

# A física do violino

(The physics of the violin)

José Pedro Donoso<sup>1\*</sup>, Alberto Tannús<sup>1</sup>, Francisco Guimarães<sup>1</sup> e Thiago Corrêa de Freitas<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Instituto de Física de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, SP, Brasil

<sup>2</sup>Departamento de Física, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, PR, Brasil

Recebido em 28/9/2007; Revisado em 15/2/2008; Aceito em 14/4/2008; Publicado em 21/7/2008

Neste artigo apresentamos uma descrição geral da física do violino, analisando os conceitos que lhes dão sustentação física e que revelam toda a riqueza e o potencial pedagógico do assunto. Destacamos as contribuições de físicos como Helmholtz, Savart, Raman e Saunders no esforço para descrever a vibração produzida pelo arco nas cordas, e por compreender as propriedades acústicas do instrumento. Descrevemos a função de cada uma das componentes do instrumento e discutimos a importância dos modos normais de vibração dos tampos e do cavalete na resposta acústica do violino. A ressonância acústica da caixa do violino (ressonância de Helmholtz) será discutida fazendo-se um paralelo entre osciladores mecânico, elétrico e acústico. Discutiremos a resposta acústica do violino e descreveremos a produção de seu som característico, que resulta da forma de onda originada pela excitação das cordas pelo arco, influenciada pelas vibrações e ressonâncias do corpo do violino, seus tampos e o cavalete.

**Palavras-chave:** violino, acústica, ressonância, instrumentos musicais, Helmholtz.

In this work we present a general description of the physics of the violin. We examine the concepts which provide the physical support and reveal the richness and the pedagogical potential of the subject. We remark the contributions of physicists such as Helmholtz, Savart, Raman and Saunders to the understanding of the way in which a bowed string vibrates, and the comprehension of the acoustical properties of the instrument. The role of each component of the violin is described in details. We also discuss the importance of the bridge, the plates and the body normal modes of vibration for the acoustical response of the instrument. The air-resonance of the enclosed air in the violin body (Helmholtz resonance) is discussed using the equivalent formalism between mechanical, electrical and acoustic oscillating systems. The production of the characteristic sound of the violin, which results from the vibrational waveform of a bowed string, is also described.

**Keywords:** violin, acoustics, resonance, musical instruments, Helmholtz.

## 1. Introdução

A Física dos instrumentos musicais é uma área de estudos fascinante e de grande potencial pedagógico pelas aplicações práticas das oscilações & ondas, e do fenômeno de ressonância. Embora a maioria dos textos de física básica discuta as propriedades e a propagação das ondas sonoras, a produção dos sons nos instrumentos musicais não é abordada em profundidade. Um instrumento que ilustra bem a riqueza da física que se encontra na acústica musical é o violino. Seu estudo envolve um considerável conhecimento de física básica, tais como o entendimento do fenômeno de ressonância na caixa acústica do violino, a função dos orifícios em forma de “*f*” que permitem considerar o violino como um ressoador de Helmholtz, o estudo dos modos normais de vibração dos tampos de ma-

deira e do cavalete, e o problema das vibrações produzidas numa corda friccionada por um arco. Este último tópico resulta também numa interessante análise da transferência de energia entre os modos de vibração naturalmente estimulados pelo arco (torsionais) e aqueles que efetivamente acoplam com o meio em que a perturbação acústica se propaga.

Os físicos sempre se sentiram cativados por este instrumento tão delicado e sofisticado, seja para estudar suas propriedades ou apenas como instrumento para executar música. O próprio Albert Einstein era violinista. Em Berlin, Einstein tocava sonatas com Max Planck e em Princeton costumava reunir-se semanalmente com colegas e amigos para tocar música de câmara [1]. Muitos físicos contribuíram com suas pesquisas para a compreensão das propriedades físicas e acústicas do instrumento. A história destas pesqui-

<sup>1</sup>E-mail: donoso@if.sc.usp.br.

\*Membro da Orquestra Experimental da Universidade Federal de São Carlos, S. Carlos, SP, Brasil.

sas foi documentada por C.M. Hutchins [2-4]. A física do violino tem sido objeto também de artigos de divulgação na revista *Scientific American* [5-7] e na *Physics World* [8]. Na internet, destacam-se as páginas da University of New South of Wales, Australia [9] e a do Prof. E. Jansson de Estocolmo [10].

