0,1097	0,1096
	<i>n</i>	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0
	<i>U</i>	0,005	0,004	0,004	0,004	0,004	0,004
O(3) (x, 0,5, z)	<i>x</i>	0,507	0,506	0,504	0,5	0,5	0,5
	<i>z</i>	0,2970	0,3043	0,3072	0,3083	0,3088	0,3090
	<i>n</i>	0,87	0,87	0,88	0,88	0,89	0,92
	<i>U</i>	0,085	0,085	0,085	0,087	0,085	0,085
	<i>R<sub>wp</sub></i>	0,077	0,079	0,076	0,074	0,078	0,075
<i>T<sub>c</sub></i> , К		53	50	48,5	47	47	46

Таблица 2. Основные межатомные расстояния в образцах керамики фазы  $Tl_2Ba_2CuO_{6\pm x}$  в зависимости от величины давления холодного прессования

Расстояния, Å	Давление, ГПа					
	1	2	3	4	5	6
Cu – Cu	5,477	5,472	5,463	5,450	5,450	5,450
Ba – Ba	3,889	3,903	3,911	3,915	3,920	3,929
Tl – O(2)	2,067	2,116	2,122	2,167	2,166	2,166
Tl – O(3)	2,158	2,331	2,399	2,426	2,441	2,448
Ba – O(1)	2,744	2,749	2,750	2,747	2,749	2,752
Ba – O(2)	2,824	2,811	2,805	2,787	2,786	2,785
Cu – O(1) <sub>план</sub>	1,978	1,976	1,973	1,972	1,972	1,972
Cu – O(2) <sub>апик</sub>	2,477	2,434	2,414	2,367	2,365	2,362
$J = d(Cu-Cu)/d(Ba-Ba)$	1,408	1,402	1,397	1,392	1,390	1,387

(1,972–1,978) Å и соответствуют значениям, необходимым для осуществления перекрытия  $3d_{x^2+y^2}$ -орбиталей меди с  $2p_{x,y}$ -орбиталями кислорода [8].

Из результатов уточнения параметров кристаллической структуры следует, что использование давления холодного прессования не приводит к гофрированности Cu–O плоскостей (угол Cu–O–Cu остается равным 180°). При достижении значений давления 3,5 ГПа и выше кислород плоскости таллия O3 занимает вдоль оси *x* положение с координатой  $x = 0,5$  (табл. 1).

Отсутствие различия в значениях  $T_c$  для образцов, полученных при давлениях 3,5 ГПа и выше, свидетельствует о том, что сокращение длины связи Cu–O<sub>апик</sub> не оказывает влияния на изменение температуры перехода в сверхпроводящее состояние. Этот вывод согласуется с данными, полученными для ртути содержащих сверхпроводников в работе [9], где также указывалось на то, что аксиальные длины Cu–O<sub>апик</sub> не влияют существенно на изменение  $T_c$ .

Анализ данных, полученных для заселенностей атомами своих позиций (табл. 1), позволяет предположить, что использование давления холодного прессования приводит к уменьшению в образцах числа носителей зарядов (при неизменной концентрации атомов кислорода в  $\text{Cu-O}_2$  плоскости, число атомов кислорода в плоскости таллия с ростом давления растет, что должно приводить к снижению числа дырок).

Зависимость  $T_c$  от кристаллохимических параметров в сверхпроводящих образцах фазы  $\text{Tl}_2\text{2201}$  может быть выражена комбинацией расстояния  $d(\text{Cu-Cu})$  в плоскости  $\text{CuO}_2$  и расстояния  $d(\text{CuO}_2\text{-Ba})$  от  $\text{CuO}_2$  – плоскости до плоскости катионов Ba (параметр  $J$  [3, 9] в табл.2).

При росте величины давления холодного прессования от 1 до 6 ГПа происходит сокращение расстояний  $d(\text{Cu-Cu})$  на 0,027 Å при увеличении расстояний  $d(\text{Ba-Ba})$  на 0,04 Å (табл. 2), при этом значения параметра  $J$  изменяются от 1,408 до 1,387.

Образцы с наиболее короткими расстояниями  $d(\text{Cu-Cu})$  и наиболее длинными связями  $d(\text{Ba-Ba})$  должны иметь минимальную температуру сверхпроводящего перехода [2, 4], что наблюдалось нами на эксперименте. Согласно полученным данным, значение параметра  $J$  для образцов, обработанных высоким давлением ниже, чем для образцов, полученных без давления. На параболическую зависимость температуры сверхпроводящего перехода  $T_c$  от  $J$ , приведенную в [3, 4], ложатся только точки, соответствующие значениям  $T_c$ , полученным для давлений 1–3 ГПа.

Таким образом, использование давления холодного прессования для компактирования сверхпроводящих образцов фазы  $\text{Tl}_2\text{2201}$  приводит к росту расстояний вдоль оси  $z$  между плоскостями атомов Ba, что соответственно увеличивает ширину слоя, внутри которого осуществляется перенос дырок. Воздействие давления холодного прессования обуславливает также увеличение числа атомов кислорода в плоскости таллия, что в свою очередь ведет к снижению концентрации дырок, и как следствие, к снижению температуры сверхпроводящего перехода. Использование давления холодного прессования позволило подтвердить тот факт, что на значение  $T_c$  оказывает существенное влияние изменение длин связей  $\text{Cu-O}_{\text{план}}$ .

Согласно данным табл. 1 сверхпроводящие образцы, компактированные при давлении 3,5 ГПа и выше, имеют практически одинаковые температуры перехода в сверхпроводящее состояние при одинаковых средних значениях параметров кристаллической структуры ( $\text{Cu-Cu}$ ,  $\text{Cu-O}_{\text{план}}$ , параметр элементарной кристаллической ячейки  $a$ ), влияющих на значения  $T_c$ .

С целью изучения влияния анионной дефектности на значение  $T_c$  и соответственно на величины параметров кристаллической структуры, определяющих это значение, образцы, полученные при воздействии давлением 4 ГПа, были подвержены повторным отжигам в инертной атмосфере (аргоне) или в вакууме. Полученные в ходе экспериментов данные по исследованию влияния на температуру сверхпроводящего перехода величины потерь кислорода в керамических образцах фазы  $\text{Tl}_2\text{Ba}_2\text{CuO}_{(6-x)}$  представлены в табл. 3, где значения  $x$  показывают потери кислорода в расчете на одну формульную единицу.

Таблица 3. Температуры сверхпроводящего перехода образцов фазы  $\text{Tl}_2\text{Ba}_2\text{CuO}_{(6-x)}$  в зависимости от величины потерь кислорода

Среда отжига	Температура отжига, °С	$T_c$ до отжига, К	$T_c$ после отжига, К	Значения $x$ после 5 ч отжига
аргон	500	38	63	0,13
аргон	450	48	71	0,14
вакуум	450	45	69	0,15
вакуум	500	47	73	0,15

Как видно, в исследованном интервале температур увеличение потерь содержания кислорода в образцах фазы  $\text{Tl}_2\text{Ba}_2\text{CuO}_{(6-x)}$  приводит к росту температур перехода керамических образцов в сверхпроводящее состояние. Эксперименты показали, что в результате отжигов наряду с анионной дефектностью наблюдалось также изменение и катионной дефектности образцов.

В табл. 4–5 представлены данные для усредненных значений уточненных параметров кристаллической структуры образцов фазы  $\text{Tl}_2\text{Ba}_2\text{CuO}_{(6-x)}$  после проведенных отжигов.

Таблица 4. Параметры кристаллической структуры образцов  $Tl_2Ba_2CuO_{(6-x)}$  после отжига в вакууме

Tl 2201	Параметры	Исходные образцы ( $T_c = 47$ К)	Образцы, после отжига ( $T_c = 73$ К)
	<b>a</b>	3,854(2)	3,858(3)
	<b>c</b>	23,141(2)	23,249(1)
$Tl^{+3}/Cu^{+1}$ (0,5, 0,5, z)	z	0,2021	0,2024
	n	0,963/0,037	0,839/0,141
	U-Tl <sup>+3</sup>	0,019	0,017
	U-Cu <sup>+1</sup>	0,041	0,010
$Ba^{+2}$ (0, 0, z)	z	0,0841	0,0835
	n	1,0	1,0
	U	0,005	0,006
$Cu^{+2}/Tl^{+1}$ (0,5, 0,5, z)	z	0,0076	0,0242
	n	0,964/0,036	0,859/0,141
	U	0,005	0,010
O(1) (0, 0,5, 0)	z	0,0	0,006
	n	1,0	0,987
	U	0,102	0,059
O(2) (0,5, 0,5, z)	z	0,1098	0,1019
	n	1,0	1,0
	U	0,004	0,001
O(3) (x, 0,5, z)	x	0,5	0,502
	z	0,3087	0,3114
	n	0,834	0,324
	U	0,087	0,103
	$R_{wp}$	0,08	0,08

Уточнение параметров кристаллической структуры указанной фазы свидетельствуют о том, что после отжига, несмотря на обнаруженное смещение атомов меди из своих кристаллографических положений и смещение тесно связанных с медью атомов кислорода (см. табл. 4), симметрия пространственной группы не изменяется. При этом сравнение величин **a** и **c** для образцов фазы Tl2201 с различными значениями  $T_c$  показало, что параметр **a** уменьшается незначительно (0,005 Å), в то время как параметр **c** при увеличении температуры перехода растет на 0,108 Å.

Таким образом, для сверхпроводящей фазы Tl2201, не содержащей плоскости кальция, величина параметра элементарной кристаллической ячейки **c** коррелирует со значениями температуры перехода в сверхпроводящее состояние.

При сравнении координат атомов и их заселенностей (табл. 4) для исследованных образцов установлено, что смещение атомов меди относительно слоев Cu-O<sub>2</sub> сопровождается ростом  $T_c$ . Одновременно с этим происходит смещение атомов кислорода O3 как относительно плоскости Tl-O, так и из своих позиций с координатами (0,5, 0,5, 0) в плоскости Tl-O. Такой же характер смещений атомов кислорода O3 наблюдался при росте  $T_c$  с понижением величины давления холодного прессования (см. табл. 1).