Em relação às pesquisas sobre a física do violino, o físico francês Félix Savart (1791-1841) é considerado um dos pioneiros. Conhecido pela proposição, juntamente com Jean-Baptiste Biot (1774-1862), sobre o campo magnético produzido por elementos de corrente (Lei de Biot-Savart), destacou-se também pelas suas contribuições na área de acústica. Entre outras coisas, estudou o limiar de audição em altas frequências, utilizou o método de Ernst F. Chladni (1756-1827) para visualizar os modos de vibração de tampos de violinos, estudou a função do cavalete e da alma e observou que as vibrações que o arco produz na corda são ricas em harmônicos. Savart colaborou também com o famoso *luthier* Jean Baptiste Vuillaume (1798-1895) no desenvolvimento de novos instrumentos da família dos violinos, como o *octobasse* de 3.5 metros de altura e, também na construção de instrumentos experimentais, com corpos de formato diferenciado, dos quais chegou até nós um violino de formato trapezoidal [2,5,7,11-14].

Mais foi o fisiologista e físico alemão Hermann von Helmholtz (1821-1894) que elucidou o tipo de vibração que distingue a corda excitada por um arco ( *bowed string*) da corda tangida ( *plucked string*). Helmholtz foi um cientista particularmente versátil que fez importantes contribuições no campos da medicina (como a transmissão de impulsos nervosos, a fisiologia da visão, o mecanismo de audição, a invenção do oftalmoscópio), da física (formalizou o princípio de conservação da energia, contribuições na mecânica dos fluidos e na teoria eletrodinâmica) e da acústica (vibração de colunas de ar, frequências de ressonância de cavidades, temperamento das escalas musicais) [15-19]. Utilizando um engenhoso instrumento que permitia observar vibrações acústicas a nível microscópico (que originou posteriormente o harmonógrafo) idealizado pelo físico francês Jules A. Lissajous (1822-1880), Helmholtz observou a forma de onda particular que resulta da vibração de uma corda friccionada pelas crinas de um arco [2,13,20-23].

Lord Rayleigh (John William Strutt, 1842-1919) explorou as características vibracionais de membranas, placas e sinos, estudou a propagação das ondas de som e estabeleceu as bases da pesquisa moderna da acústica de instrumentos musicais [2,11]. As vibrações resultantes da corda excitada por um arco foram estudadas em detalhe pelo físico indiano Chandrasekhara V. Raman (1888-1970), Prêmio Nobel por seu trabalho sobre espalhamento da luz (o efeito Raman). Utilizando um mecanismo para controlar a arcada (ato de excitar a corda por meio de um arco), Raman mediu os efeitos da velocidade e da posição da arcada e verificou que

a força mínima necessária para manter um movimento estável nas cordas depende da velocidade da arcada e do inverso do quadrado da distância do ponto de contato na corda até o cavalete [2,6,13,23].

O físico Frederick Saunders (1875-1963), conhecido pelo acoplamento Russell & Saunders da física atômica, estudou também as propriedades acústicas de instrumentos de corda. Saunders, que tocava violino e viola, desenvolveu um método para analisar a resposta acústica dos instrumentos utilizando um analisador heteródino para registrar a amplitude e as frequências dos tons parciais (harmônicos). Trabalhando em colaboração com a fabricante de violinos e pesquisadora Carleen M. Hutchins, ele estudou os efeitos acústicos no instrumento quando se mudam, por exemplo, a forma, o tamanho e a localização dos “efes”, a altura das ilhargas, etc. O objetivo das pesquisas de Saunders e Hutchins era descobrir parâmetros acústicos que caracterizassem os bons instrumentos. Estes dois pesquisadores, conjuntamente com o químico e violoncelista Robert Fryxell (1924-1986) e o engenheiro John Schelleng (1892-1979), fundaram em 1963 a *Catgut Acoustical Society* reunindo profissionais envolvidos na fabricação e pesquisas de instrumentos de cordas [2,12,22-26].