Можно предположить, что наблюдаемое в плоскости Tl-O разупорядочение кислорода вблизи своих centrosимметричных позиций может приводить к сильно ангармоническим колебаниям этих атомов с относительно низкими частотами. Такого рода колебания могут значительно усиливать эффективное притяжение дырок, что и может являться причиной повышения температуры перехода в сверхпроводящее состояние.

Как видно из табл. 4, потери кислорода сверхпроводящими образцами связаны в основном с его уходом из таллиевой плоскости (исх. образец  $n = 0,835$ , отожженный 0,324) и в меньшей степени из плоскости меди (исх. образец  $n = 1$ , отожженный 0,987). Увеличение числа носителей зарядов для фазы Tl2201 происходит как за счет изменения нестехиометрии по кислороду, так и за счет катионной нестехиометрии, связанной с изоморфным замещением некоторой доли атомов Tl<sup>+3</sup> в их основных позициях атомами меди Cu<sup>+1</sup>. В результате отжига доля замещенных атомов таллия увеличивается с 3,8 до 16,8 % (исх. образец Tl<sup>+3</sup>/Cu<sup>+1</sup>  $n = 0,963/0,037$ , отожженный – 0,839/0,141), что должно приводить к росту концентраций дырок.

В табл. 5 представлены основные межатомные расстояния для образцов фазы Tl2201 с температурами перехода 47 и 73 К.

Полученные результаты показывают, что длина связей Cu-O<sub>план</sub> в слоях CuO<sub>2</sub> для образцов с более высоким  $T_c$  возрастает от 1,939 до 1,970 Å, а расстояние медь-вершинный кислород вдоль

Таблица 5. Основные межатомные расстояния в фазе  $Tl_2Ba_2CuO_{(6-x)}$  для образцов с  $T_c$  47 и 73 К

Межатомные расстояния, Å	Исходный образец	После отжига в вакууме при 500 °С
Cu–Cu	5,450	5,456
Ba–Ba	3,892	3,883
$J = d(\text{Cu–Cu})/d(\text{Ba–Ba})$	1,400	1,405
Tl–O3	2,467	2,532
Ba–O1	2,741	2,743
Ba–O2	2,796	2,765
Ba–Cu	3,353	3,719
Cu–O1	1,939	1,970
Cu–O2	2,368	1,806
Tl–O2	2,135	2,339
угол Cu–O1–Cu (в градусах)	180,0	179,1

оси  $c$  уменьшается с 2,368 до 1,806 Å. Цепочки Tl–O в своих слоях имеют при возрастании  $T_c$  связи с большей длиной (2,53 Å при  $T_c = 73$  К и 2,47 Å при 47 К). Анализ данных, представленных в табл. 5, свидетельствует о том, что при увеличении концентрации носителей угол Cu–O<sub>1</sub>–Cu уменьшается и наблюдается «гофрированность» Cu–O плоскостей. Следовательно, можно говорить о том, что угол Cu–O<sub>1</sub>–Cu также является одним из значимых параметров, влияющих на значение температуры перехода  $T_c$ .

**Заключение.** В результате проведенных исследований установлено, что использование давления холодного прессования для компактирования сверхпроводящих образцов фазы Tl2201 приводит к росту расстояний Ba–Ba, что обеспечивает увеличение ширины слоя, в котором осуществляется перенос дырок, и уменьшение степени фокусировки дырок при движении, вследствие чего  $T_c$  снижается. Показано, что воздействие давления холодного прессования увеличивает число атомов кислорода в плоскости таллия, что приводит в свою очередь к снижению концентрации дырок, а, следовательно, и к снижению температуры сверхпроводящего перехода. Получено, что наибольшее влияние на значения  $T_c$  оказывают значения планарных расстояний Cu–O<sub>1<sub>план</sub></sub> и структурное искажение слоев CuO<sub>2</sub> («гофрированность» слоев меди). Установлено, что для сверхпроводников фазы Tl2201 с более высокой  $T_c$  наблюдается значительный беспорядок в расположении атомов меди и кислорода в буферных слоях, связывающих проводящие плоскости CuO<sub>2</sub>. Показано, что усиление эффективного притяжения дырок может происходить в результате ангармонических колебаний разупорядоченных в плоскости Tl–O атомов кислорода, что может являться причиной повышения температуры перехода в сверхпроводящее состояние.

### Литература

1. Wu Z., Meng Q., Zhang S. // Physica C. 1999. Vol. 315. P. 173–179.
2. Cheol-Woo Ahn, Si Yoon Noh, Sahn Nahm et al. // Неорганические материалы. 2000. Т. 36, N. 9. С. 1100–1110.
3. Volkova L. M., Polysgchuk S. A., Herbeck F. E. et al. // Journal of Superconductivity: Incorporating Novel Magnetism. 2000. Vol. 13, N 4. P. 583–586.
4. Volkova L. M., Polysgchuk S. A., Herbeck F. E. et al. // Journal of Superconductivity: Incorporating Novel Magnetism. 2003. Vol. 16, N 6. P. 937–939.
5. Izumi F., Jorgensen J. D., Shimakawa Y. et al. // Physica C. 1992. Vol. 193. P. 426 – 436.
6. Lin J., Matsuishi K., Wang Y. Q. et al. // Physica C. 1991. Vol. 175. P. 627 – 633.
7. Акимов А. И., Савчук Г. К., Рубцов В. А., Летко А. К. // Кристаллография. 2003. Т. 48, № 2. С. 267–271.
8. Антипов Е. В., Абакумов А. М. // УФН. 2008. Т. 178, № 21. С. 190–202.
9. Садовский М. В. // УФН. 2008. Т. 178, № 12. С. 1244–1258.

A. I. AKIMOV, G. K. SAVCHUK

### RELATIONSHIP BETWEEN THE SUPERCONDUCTING TRANSITION TEMPERATURE AND THE CRYSTAL STRUCTURE PARAMETERS IN THALLIUM-CONTAINING SUPERCONDUCTORS

#### Summary

The relationship is established between the superconducting transition temperature  $T_c$  and the parameters of crystal structure of superconducting ceramic samples of Tl2201 phase. The results of investigation of the influence of high pressure of cold pressing on the length of basic interatomic distances of Tl2201 phase are presented. It is established that the use of the high pressure of cold pressing causes the decrease of the holes concentration in the thallium-containing HTSC samples. It is found that the values of planar distances Cu–O<sub>1<sub>план</sub></sub> and the structure distortion of the CuO<sub>2</sub> layers have the main influence on the value of  $T_c$ .

**ІНФАРМАТЫКА**

УДК 511.344:519.852.2

*В. А. ШЛЫК*

**О СМЕЖНОСТИ ВЕРШИН ПОЛИТОПА РАЗБИЕНИЙ ЧИСЕЛ  
Часть I**

*Институт математики НАН Беларуси*

*(Поступила в редакцию 23.04.2010)*

**Введение.** В большинстве работ о разбиениях чисел исследуются количественные характеристики различных классов разбиений и соотношения между классами [1]. Введение политопа разбиений чисел [2] дало возможность исследовать геометрическую структуру множеств разбиений. В [3] описаны фасеты (границы максимальной размерности) таких политопов и доказаны отдельные достаточные и необходимые условия для того, чтобы заданное разбиение являлось его вершиной. В [4, 5] получен критерий представления разбиения в виде выпуклой комбинации двух других разбиений. С его помощью найдена точная верхняя оценка числа различных частей разбиений, являющихся вершинами, и доказаны новые необходимые условия. Установлено, что для некоторых чисел существуют разбиения, требующие более двух разбиений для своего выпуклого представления. В [6] введены две операции слияния частей разбиений и показано, что все вершины политопа разбиений можно построить с их помощью из относительно небольшого числа опорных вершин. В [7] обнаружена связь между разбиениями и теми фасетами, которым они принадлежат.

Перечисленные результаты используются в данной работе, в которой рассматривается вопрос о смежности вершин политопа разбиений чисел, являющийся одним из основных при изучении любого многогранника. Доказано, что вершины политопа разбиений, полученные с помощью операций слияния частей других вершин, смежны исходным вершинам.

**Политоп разбиений чисел.** Разбиением натурального числа  $n$  называется [1] конечная невозрастающая последовательность натуральных чисел  $\rho = (\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_r)$ , для которых

$$\sum_{j=1}^r \rho_j = n. \quad (1)$$

Числа  $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_r$  называются частями разбиения  $\rho$ . Неформально разбиение  $\rho$  можно рассматривать как представление  $n$  в виде суммы (1) без учета порядка слагаемых.

При построении политопа разбиений чисел каждому разбиению  $\rho$  числа  $n$  сопоставляется неотрицательная целочисленная точка  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ . Каждая координата  $x_i$  точки  $x$  равна числу вхождений числа  $i$  в разбиение  $\rho$ . В дальнейшем мы отождествляем разбиения (1) с соответствующими им точками  $x \in \mathbb{R}^n$ . Для обозначения того, что точка  $x \in \mathbb{R}^n$  является разбиением числа  $n$ , используем принятое в теории разбиений обозначение  $x \vdash n$ . Множество различных частей разбиения  $x$  обозначаем  $S(x) = \{i \in \mathbb{N} : x_i > 0\}$ , множество неотрицательных целых чисел —  $\mathbb{Z}_+$ , а отрезок натуральных чисел  $\{n_1, n_1 + 1, \dots, n_2\} = [n_1, n_2]$ .

Политоп  $P_n \subset \mathbb{R}^n$  разбиений числа  $n$  определяется как выпуклая оболочка множества

$$T_n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1 + 2x_2 + \dots + nx_n = n, x_i \in \mathbb{N}, i = 1, \dots, n\}$$

точек  $x$ , соответствующих разбиениям  $n$ :

$$P_n = \text{conv } T_n.$$

Как и для любого политопа, две вершины  $P_n$  называются смежными, если они принадлежат одному ребру  $P_n$ .

**Вспомогательные результаты.** Согласно [3], фасеты политопа  $P_n$  подразделяются на два класса – тривиальные и нетривиальные. Тривиальными фасетами являются координатные гиперплоскости  $x_i = 0$ ,  $2 \leq i \leq n$ ; гиперплоскость  $x_1 = 0$  фасетой не является. Неравенство

$$\sum_{i=1}^n p_i x_i \geq p_0 \quad (2)$$

определяет нетривиальную фасету политопа  $P_n$  тогда и только тогда, когда  $p_0 = p_n$ , а вектор коэффициентов  $p = (p_1, p_2, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^n$  является допустимым решением системы

$$\begin{aligned} p_i + p_{n-i} &= p_n, \quad 1 \leq i \leq [n/2], \\ p_i + p_j &\geq p_{i+j}, \quad 1 \leq i \leq j < n, \quad i + j < n, \end{aligned} \quad (3)$$

обращает в равенства  $n-2$  ее линейно независимых строк и неколлинеарен вектору  $(1, 2, \dots, n)$ .

Мы продолжим использовать неравенства (2) для обозначения нетривиальных фасет политопа  $P_n$ , записывая их в виде  $(p; p_0)$ , где  $p = (p_1, \dots, p_n)$  – вектор из  $\mathbb{R}^n$ . Будем говорить, что  $k$  фасет  $(p^1; p_0^1), \dots, (p^k; p_0^k)$  политопа  $P \subset \mathbb{R}^n$  линейно независимы, если линейно независимы их векторы коэффициентов  $p^1, \dots, p^k$ .

Определения вершин, ребер и фасет политопа можно найти в [8, 9]. Напомним лишь, что вершиной любого политопа  $P \subset \mathbb{R}^n$  является такая его точка  $x$ , которую нельзя представить в виде выпуклой комбинации

$$x = \sum_{j=1}^k \lambda_j y^j, \quad \sum_{j=1}^k \lambda_j = 1, \quad \lambda_j > 0,$$

некоторых других точек  $y^j \in P$ ,  $1 \leq j \leq k$ ,  $k \geq 2$ . Если аффинная размерность политопа  $P \subset \mathbb{R}^n$  равна  $d$ , то  $x \in P$  является вершиной  $P$  тогда и только тогда, когда она есть пересечение  $d$  линейно независимых фасет политопа  $P$  [8, с. 33]. Поскольку политоп разбиений  $P_n$  лежит в гиперплоскости  $x_1 + 2x_2 + \dots + nx_n = n$  и имеет аффинную размерность  $n-1$  [3], его вершины являются пересечениями  $n-1$  линейно независимых фасет.

Критерий представления разбиения  $x \vdash n$  в виде выпуклой комбинации двух разбиений того же числа утверждает, что такое представление невозможно тогда и только тогда, когда все наборы частей разбиения дают различные суммы [4, 5]. Из критерия следует, что если  $x$  – вершина политопа  $P_n$ , то ни одно число  $m \in [1, n]$ , представимое в виде суммы хотя бы двух частей  $x$ , не является частью  $x$ , т. е.

$$(m = \alpha_{i_1} i_1 + \dots + \alpha_{i_k} i_k, \quad i_1, \dots, i_k \in S(x), \quad \alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_k} \in \mathbb{N}, \quad \alpha_{i_1} \leq x_{i_1}, \dots, \alpha_{i_k} \leq x_{i_k}) \Rightarrow x_k = 0. \quad (4)$$

В [6] введены две операции слияния частей разбиений, которые объединяют некоторые их части в более крупные новые части. При выполнении операции  $C_{u,v}$   $\min(x_u, x_v)$  экземпляров частей  $u$  и  $v$ ,  $u \neq v$ , разбиения  $x \vdash n$  заменяются таким же числом экземпляров новой части  $u+v$ , а при выполнении операции  $C_u$  в новую часть  $x_u u$  объединяются все  $x_u > 1$  имеющихся экземпляров части  $u$ .

Формальное определение операций  $C_{u,v}$  и  $C_u$  следующее. Пусть  $x \vdash n$ , и  $u, v \in S(x)$ ,  $u \neq v$ ; для определенности считаем, что  $x_u \leq x_v$ . Координаты точки  $y = C_{u,v}(x) \in \mathbb{Z}_+^n$  равны:  $y_u = 0$ ,

$y_v = x_v - x_u$ ,  $y_{u+v} = x_{u+v} + x_u$  и  $y_j = x_j$  для  $j \in [1, n]$ ,  $j \neq u, v, u+v$ . В случае операции  $C_u$ , если  $x \vdash n$  и  $x_u > 1$  для некоторого  $u \in S(x)$ , то координаты точки  $y = C_u(x) \in \mathbb{Z}_+^n$  равны:  $y_u = 0$ ,  $y_{x_u u} = x_{x_u u} + 1$  и  $y_j = x_j$  для  $j \in [1, n]$ ,  $j \neq u, x_u u$ . Операции  $C_{u,v}$  и  $C_u$  применимы к любому разбиению, удовлетворяющему соответствующим условиям для  $u$  и  $v$ , однако их важным свойством является то, что если  $x$  – вершина  $P_n$ , то  $C_{u,v}(x)$  и  $C_u(x)$  – тоже его вершины [6]. Заметим, что в этом случае в силу (4)  $u+v, x_u u \notin S(x)$ .

Связь вершин политопа разбиений чисел с теми фасетами, на которых они лежат, состоит в следующем. Для тривиальных фасет она проста: вершина  $x$  политопа  $P_n$  принадлежит всем фасетам  $x_i \geq 0$ ,  $i \notin S(x)$ ,  $i \neq 1$ . Для нетривиальных фасет справедлива

**Т е о р е м а 1** [7]. *Если  $x$  – вершина политопа  $P_n$ , то его вершины  $C_{u,v}(x)$  и  $C_u(x)$  принадлежат всем тем нетривиальным фасетам  $P_n$ , которые содержат  $x$  (плюс, возможно, некоторым дополнительным), а коэффициенты таких фасет удовлетворяют соотношениям:*

- а)  $p_u + p_v = p_{u+v}$  для всех различных частей  $u$  и  $v$  разбиения  $x$ ,
- б)  $x_u p_u = p_{x_u u}$  для любой части  $u$ , входящей в разбиение  $x$  более одного раза.

Таким образом, соотношения а) и б) выделяют некоторые из тех неравенств (3), которые в действительности являются равенствами для всех нетривиальных фасет  $P_n$ , содержащих заданную вершину  $x$ .

Для  $L \subset [1, n]$  будем говорить, что векторы  $a^i \in \mathbb{R}^n$ ,  $i=1, \dots, m$ , линейно независимы на  $L$ , если их координаты  $a_j^i$ ,  $i=1, \dots, m$ ,  $j \in L$ , образуют матрицу ранга  $m$ .

**Смежность вершин.** Операция  $C_{u,v}$  применима только к тем разбиениям  $x \vdash n$ , которые имеют хотя бы две различные части. Такие разбиения существуют только для чисел  $n > 2$ .

**Т е о р е м а 2.** *Пусть  $n > 2$ ,  $x$  – вершина политопа  $P_n$ , и  $y = C_{u,v}(x)$ , для некоторых  $u, v \in S(x)$ ,  $u \neq v$ . Тогда  $x$  и  $y$  – смежные вершины политопа  $P_n$ .*

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** То, что  $y$  – вершина политопа  $P_n$ , доказано в [6]. Для доказательства теоремы достаточно показать, что наборы линейно независимых фасет, содержащих вершины  $x$  и  $y$ , можно выбрать таким образом, чтобы они различались всего лишь одной фасетой. Тогда пересечение их общих фасет и гиперплоскости  $x_1 + 2x_2 + \dots + nx_n = n$ , в которой лежит политоп  $P_n$ , образует прямую, содержащую его ребро  $(x, y)$ .

Пусть  $x$  – вершина  $P_n$ ,  $|S(x)| = k$  и  $y = C_{u,v}(x)$ . Обозначим  $S_0(x) = [1, n] \setminus S(x) = \{i \in [1, n] \mid x_i = 0\}$ , тогда  $|S_0(x)| = n - k$ . Для числа  $m$  тривиальных фасет  $x_j = 0$ ,  $j \in S_0(x) \setminus \{1\}$ , содержащих  $x$ , имеем  $m = n - k$  или  $m = n - k - 1$  в зависимости от того,  $1 \in S(x)$  или  $1 \in S_0(x)$ . Поскольку  $x$  – вершина, найдутся  $t = n - m - 1$  нетривиальных фасет  $(p^i; p_n^i)$ ,  $i=1, \dots, t$ , политопа  $P_n$ , которые вместе с указанными тривиальными фасетами составляют набор из  $n - 1$  содержащих  $x$  линейно независимых фасет. С точностью до перестановки строк и столбцов матрица коэффициентов фасет из этого набора имеет вид

$$M = \begin{pmatrix} 1 & & 0 & 0 & \dots & 0 \\ & \ddots & & & & \\ 0 & & 1 & 0 & \dots & 0 \\ p_1^1 & \dots & p_m^1 & p_{m+1}^1 & \dots & p_n^1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_1^t & \dots & p_m^t & p_{m+1}^t & \dots & p_n^t \end{pmatrix}. \quad (5)$$

В верхних  $m$  строках, соответствующих тривиальным фасетам, единицы стоят в столбцах  $j \in S_0(x) \setminus \{1\}$ . Фасеты  $(p^i; p_n^i)$ ,  $i=1, \dots, t$ , линейно независимы на множестве столбцов  $S(x) \cup \{1\}$ , расположенных правее единичной подматрицы. Среди этих столбцов находятся столбцы  $p_1, p_u$

и  $p_v$ , но в соответствии с (4) там нет столбца  $p_{u+v}$ . По теореме 1 фасеты  $(p^i; p_n^i)$ ,  $i=1, \dots, t$ , содержат вершину  $y$ , и  $p_{u+v}^i = p_u^i + p_v^i$  для всех  $i$ . Следовательно, столбец  $p_{u+v}$  из элементов нижних  $t$  строк матрицы  $M$  равен сумме аналогичных столбцов  $p_u$  и  $p_v$ , и фасеты  $(p^i; p_n^i)$  линейно независимы на  $S(x) \cup \{1, u+v\} \setminus \{u\}$ .