Novas tecnologias e equipamentos eletrônicos surgidos neste século permitiram contribuições significativas no estudo das propriedades acústicas do violino e no desenvolvimento de novas metodologias para avaliar qualidades de instrumentos musicais [2,13,14]. Destaca-se em particular a obra de Lothar Cremer (1905-1990) *The Physics of the Violin* publicada em 1981, que resume o conhecimento sobre a acústica dos instrumentos de corda desde o século XIX, apresentando toda a elaboração matemática da vibração das cordas, dos modos de vibração dos tampos e da ressonância acústica do violino [27]. Na atualidade, numerosos pesquisadores trabalham na caracterização e modelagem das propriedades acústicas do violino, tais como George Bissinger e Robert Schumacher (EUA), Erik Jansson (Suécia), Collin Gough e Jim Woodhouse (Grã Bretanha), Xavier Boutillon (França), John McLennan (Australia) e Akihiro Matsutani (Japão).

O presente artigo está organizado da seguinte maneira: na primeira parte daremos uma descrição geral do instrumento. Em seguida discutiremos a resposta acústica do violino analisando a ressonância do ar na cavidade (ressonância de Helmholtz) e os modos de oscilação dos tampos, do cavalete e do corpo do instrumento. Faremos uma analogia entre osciladores mecânico, elétrico e acústico com o objetivo de parametrizar as frequências de ressonância e as expressões de impedâncias. Na seção 4 apresentaremos o arco e a arcada e descreveremos o movimento ondulatório da corda friccionada pelo arco (oscilação de Helmholtz) e concluiremos discutindo como é produzido o som do violino. Na última seção consideraremos os problemas da afinação, dedilhado e intensidade relativa do instru-

mento.

## 2. O instrumento

### 2.1. Lutheria

O violino surgiu na Itália no começo do século XVI, como uma evolução de instrumentos de corda friccionalada, o *rebec*, a *vielle* e a *lira da braccio*. Gasparo Da Salo (1542-1609), Andréa Amati (1505-1578) e Gaspard Duiffoprugcar (1514-c. 1571) são considerados os nomes essenciais do artesanato (ou *lutheria*) do violino. Com De Salo e Amati surgem as duas célebres escolas de *lutheria*, a de Brescia e a de Cremona. Nesta última, a dinastia dos Amati atinge sua supremacia com Nicola Amati, neto de Andréa e mestre de Antonio Stradivari (1644-1737). Um outro renomado *luthier* foi Guarnerius (1698-1744), chamado “del Gesù”. Na França, a lutheria do violino está associada à cidade de Mirecourt e aos nomes de Nicolas Lupot (1758-1824) e Jean-Baptiste Vuillaume (1798-1875) [28-30].

A forma do instrumento constitui um exemplo de desenho do renascimento italiano, com as considerações de equilíbrio de superfícies e de volumes típicas da época [14,31]. Aparentemente, as dimensões dos violinos e violoncelos seguem a relação de proporções matemáticas conhecidas como “proporção áurea” [22,32]. Tudo indica porém que a evolução do instrumento se deteve depois da morte de Stradivari. Algumas mudanças menores foram feitas no século XIX, como na extensão do braço, no ângulo do espelho e na altura do cavalete, com o objetivo de produzir um som mais intenso e brilhante [2,3,7]. O fato de o instrumento praticamente não ter mudado em mais de 250 anos ilustra bem o extraordinário nível artístico e tecnológico alcançado pelos *luthier* italianos do século XVI [2,33].

O efeito do clima nas madeiras, assim como o tratamento químico utilizado para protegê-las têm sido apontados como fatores responsáveis pelo som inigualável dos instrumentos fabricados por Stradivari e por Guarneri. Os invernos europeus excepcionalmente frios do período de 1645 a 1715 teriam afetado as madeiras utilizadas pelos mestres italianos para a fabricação dos instrumentos, deixando-as mais fortes e densas [34,35]. Os vernizes utilizados para permear a madeira e proteger o instrumento do suor e da umidade, também têm sido objeto de análises e discussões [36,37].