Возможны два случая: 1)  $u \neq 1$  и 2)  $u = 1$ .

В случае 1) в число тривиальных фасет, содержащих вершину  $y$ , входят все гиперплоскости  $x_j = 0$ ,  $j \in S_0(x) \setminus \{1\}$ , кроме  $x_{u+v} = 0$ . Вместо нее  $y$  принадлежит новой тривиальной фасете  $x_u = 0$ . Множества столбцов  $S(x) \cup \{1, u+v\} \setminus \{u\}$  и  $(S_0(x) \setminus \{1, u+v\}) \cup \{u\} = ([1, n] \setminus (S(x) \cup \{1, u+v\})) \cup \{u\}$  не пересекаются, поэтому объединение указанных нетривиальных и тривиальных фасет  $(p^i; p_n^i)$ ,  $i=1, \dots, t$ , дает требуемый набор из  $n-1$  линейно независимых фасет политопа  $P_n$ , содержащих вершину  $y$ . Он отличается от первоначального набора фасет, содержащих  $x$ , только одной фасетой: вместо фасеты  $x_{u+v} = 0$  он содержит фасету  $x_u = 0$ . Таким образом, мы доказали, что в случае 1) вершины  $x$  и  $y$  политопа  $P_n$  смежны.

Рассмотрим случай 2). Если  $x_u = x_v$ , то, поменяв ролями  $u$  и  $v$ , мы приходим к случаю 1). Поэтому будем считать, что  $x_u < x_v$ . Так как  $u = 1$ , мы имеем пока всего  $n-2$  фасет политопа  $P_n$ , содержащих вершину  $y$ . Это  $t$  «унаследованных» от  $x$  нетривиальных фасет  $(p^i; p_n^i)$ , и  $m-1 = n-t-2$  тривиальных фасет. Так как  $v, u+v \notin S_0(y)$ , а гиперплоскость  $x_u = x_1 = 0$ , несмотря на то, что  $u \in S_0(y)$ , фасетой  $P_n$  не является, то в число последних фасет входят только тривиальные фасеты  $x_j = 0$ ,  $j \in S_0(x) \setminus \{u+v\}$ . Аналогично случаю 1), хотя и проще, заключаем, что имеющиеся  $n-2$  фасеты линейно независимы. Однако  $y$  – вершина  $P_n$ , значит, должна существовать еще одна содержащая  $y$  фасета  $F$  политопа  $P_n$ , которая линейно не зависит от указанных фасет. Поскольку тривиальные содержащие  $y$  фасеты уже исчерпаны, фасета  $F$  обязана быть нетривиальной. В итоге мы снова получили набор из  $n-1$ , содержащих  $y$  линейно независимых фасет  $P_n$ . Он отличается от исходного набора фасет, содержащих  $x$ , только одной фасетой: вместо фасеты  $x_{u+v} = 0$  он содержит фасету  $F$ . Следовательно, и в случае 2) вершины  $x$  и  $y$  политопа  $P_n$  смежны. Теорема доказана.

Заметим, что операция  $C_u$  применима только к разбиениям чисел  $n > 1$ .

**Т е о р е м а 3.** Пусть  $n > 1$ ,  $x$  – вершина политопа  $P_n$ , и  $y = C_u(x)$ , для некоторого  $u \in S(x)$ . Тогда  $x$  и  $y$  – смежные вершины политопа  $P_n$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о** в целом аналогично доказательству предыдущей теоремы. Согласно [6],  $y$  – вершина  $P_n$ . Построим такие наборы из  $n-1$  линейно независимых фасет  $P_n$ , которые различаются только одной фасетой и которым принадлежат соответственно вершины  $x$  и  $y$ . Используем обозначение  $S_0(x)$  из доказательства теоремы 2.

Пусть  $x$  – вершина  $P_n$ ,  $|S(x)| = k$  и  $y = C_u(x)$ . Снова имеем  $|S_0(x)| = n-k$ . Вершину  $x$  содержат  $m$  тривиальных фасет и некоторые  $t = n-m-1$  нетривиальные фасеты  $(p^i; p_n^i)$ ,  $i=1, \dots, t$ , политопа  $P_n$ . Здесь  $m = n-k$ , если  $1 \in S(x)$ , и  $m = n-k-1$ , если  $1 \in S_0(x)$ , и все указанные фасеты линейно независимы. После перестановки строк и столбцов матрица  $M$  коэффициентов этих фасет имеет вид (5). Единицы стоят в столбцах  $j \in S_0(x) \setminus \{1\}$ . Фасеты  $(p^i; p_n^i)$ ,  $i=1, \dots, t$ , линейно независимы на множестве столбцов  $S(x) \cup \{1\}$ , включающем столбцы  $p_1$  и  $p_u$ , но не столбец  $p_{x_u}$  в силу (4). По теореме 1 фасеты  $(p^i; p_n^i)$  содержат вершину  $y$ , и выполняются соотношения  $p_{x_u}^i = x_u p_u^i$ ,  $i=1, \dots, t$ . Столбец коэффициентов  $p_{x_u}$  нетривиальных фасет кратен столбцу коэффициентов  $p_u$ , и значит, эти фасеты линейно независимы на столбцах  $S(x) \cup \{1, x_u\} \setminus \{u\}$ .

Снова рассмотрим два случая: 1)  $u \neq 1$  и 2)  $u = 1$ .

В случае 1) имеем следующий набор содержащих вершину  $y$  фасет политопа  $P_n$ . В дополнение к  $t$  нетривиальным фасетам  $(p^i; p_n^i)$  в него входят  $n-k$  тривиальных фасет, содержащих вершину  $x$ . Это все фасеты  $x_j = 0, j \in S_0(x) \setminus \{1, x_u u\}$ , и  $x_u = 0$ . Множества столбцов  $S(x) \cup \{1, x_u u\} \setminus \{u\}$  и  $(S_0(x) \setminus \{1, x_u u\}) \cup \{u\} = ([1, n] \setminus (S(x) \cup \{1, x_u u\})) \cup \{u\}$  не пересекаются, следовательно, все перечисленные  $n-1$  фасеты линейно независимы. Мы построили искомым набор содержащих вершину  $y$  фасет политопа  $P_n$  – он отличается от исходного набора фасет, содержащих  $x$ , тем, что вместо фасеты  $x_{x_u u} = 0$  он содержит фасету  $x_u = 0$ . Следовательно, вершины  $x$  и  $y$  политопа  $P_n$  смежны.

В случае 2) дополнительно к  $t$  нетривиальным фасетам  $(p^i; p_n^i)$  вершина  $y$  принадлежит только  $m-1$  тривиальным фасетам  $x_j = 0$  для  $j \in S_0(x) \setminus \{x_u u\}$ , так как гиперплоскость  $x_u = x_1 = 0$  не является фасетой  $P_n$ . Так что мы имеем пока всего  $n-2$  линейно независимых фасет, содержащих  $y$ . Однако  $y$  – вершина  $P_n$ , значит, должна существовать еще одна содержащая  $y$  фасета  $F$  политопа  $P_n$ , которая линейно не зависит от всех уже перечисленных. Поскольку тривиальных содержащих  $y$  фасет больше нет, фасета  $F$  нетривиальная. Таким образом, мы и в этом случае получили набор из  $n-1$  содержащих  $y$  линейно независимых фасет  $P_n$ , который отличается от исходного набора фасет  $P_n$ , содержащих  $x$ , только одной фасетой: вместо фасеты  $x_{u+v} = 0$  он содержит фасету  $F$ . Следовательно, и в случае 2) вершины  $x$  и  $y$  политопа  $P_n$  смежны. Теорема доказана.

**З а м е ч а н и е.** Подытожим, как можно выбрать наборы линейно независимых фасет политопа  $P_n$ , определяющие вершины  $x$  и  $y = C_{u,v}(x)$  или  $y = C_u(x)$ . Из доказательств теорем 2 и 3 видно, что при  $u \neq 1$  это можно сделать таким образом, что в набор фасет для  $y$  войдет тривиальная фасета  $x_u = 0$  вместо тривиальной фасеты  $x_{u+v} = 0$  для  $y = C_{u,v}(x)$  или  $x_{x_u u} = 0$  для  $y = C_u(x)$ . Если же  $u = 1$ , то в набор фасет, определяющих  $y$ , вместо фасеты  $x_{u+v} = 0$  или  $x_{x_u u} = 0$ , входивших в набор фасет, определяющих  $x$ , войдет некоторая содержащая  $y$  нетривиальная фасета  $F$ .

Проиллюстрируем утверждения теорем 2 и 3, применив операции слияния частей к некоторым вершинам политопа  $P_7$ . Он имеет четыре нетривиальные фасеты [7]:

$$(a) x_1 + x_3 + x_5 + x_7 = 1, \quad (b) x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_5 + 2x_6 + 3x_7 = 3, \\ (c) 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 3x_4 + 2x_6 + 4x_7 = 4, \quad (d) 2x_1 + x_2 + 2x_4 + x_5 + 2x_7 = 2.$$

Нетрудно проверить, что  $x = (1, 3, 0, 0, 0, 0, 0)$  вершина  $P_7$ . Она принадлежит пяти тривиальным фасетам  $x_3 = x_4 = \dots = x_7 = 0$  и нетривиальной фасете (a). Применив к  $x$  операцию  $C_{1,2}$ , получим вершину  $y^1 = (0, 2, 1, 0, 0, 0, 0)$ , которая принадлежит только четырем тривиальным фасетам  $x_4 = \dots = x_7 = 0$ , но теперь уже двум нетривиальным фасетам (a) и (d). Гиперплоскость  $x_1 = 0$ , соответствующая исчезнувшей части  $u = 1$ , не является фасетой  $P_7$ , и в соответствии со случаем 2) теоремы 3 фасета (d) заменила фасету  $x_3 = 0$  в наборе фасет, определяющих  $y^1$ . Применив к  $x$  операцию  $C_2$ , получим вершину  $y^2 = (1, 0, 0, 0, 0, 1, 0)$ . Вместо содержавшей  $x$  фасеты  $x_6 = 0$   $y^2$  в соответствии со случаем 1) теоремы 4 принадлежит фасете  $x_2 = 0$ . То, что  $y^2$  принадлежит также и всем остальным нетривиальным фасетам, не важно – для вершины  $y^2$  имеется набор линейно независимых фасет, гарантирующий ее смежность с вершиной  $x$  в политопа  $P_n$ . Для полноты картины предлагаем читателю взять в качестве исходной вершину  $y^1$ .

## Литература

1. Э н д р ю с Г. Теория разбиений. М., 1982.
2. Ш л ы к В. А. // Весті АН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 1996. № 3. С. 89–92.

3. Shlyk V. A. // European J. Combin. 2005. Vol. 26. N 8. P. 1139–1153, doi:10.1016/j. ejc.2004.08.004.
4. Шлык В. А. // Докл. НАН Беларуси. 2008. Т. 52, № 3. С. 5–10.
5. Шлык В. А. // Вестник БГУ. Сер. 1. 2009. № 2. С. 109–114.
6. Шлык В. А. // Докл. НАН Беларуси. 2009. № 6. С. 27–32.
7. Шлык В. А. // Вестник БГУ. Сер. 1. 2010. № 1. С. 109 -114.
8. Емеличев В. А., Ковалев М. М., Кравцов В. А. Многогранники, графы, оптимизация (комбинаторная теория выпуклых многогранников). М., 1981.
9. Бренстед А. Введение в теорию выпуклых многогранников. М., 1988.

*V. A. SHLYK*

**ADJACENCY OF INTEGER PARTITION POLYTOPE VERTICES**

**Part I**

**Summary**

We prove that application of operations of merging parts of integer partitions, introduced earlier, to vertices of an integer partition polytope results in its vertices adjacent to the initial vertices.

**КАРОТКІЯ ПАВЕДАМЛЕННІ**

УДК 511.36

Н. В. БУДАРИНА<sup>1</sup>, В. И. БЕРНИК<sup>2</sup>, Х. О'ДОННЕЛ<sup>1</sup>

**ОБ УСЛОВИЯХ, КОГДА БЛИЖАЙШИЙ К АРГУМЕНТУ КОРЕНЬ  
ЦЕЛОЧИСЛЕННОГО МНОГОЧЛЕНА ОКАЗЫВАЕТСЯ  
ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫМ ЧИСЛОМ**

<sup>1</sup>Университет г. Мейнус (Ирландия)

<sup>2</sup>Институт математики НАН Беларуси

(Поступила в редакцию 26.03.2010)

Ближайший к  $t$  корень  $\alpha$  многочлена  $P(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \dots + a_1 t + a_0$  с целыми коэффициентами и  $H = \max_{0 \leq i \leq n} |a_i|$  может оказаться как действительным, так и комплексным числом. Обозначим через  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  его действительные или комплексные корни, а через  $\gamma_1, \dots, \gamma_n$  – корни  $P(w)$  из некоторого алгебраического расширения поля  $p$ -адических чисел  $\mathbb{Q}_p$ . Пусть  $\alpha_1$  – ближайший к  $x$  корень  $P(x)$  в метрике  $\mathbb{R}$ , а  $\gamma_1$  – ближайший к  $w$  корень  $P(w)$  в метрике  $\mathbb{Q}_p$ . На международной конференции в Шауляе летом 2008 г. Ю. В. Нестеренко поставил проблему о величине правой части неравенства

$$|P(x)| < \varepsilon(n, H), \quad (1)$$

при которой  $\alpha_1 \in \mathbb{R}$ , и решил задачу для неравенства  $|P(w)|_p < \varepsilon_1(n, H)$ . В данной работе эта проблема решается для функций вида  $\varepsilon(n, H) = H^{-w}$  при  $H > H_0(n)$ .

**Т е о р е м а.** Из неравенства

$$|P(x)| < H^{-w}, \quad w > 2n - 3, \quad \deg P \geq 2 \quad (2)$$

при достаточно большом  $H > H_0(n)$  следует, что  $\alpha_1 \in \mathbb{R}$ .

Далее через  $c_1 = c_1(n), c_2, \dots$  мы будем обозначать величины, зависящие от  $n$  и не зависящие от  $H$ .

**Д о к а з а т е л ь с т в о.** Вначале предположим, что полином  $P(x)$  неприводим. Тогда  $\alpha_1$  – корень кратности единица и  $|D(P)| \geq 1$ , где

$$D(P) = a_n^{2n-2} \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\alpha_i - \alpha_j)^2 \quad (3)$$

дискриминант  $P(x)$ . Воспользуемся несложной леммой [1].

**Л е м м а.** При выполнении неравенства (3) справедливо неравенство

$$|x - \alpha_1| < 2^{n-1} H^{-w} |P'(\alpha_1)|^{-1}.$$

В (3) выделим производную  $P'(\alpha_1) = a_n(\alpha_1 - \alpha_2) \cdot \dots \cdot (\alpha_1 - \alpha_n)$  и оценим ее снизу. При этом можно считать, что  $|a_n| = c_1 H$ , откуда следуют неравенства  $\alpha_j < c_2$  [1]. Получим

$$|P'(\alpha_1)| > c_3 H^{-n+2}, \quad |x - \alpha_1| < c_4 H^{-w+n-2}. \quad (4)$$

Если  $\alpha_1$  – не вещественное число, то среди  $\alpha_2, \dots, \alpha_n$  найдется корень  $P(x)$ , комплексно сопряженный к  $\alpha_1$ . Пусть это будет  $\alpha_2$ . Тогда из неравенства (3) и (4) имеем

$$1 \leq 2|x - \alpha_1| |\alpha_1 - \alpha_2|^{-1} < c_5 H^{-w+2n-3}. \quad (5)$$

Ясно, что неравенство (5) противоречиво при  $w > 2n - 3$  и  $H > H_0(n)$ .

Если полином  $P(x)$  приводим, то разложим его на произведение степеней неприводимых полиномов:  $P(x) = t_1^{s_1}(x) \cdot \dots \cdot t_k^{s_k}(x)$ . Хорошо известно [1], что  $c_7 H(P) < \prod_{i=1}^k H^{s_i}(t_i) < c_8 H(P)$ . Поэтому из (2) получим существование некоторого  $k_0$ ,  $1 \leq k_0 \leq k$ , для которого  $|t_{k_0}(x)| < c_9 H(t_{k_0})^{-w}$  и  $H(t_{k_0}) \rightarrow \infty$  при  $H(P) \rightarrow \infty$ . Предположение о том, что  $\alpha_1$  не действительное при  $w > 2n - 3$ , как и в первом случае, приведет к противоречию.

Покажем, что теорему нельзя существенно улучшить. Рассмотрим многочлен  $P_n(x) = x^{n-2}((b^2 + 1)x^2 + 2bx + 1)$ ,  $b \in \mathbb{Z}$ ,  $b > 1$ . Его высота равна  $b^2 + 1$ . Многочлен  $P_n(x)$  имеет

комплексные корни  $\frac{-b \pm i}{b^2 + 1}$ , и корень 0 кратности  $n - 2$ . В точке  $x_0 = -\frac{b}{b^2 + 1}$  значение

$$R_2(x_0) = (b^2 + 1)x_0^2 + 2bx_0 + 1 = \frac{1}{b^2 + 1} = H^{-1}, \quad \text{а } |x_0| = \frac{b}{b^2 + 1} \leq \frac{\sqrt{1 + b^2}}{1 + b^2} = H^{-\frac{1}{2}}. \quad \text{Поэтому}$$

$$|P_n(x_0)| = |x_0|^{n-2} H^{-1} \leq H^{-\frac{n}{2}}.$$

В то же время расстояние  $x_0$  до нуля равно  $\frac{b}{b^2 + 1}$ , т. е.  $\alpha_1$  – ближайший к  $x_0$  корень. Поэтому в теореме нельзя взять  $w \leq \frac{n}{2}$ .

Авторы благодарны Михаилу Карпуку за улучшение конструкции многочлена  $P_n(x)$ .

### Литература

1. С п р и н д ж у к В. Г. Проблема Малера в метрической теории чисел. – Минск, 1967.

*N. V. BUDARINA, V. I. BERNIK, H. O'DONNELL*

**CONDITIONS WHEN THE CLOSEST ROOT OF AN INTEGRAL POLYNOMIAL IS A REAL**

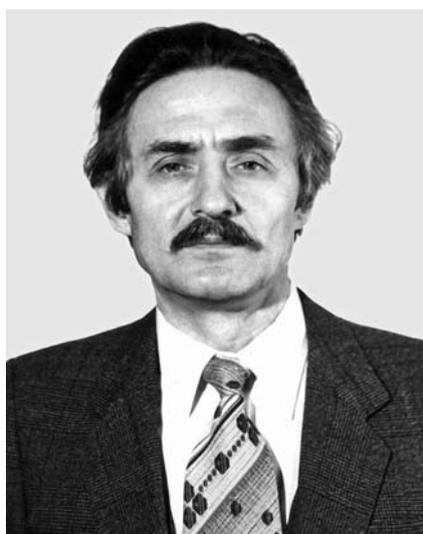
### Summary

It is shown in the article that the closest root to a given real number  $x$  of an integral polynomial  $P(x)$  is a real algebraic if  $|P(x)| < H^{-w}$ , where  $H$  is a maximal absolute value of coefficients of  $P(x)$  and  $w > 2n - 3$ .

## ВУЧОНЫЯ БЕЛАРУСІ

### ВЛАДИМИР АНТОНОВИЧ ПИЛИПОВИЧ

(К 80-летию со дня рождения)



5 января 2011 г. исполнилось 80 лет крупному ученому в области лазерной физики и оптической обработки информации, заслуженному деятелю науки Беларуси, лауреату Государственных премий СССР и республики Беларусь, доктору физико-математических наук, профессору, академику Владимиру Антоновичу Пилиповичу.

Владимир Антонович родился в д. Слобода Мозырского района Гомельской области в семье учителя. В 1949 г. окончил Гребеневскую СШ Могилевского района и поступил на физико-математический факультет Белорусского государственного университета. После окончания БГУ в 1954 г. был оставлен в аспирантуре. Во время обучения в аспирантуре был командирован в Государственный оптический институт им. С. И. Вавилова в г. Ленинграде. Именно в этом институте В. А. Пилипович прошел прекрасную школу физической оптики. Под руководством одного из крупнейших физиков-оптиков Б. Я. Свешникова им выполнен цикл исследований

длительного свечения органофосфоров (полученные результаты были обобщены в кандидатской диссертации). После окончания аспирантуры в 1957 г. направлен на работу в Институт физики и математики АН БССР на должность младшего научного сотрудника, а в 1959 г. после присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук переведен на должность старшего научного сотрудника.

Новым этапом в научной деятельности В. А. Пилиповича явились исследования в области лазерной физики, начатые им в Институте физики АН БССР вскоре после появления первых сообщений об открытии лазеров. Одним из первых в республике он начал экспериментальные исследования твердотельных лазеров. Под его руководством в 1963 г. был создан первый в Беларуси лазер на рубине, а впоследствии и на неодимовом стекле. Им разработаны чувствительные методы измерения потерь излучения, определяющих коэффициент полезного действия лазера, выполнены работы, посвященные экспериментальному и теоретическому исследованию фототропных сред и их применению, как в качестве пассивных затворов твердотельных лазеров, так и в качестве активных сред для получения вынужденного излучения. Экспериментально исследованы особенности взаимодействия коротких лазерных импульсов с растворами сложных молекул, а также влияние их спектрально-люминесцентных свойств на свойства генерации твердотельных лазеров с пассивными затворами на основе таких сред. Впервые экспериментально было измерено развитие моноимпульсной генерации в лазерах с активными и пассивными затворами в широком диапазоне изменения интенсивности, начиная с уровня спонтанных шумов, и установлена корреляция между временем развития гигантского импульса в резонаторе и спектральной шириной излучения. Результаты исследований свойств лазеров с просветляющимися филь-

трами обобщены и систематизированы в монографии «Оптические квантовые генераторы с просветляющимися фильтрами», изданной в 1975 г.

В. А. Пилипович положил начало исследованиям по анизотропии вынужденного излучения растворов органических соединений, которые составили цикл работ «Явления анизотропии в лазерах и принципы поляризационной лазерной спектроскопии», удостоенных Государственной премии Республики Беларусь (1996 г.).

Результаты исследований влияния потерь и анизотропии усиления на работу лазеров обобщены В. А. Пилиповичем в докторской диссертации, успешно защищенной им в 1972 г.

В 1971 г. В. А. Пилипович был назначен директором Лаборатории электроники АН БССР, преобразованной в 1973 г. в Институт электроники АН БССР, а затем – директором указанного института. По его инициативе в институте развернуты исследования по перспективным направлениям микро- и оптоэлектроники, оптическим методам обработки информации, научному приборостроению, сформирована первая в Беларуси программа фундаментальных исследований по разработке научных основ создания элементной базы быстродействующих микро- и оптоэлектронных устройств обработки информации.

Под руководством и при непосредственном участии В. А. Пилиповича разработаны эффективные методы и средства многоканальной модуляции лазерных пучков на основе сегнетоэлектрических жидкокристаллических электро- и акустооптических материалов, методы формирования и голографической записи двумерных массивов оптической информации, предложены и исследованы новые материалы для реверсивной записи и отображения оптической информации, созданы макеты голографических запоминающих устройств. Часть из названных результатов вошла в цикл работ «Фундаментальные исследования фоторефрактивных и жидких кристаллов для оптических систем обработки информации», удостоенный в 1985 г. Государственной премии СССР.

В течение ряда лет были выполнены важные работы по компенсации затухания и усилению информационных цифровых сигналов в оптическом волокне, разработан эффективный метод амплитудной модуляции света, основанный на многократной многолучевой интерференции, а также методы оптического мультиплексирования и многопараметрического кодирования информационных сигналов, обеспечивающие высокую надежность и скорость передачи информации.

В настоящее время исследования направлены на изучение фотоэлектрических преобразователей, в том числе солнечных элементов и концентраторов солнечной энергии, а также на разработку методов и средств измерения их параметров.

В. А. Пилипович опубликовал более чем 400 научных работ, в том числе 3 монографии, свыше двухсот сорока научных статей и свыше ста семидесяти авторских свидетельств и патентов на изобретение. В области лазерной физики и оптической обработки информации В. А. Пилиповичем создана признанная научная школа, среди его учеников 3 доктора и 32 кандидата наук.

В. А. Пилипович активно и плодотворно занимается научно-организационной деятельностью. На протяжении многих лет он являлся членом ряда научных и научно-технических советов и секций АН СССР, Госкомитета СССР по информатике и вычислительной технике МРП СССР, ВАК СССР, комиссий Президиума СМ БССР по вопросам научно-технического прогресса и др. Со дня основания и по 1998 г. он директор института, с 1983 по 1987 г. работал Главным ученым секретарем Президиума АН БССР. За высокие достижения в научной, научно-организационной работе и подготовке научных кадров В. А. Пилипович награжден орденом Трудового Красного Знамени и медалью «За доблестный труд».

Сегодня академик Владимир Антонович Пилипович – главный научный сотрудник основанной им лаборатории фотоэлектрических преобразователей Института физики им. Б. И. Степанова НАН Беларуси. Он продолжает активно заниматься научной работой. Коллеги и ученики желают ему долгих лет здоровья и плодотворной научной деятельности.

*Отделение физики, математики и информатики НАН Беларуси,  
Институт физики им. Б. И. Степанова НАН Беларуси,  
Белорусское физическое общество*

## ВІКТАР СЯМЁНАВІЧ БУРАКОЎ

(Да 80-годдзя з дня нараджэння)



25 сакавіка 2011 г. спаўняецца 80 гадоў выдатнаму беларускаму вучонаму і арганізатару навукі, акадэміку, доктару фізіка-матэматычных навук, заслужанаму дзеячу навукі і тэхнікі Беларусі, лаўрэату Дзяржаўнай прэміі Беларусі, прафесару Віктару Сямёнавічу Буракову. В. С. Буракоў шырока вядомы ў навуковым свеце як спецыяліст у галіне фізікі плазмы, лазернай спектраскапіі, квантавай электронікі.

Нарадзіўся Віктар Сямёнавіч у вёсцы Забалоцце Ушачскага раёна Віцебскай вобласці. Скончыўшы Докшыцкую сярэднюю школу ў 1950 г., паступіў на фізіка-матэматычны факультэт Беларускага дзяржаўнага ўніверсітэта. Пасля заканчэння БДУ быў накіраваны ў Інстытут фізікі Акадэміі навук, з якім неразрыўна звязана ўся яго далейшая навуковая дзейнасць. На першым этапе сваёй навуковай работы В. С. Буракоў займаўся развіццём эмісійнага спектральнага аналізу. Ён унёс вялікі ўклад у распрацоўку фізічных асноў метаду і яго ўкараненне на прадпрыемствах Беларусі. Вынікі гэтай працы

абагульнены ім у манаграфіі «Практычны дапаможнік па спектральнаму аналізу» (сааўтар – прафесар А. А. Янкоўскі), выдадзенай у Беларусі (1960 г.) і Англіі (1964 г.).

У далейшым навуковыя інтарэсы В. С. Буракова канцэнтруюцца на спектраскапіі плазмы, лазернай фізіцы, навуковым прыборабудаванні. Ім распрацаваны новыя спосабы выкарыстання лазераў у дыягностыцы плазмы: вызначэнні яе тэмпературы, ціску, канцэнтрацыі часцінак і аптычнай шчыльнасці, створана адпаведная апаратура, а таксама даследаваны працэсы ўзаемадзеяння лазернага выпраменьвання з плазмай і інтэрпрэтаваны нелінейна-аптычныя эфекты ў плазме.

У ліку першых даследчыкаў В. С. Буракоў пачаў распрацоўку новых метадаў вызначэння энергетычных характарыстык розных тыпаў лазераў, спосабаў кіравання параметрамі лазернага выпраменьвання. Пад яго кіраўніцтвам быў створаны першы ў Беларусі эксімерны лазер, ўпершыню праведзены даследаванні працэсаў фарміравання характарыстык яго выпраменьвання, створаны крыніцы выпраменьвання з заданымі параметрамі: вузкай лініяй і малой разыходнасцю пучка. Гэта паслужыла падставай для шэрагу практычных прымяненняў распрацаваных лазераў у нелінейнай аптыцы, у прыватнасці, для генерацыі кампанент вымушанага камбінацыйнага рассеяння ў сціснутых газах. Створаныя лазеры знайшлі таксама выкарыстанне ў лідарнай сістэме дыстанцыйнага кантролю стратасфернага азону, што важна для вырашэння праблемы маніторынгу міжрэгіянальнага пераносу забруджвання ў атмасферы Зямлі.

Значную навуковую каштоўнасць маюць піянерскія работы В. С. Буракова з супрацоўнікамі па нелінейнаму пераўтварэнню частаты лазернага выпраменьвання ў вобласць вакуумнага ўльтрафіялету і пашырэнню дыяпазону даўжынь хваляў выпраменьвання.

Асабліва плённымі аказаліся работы В. С. Буракова ў галіне селектыўнай лазернай спектраскапіі: унутрырэзанатарнай і флуарэсцэнтнай. Ім праведзены комплексны аналіз магчымасцей гэтых метадаў, распрацаваны спосабы атамізацыі і ўзбуджэння рэчыва, а таксама спецыялізаваныя дыягнастычныя лазерныя комплексы з перанастраіваемай частатой выпраменьвання.

Сумесна з расійскімі калегамі Віктарам Сямёнавічам з супрацоўнікамі выкананы важны цыкл работ па прымяненні метаду рэзананснай флуарэсцэнцыі для вызначэння параметраў высокатэмпературнай плазмы ва ўстаноўках такімак. Вынікі гэтых работ унеслі значны ўклад у развіццё фізічных мадэлей працэсаў у плазме з тэмпературай у сотні электронвольт, ініцыявалі стварэнне лазерна-флуарэсцэнтных дыягностык на іншых высокатэмпературных плазменных устаноўках.

В. С. Буракоў не перастае здзіўляць калег сваёй творчай актыўнасцю. Сёння навуковыя інтарэсы Віктара Сямёнавіча накіраваны на далейшае развіццё метадаў лазернага спектральнага аналізу, даследаванне фізіка-хімічных працэсаў у лазерна-абляцыйнай плазме, аптымізацыі яе кампанентнага складу для выкарыстання ў аналітычнай практыцы. Прапанаваны і рэалізаваны некалькі арыгінальных варыянтаў метаду лазернага спектральнага аналізу, якія ўключаюць, у прыватнасці, выкарыстанне схем двухімпульснай лазернай абляцыі, камбінацыю лазернага пробаадбору і атамізацыі прадуктаў абляцыі ў электраразраднай плазме, а таксама спалучэнне лазернага пробаадбору ў вадкасці з атамізацыяй рэчыва ў індуктыўна-звязанай плазме. Новыя падыходы забяспечылі больш эфектыўнае ўзбуджэнне спектральных ліній, дазволілі павысіць адчувальнасць і дакладнасць аналізу элементнага складу многакампанентных узораў, такіх як тэхналагічныя пакрыцці, будаўнічыя матэрыялы на аснове цэменту, мінералы, глебы і г. д.

Атрымала новае жыццё і раней выказаная ідэя аб магчымасці распрацоўкі безэталоннага экспрэснага метаду лазернага мікрааналізу для вызначэння колькаснага кампанентнага складу рэчыва. Распрацаваныя прыклады такіх метадык для вырабаў з металаў, у тым ліку каляровых і каштоўных, цэментных раствораў, а таксама прадметаў, якія уяўляюць гісторыка-мастацкую каштоўнасць, паказалі прынцыпова важнае значэнне метаду для спектрааналітычнай практыкі ў Рэспубліцы Беларусь, паколькі забяспечваецца экспрэсны аналіз у рэжыме, бліжэй да неразбуральнага кантроля без неабходнасці прымянення сертыфікаваных стандартных узораў, вытворчасць якіх у нашай краіне адсутнічае.

Важнае навуковае значэнне маюць даследаванні, накіраваныя на вырашэнне адной з актуальных задач сучаснай фізікі – устанаўленне заканамернасцей утварэння кластэраў і нанаразмерных структур у плазменных асяроддзях. Сумесна з вучнямі В. С. Буракоў распрацаваў новы навуковы накірунак – плазмаактываваны сінтэз нанаразмерных часцінак на аснове працэсаў лазернай і электрычнай эрозіі ў вадкіх асяроддзях, які паказаў сваю перспектыўнасць для стварэння новых матэрыялаў з мадыфікаванымі характарыстыкамі і іх практычнага выкарыстання.

Акадэміку В. С. Буракову ўласцівы лепшыя рысы вучонага: прынцыповасць і добрабычлівасць, мэтанакіраванасць, пастаянны пошук новых перспектыўных накірункаў даследаванняў, інтуіцыя, заснаваная на шырокім дыяпазоне ведаў і ўліку запатрабаванняў часу і практыкі. Ён аўтар больш за 400 навуковых прац і вынаходніцтваў. Ідэі Віктара Сямёнавіча актыўна развіваюць яго шматлікія вучні, сярод якіх тры доктары і шаснаццаць кандыдатаў навук. За навуковыя дасягненні ў галіне фізікі ў 1974 г. яму прысуджана Дзяржаўная прэмія БССР.

В. С. Буракоў – таленавіты арганізатар навукі. Ён вызначыў і развіў многія новыя накірункі навуковых даследаванняў, адыграў важную ролю ў развіцці навуковага прыборабудавання. Працуючы намеснікам дырэктара Інстытута фізікі ён актыўна ўдзельнічаў у стварэнні пры Інстытуце спецыяльнага канструктарска-тэхналагічнага бюро з вопытнай вытворчасцю, Цэнтра аўтаматызаваных спектраскапічных вымярэнняў, Міжведамаснага канструктарскага аддзела Інстытута і БелОМА. У 1983–1987 гг. ён працаваў першым дырэктарам вопытна-вытворчага прадпрыемства АН СССР па стварэнні ўнікальных фізічных прыбораў і абсталявання. Віктар Сямёнавіч быў дырэктарам-арганізатарам Інстытута малекулярнай і атамнай фізікі НАН Беларусі, узначальваў Аддзяленне фізікі, матэматыкі і інфарматыкі НАН Беларусі (1992–1997 гг.), з'яўляўся членам падкамітэта па Дзяржаўных прэміях Рэспублікі Беларусь у галіне навукі і тэхнікі, Прэзідэнтам Беларускага фізічнага таварыства. Ён быў галоўным рэдактарам «Часопіса прыкладной спектраскапіі» (1989–1992 гг.), часопіса «Весці Нацыянальнай акадэміі навук Беларусі. Серыя фізіка-матэматычных навук» (1992–1997), членам рэдкалегіі часопіса РАН «Прыборы і тэхніка эксперымента», навуковым кіраўніком Дзяржаўнай навукова-тэхнічнай праграмы

«Прыборы для навуковых даследаванняў», каардынатарам Дзяржаўнай праграмы фундаментальных даследаванняў «Плазмадынаміка».

За вялікі ўклад у навуку і плённую навукова-арганізацыйную дзейнасць В. С. Буракоў узнагароджаны ордэнам Працоўнага Чырвонага Сцяга, ордэнам Айчыны III ступені, Ганаровай граматай Вярхоўнага Савета БССР і медалямі.

Калегі і вучні Віктара Сямёнавіча сардэчна віншуюць яго з юбілеем і жадаюць моцнага здароўя, навуковага даўгалецця і новых творчых дасягненняў.

*Аддзяленне фізікі, матэматыкі і інфарматыкі НАН Беларусі,  
Беларуское фізічнае таварыства*

Нацыянальная акадэмія наук Беларусі

**РЭФЕРАТЫ**

УДК 519.65

Игнатенко М. В., Янович Л. Я. **Обобщенные интерполяционные формулы для операторов, определенных на декартовом произведении функциональных пространств** // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2011. № 1. С. 5–11.

Построены обобщенные интерполяционные формулы типа Эрмита–Биркгофа для операторов, определенных на декартовом произведении функциональных пространств. Полученные формулы точны для специального класса операторных многочленов. Построение операторных интерполяционных формул основано на интерполяционных полиномах для скалярных функций относительно произвольных чебышевских систем функций.

Библиогр. – 6 назв.

УДК 517.9

Жук А. И., Яблонский О. Л. **Системы дифференциальных уравнений в алгебре обобщенных функций** // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2011. № 1. С. 12–16.

Работа посвящена исследованию систем дифференциальных уравнений с обобщенными коэффициентами в алгебре обобщенных функций. Описываются их ассоциированные решения.

Библиогр. – 9 назв.

УДК 517.53

Гриб Н. В. **Аппроксимация сумматорными рациональными операторами типа Джексона в пространстве непрерывных  $2\pi$ -периодических функций** // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2011. № 1. С. 17–24.

В статье построены сумматорные рациональные операторы типа Джексона на окружности. Доказано, что если  $2\pi$ -периодическая функция имеет ограниченную вариацию и удовлетворяет условию Липшица порядка  $\alpha$ ,  $0 < \alpha < 1$ , то существует набор параметров  $\{\alpha_k\}_1^n$ , зависящий от  $\varphi$ , такой, что уклонение оператора  $D_{4n-2}$

удовлетворяет соотношению  $|D_{4n-2}(u, \varphi) - \varphi(u)| = O\left(\frac{\ln n}{n}\right)$ .

Библиогр. – 9 назв.

УДК 517.968

Расолько Г. А. **Решение сингулярного интегрального уравнения первого рода с ядром Коши и специальной правой частью методом ортогональных многочленов** // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2011. № 1. С. 25–31.

Предлагается алгоритм численного решения сингулярного интегрального уравнения первого рода с ядром Коши и специальной правой частью вида

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\varphi(t)}{t-x} dt = \ln \frac{1-x}{1+x} f(x), \quad -1 < x < 1,$$

в классах  $h(-1)$  и  $h(1)$ , основанный на разложении сингулярного интеграла по многочленам Чебышева. Здесь  $f(x)$  – заданная на  $[-1, 1]$  функция, непрерывная по Гельдеру,  $\varphi(x)$  – искомая функция.

Библиогр. – 10 назв.

УДК 511.36

Бабуль О. В., Васильев Д. В. **О факторизации идеалов в кольцах целых алгебраических чисел** // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2011. № 1. С. 32–36.

Приведены методы получения факторизации идеалов в алгоритмах решета числового поля.

Библиогр. – 3 назв.

УДК 512.542

В и т ь к о Е. А., В о р о б ь е в Н. Т. **О классах Фиттинга и холловых подгруппах конечных  $\pi$ -разрешимых групп** // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2011. № 1. С. 37–42.

Пусть  $\mathcal{F}$  – класс Фиттинга,  $\pi$  – некоторое множество простых чисел и  $\omega$  – непустое множество простых чисел. Обозначим через  $\mathcal{B}_{\pi \cap \omega}(\mathcal{F})$  класс всех тех  $\pi$ -разрешимых групп  $G$ , в которых холлова ( $\pi \cap \omega$ )-подгруппа является  $\mathcal{F}$ -группой. Доказано, если  $\mathcal{F}$  –  $\omega$ -локальный класс Фиттинга, то класс групп  $\mathcal{B}_{\pi \cap \omega}(\mathcal{F})$  –  $\omega$ -локальный класс Фиттинга. В частности, для  $\omega = \mathbb{P}$  – множеству всех простых чисел справедливо, что класс Фиттинга  $\mathcal{B}_{\pi}(\mathcal{F})$  локален для любого локального класса Фиттинга  $\mathcal{F}$ .

Библиогр. – 14 назв.

УДК 512.542

К а м о р н и к о в С. Ф., Ш е м е т к о в а О. Л. **Новые свойства префраттиниевых подгрупп конечных разрешимых групп** // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2011. № 1. С. 43–47.

Пусть  $G$  – конечная разрешимая группа,  $H$  – ее префраттиниева подгруппа. Доказано, что для любой нормальной подгруппы  $N$  из  $G$  справедливы следующие утверждения: 1)  $H \cap N$  содержит некоторую префраттиниеву подгруппу группы  $N$ ; 2) если  $H$  – холлова подгруппа в  $G$ , то  $H \cap N$  есть префраттиниева подгруппа группы  $N$ .

Библиогр. – 5 назв.

УДК 517.987.4 + 519.6

М а л о т и н В. Б. **Решение некоторых стохастических дифференциальных уравнений с некоммутирующими коэффициентами** // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2011. № 1. С. 48–54.

Рассмотрены линейные стохастические дифференциальные уравнения, которые содержат антикоммутирующие коэффициенты и разрывную компоненту, представляемую интегралом по пуассоновской мере. Получено решение этих уравнений в виде хронологически упорядоченной экспоненты.

Библиогр. – 4 назв.

УДК 517.986

Щ у к и н М. В.  **$n$ -однородные  $C^*$ -алгебры с пространством примитивных идеалов, гомеоморфным неориентируемому компактному двумерному многообразию** // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2011. № 1. С. 55–59.

Рассматриваются алгебраические расслоения над двумерными компактными неориентируемыми многообразиями. Изучена структура таких расслоений и описаны  $n$ -однородные  $C^*$ -алгебры с пространством примитивных идеалов, гомеоморфным компактному двумерному многообразию.

Библиогр. – 3 назв.

УДК 519.2

Х а р и н Ю. С., Б о д ь г и н И. А. **Об оптимальном прогнозировании авторегрессионных временных рядов при наличии интервального цензурирования** // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2011. № 1. С. 60–69.

Рассматривается задача статистического прогнозирования авторегрессионных временных рядов при наличии интервального цензурирования. Построена оптимальная прогнозирующая статистика, для нее вычислен условный среднеквадратический риск. Для авторегрессии первого порядка проведено сравнение оптимальной прогнозирующей статистики с прогнозирующими статистиками, часто используемыми на практике. Представлены численные результаты.

Ил. 1. Библиогр. – 10 назв.

УДК 519.213.2+519.216

К у з ь м и н а А. В. **Моделирование дисперсионного гамма-процесса** // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2011. № 1. С. 70–74.

В статье рассматриваются применяемый в финансовой математике дисперсионный гамма-процесс. В работе дается определение дисперсионного гамма-процесса, два способа его представления, исследуются некоторые свойства этого процесса. В статье также приводятся алгоритмы моделирования дисперсионного гамма-процесса, реализация которых осуществляется в системе MATLAB® 7.6.0 (R2008a).

Ил. 2. Табл. 2. Библиогр. – 6 назв.

УДК 519.24

Чэнь Хайлун. **Об оценке параметров  $\alpha$ -устойчивых распределений** // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2011. № 1. С. 75–81.

В данной работе предлагается комбинированный метод оценки параметров  $\alpha$ -устойчивого распределения с параметрами  $\alpha$ ,  $\sigma$ ,  $\beta$ ,  $\mu$  при  $\alpha \in (0, 2]$ . Строятся оценки параметров  $\alpha$  и  $\sigma$  методом характеристических функций (CF), и с помощью выравнивающего преобразования оценивается параметр  $\mu$ . Используя оценочное значение  $\mu$ , с помощью центрирующего преобразования методом дробных моментов низкого порядка (FLOM) оценивается параметр  $\beta$ .

Ил. 3. Табл. 2. Библиогр. – 14 назв.

УДК 530.145

Кудряшов В. В., Баран А. В. **Объединение модифицированного квазиклассического метода и вариационного подхода для решения радиального уравнения Шрёдингера** // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2011. № 1. С. 82–87.

Пробные радиальные волновые функции построены с помощью явного суммирования лидирующих парциальных ВКБ-рядов и варьируемой степенной подстановки. Оптимальное значение вариационного параметра найдено посредством минимизации интегральной невязки. Предложенный подход применен к степенным сферически-симметричным потенциалам.

Табл. 4. Библиогр. – 14 назв.

УДК 534.8:535.5

Гуделев В. Г., Кулак Г. В., Матвеева А. Г. **Угловое распределение гиперзвука, возбуждаемого лазерными импульсами в твердых телах** // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2011. № 1. С. 88–91.

Исследованы особенности лазерного возбуждения объемных ультразвуковых волн через призму источником излучения прямоугольной формы. Показано, что при увеличении полярного угла (для малых углов  $\sim 10$ – $30^\circ$ ) происходит увеличение амплитуды и уменьшение длительности ультразвукового импульса; для больших полярных углов  $\sim 60$ – $80^\circ$  с их увеличением амплитуда импульса уменьшается, а в центре импульса появляется провал. Установлено, что при увеличении размера области возбуждения прямоугольной формы амплитуда импульса может уменьшаться; с увеличением коэффициента поглощения ультразвука его амплитуда уменьшается, а длительность увеличивается.

Ил. 2. Библиогр. – 11 назв.

УДК 548.0

Довыденко С. Н. **Особенности преобразования света плоскопараллельным биизотропным слоем** // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2011. № 1. С. 92–97.

В настоящей статье рассмотрены особенности преобразования световой волны с произвольным вектором поляризации плоскопараллельным биизотропным слоем, окруженным различными средами. Получены аналитические выражения для коэффициентов отражения и преломления преобразованных волн. Исследовано влияние параметров слоя на характер отражения и пропускания.

Показано, что при произвольной поляризации падающей волны отраженная волна оказывается эллиптически поляризованной. Установлена возможность и определены условия поворота плоскости поляризации волны при отражении от биизотропной среды (слоя) на угол  $\pi/2$ . Проанализировано преломление световой волны биизотропным плоскопараллельным слоем. Обосновано, что прошедшая слой волна оказывается эллиптически поляризованной, причем ее эллиптичность зависит от параметров киральности и невзаимности, однако влияние последнего проявляется слабее.

Ил. 3. Библиогр. – 15 назв.

УДК 621.373.826

Колос В. В., Маркевич М. И., Стельмах В. Ф., Чапланов А. М., Емельяненко Ю. С. **Формирование дисилицида титана в системе TiN/Ti/Si при быстрой термической обработке** // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2011. № 1. С. 98–101.

Настоящая работа посвящена исследованию структурно-фазовых превращений в системе TiN/Ti/Si при быстрой термической обработке (БТО) в две стадии. Результаты исследования показывают, что такая обработка (первая стадия при температуре  $650^\circ\text{C}$ , вторая – при  $850^\circ\text{C}$ ) позволяет сформировать слой низкоомного дисилицида титана в модификации C54. Защитный слой нитрида титана при БТО приводит к более однородному формированию зерен по толщине в системе TiN/Ti/Si.

Ил. 2. Табл. 2. Библиогр. – 10 назв.

УДК 534.8

Гуртовой В. Г., Шелег А. У., Лиопо В. А. **Влияние электронного и гамма-излучения на диэлектрические свойства монокристаллов  $\text{KTiOPO}_4$**  // Весті НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2011. № 1. С. 102–105.

Проведены измерения диэлектрической проницаемости и электропроводности в области температур 120–340 К необлученных кристаллов  $\text{KTiOPO}_4$  и облученных  $\gamma$ -квантами и электронами. Установлено, что при облучении электронами диэлектрическая проницаемость уменьшается, а электропроводность – увеличивается. Показано, что  $\gamma$ -облучение дозой  $10^7$  Р не оказывает существенного влияния на диэлектрические свойства этих кристаллов.

Ил. 3. Библиогр. – 5 назв.

УДК 538.54.16

Акимов А. И., Савчук Г. К. **Связь температуры сверхпроводящего перехода с параметрами кристаллической структуры таллийсодержащих сверхпроводников** // Весті НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2011. № 1. С. 106–111.

Установлена взаимосвязь  $T_c$  и параметров кристаллической структуры сверхпроводящих керамических образцов фазы  $\text{Tl}_2\text{201}$ . Представлены результаты исследований влияния высокого давления холодного прессования на длины основных межатомных расстояний фазы  $\text{Tl}_2\text{201}$ . Показано, что воздействие высокого давления холодного прессования приводит к снижению концентрации дырок в таллийсодержащих высокотемпературных образцах. Получено, что наибольшее влияние на значения  $T_c$  оказывают значения планарных расстояний  $\text{Cu}-\text{O}_{\text{план}}$  и структурное искажение слоев  $\text{CuO}_2$ .

Табл. 5. Ил. 2. Библиогр. – 9 назв.

УДК 511.344:519.852.2

Шлык В. А. **О смежности вершин политопа разбиений чисел (часть I)** // Весті НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2011. № 1. С. 112–117.

Доказано, что вершины политопа разбиений чисел, полученные с помощью введенных ранее операций слияния частей из других вершин, смежны исходным вершинам.

Библиогр. – 9 назв.

УДК 511.36

Бударина Н. В., Берник В. И., О'Доннел Х., **Об условиях, когда ближайший корень целочисленного многочлена оказывается действительным числом** // Весті НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2011. № 1. С. 118–119.

В работе решена задача Ю. В. Нестеренко о величине правой части в неравенстве  $|P(x)| < \varepsilon(n, H)$ , при которой ближайший к  $x$  корень  $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$ ,  $\deg P = n$ ,  $H = H(P)$  – высота  $P(x)$  является действительным числом.

Библиогр. – 1 назв.