A Fig. 1 mostra as principais partes de um violino. O instrumento está constituído por um conjunto de quatro cordas acopladas a uma caixa acústica. Estas cordas são colocadas em vibração pela força impulsiva produzida pelo atrito entre elas e as cerdas, normalmente feitas de crina ou cauda de cavalo, que constituem o arco. Como uma corda vibrante-considerada como uma fonte dipolar linear-é um péssimo transmissor de energia sonora para o ar devido ao fato dela ser

muito fina (seu diâmetro é muito menor que o comprimento da onda acústica envolvida), é necessário transferir a vibração da mesma para uma superfície grande de forma que esta, ao vibrar, desloque uma maior quantidade de ar, conseguindo-se assim uma boa intensidade de som. Esta é a primeira evidência da necessidade de um bom acoplamento acústico entre as partes vibrantes do instrumento e o meio propagador da perturbação até o ouvido. No violino, a peça que transfere as vibrações das cordas para a caixa acústica (e para o ar encerrado nela) é o cavalete (*bridge*, em inglês). Como os tampos são grandes (aprox. 500 cm<sup>2</sup> cada) eles são bastante eficientes para colocar em movimento o ar das vizinhanças e transmitir o som, garantindo aquele acoplamento. O som emitido pelo instrumento resulta basicamente da vibração dos tampos superior e inferior e, também, da vibração do ar dentro da caixa do violino (ver seção 3).

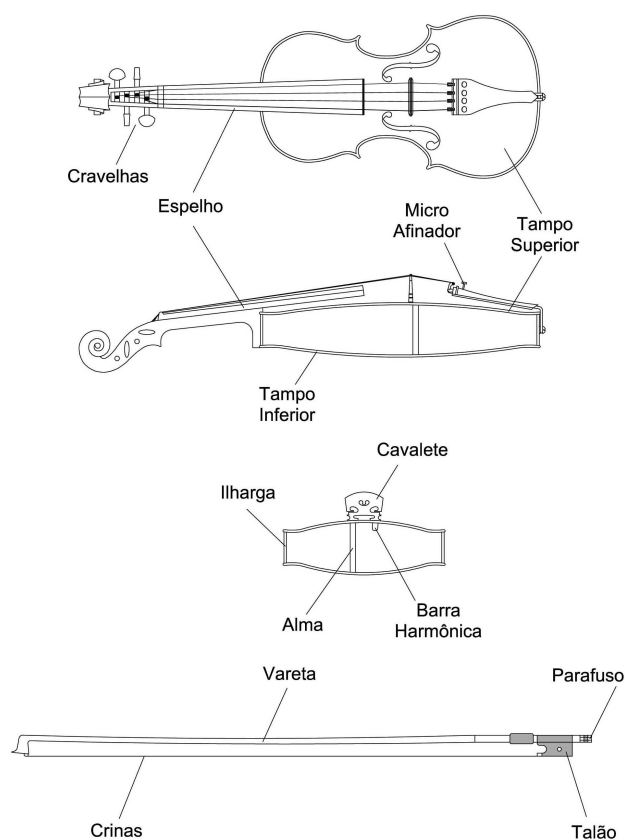


Figura 1 - Vista frontal e lateral de um violino indicando as principais partes. A figura mostra a disposição das cordas e dos orifícios na forma de “f” estilizados no tampo superior. O corte mostra a disposição do cavalete sobre o tampo superior e a posição da alma no interior da caixa acústica do instrumento. O comprimento do violino é de aproximadamente 60 cm. O arco tem 75 cm de comprimento. A caixa acústica tem 36 cm de comprimento e cerca de 4 cm de altura. O volume de ar encerrado na cavidade é de cerca de 2.4 litros.

A caixa acústica esta formada por um tampo superior e um tampo inferior separados por ilhargas. A qualidade de um violino depende das propriedades físicas

das madeiras utilizadas na sua construção, como a densidade, a elasticidade, a dureza e a velocidade de propagação do som na madeira [22]. A madeira tradicionalmente utilizada para a construção do tampo superior é o abeto (*Picea abies*. Spruce, em inglês). Esta madeira se caracteriza por ser muito elástica (módulo de Young  $Y \sim 9$  GPa), de densidade e dureza relativamente baixa ( $\rho \sim 0.45$  g/cm<sup>3</sup>, *hardness*: 2200 N). A estrutura em espiral das moléculas de celulose, por outra parte, conferem ao abeto uma considerável firmeza e resistência [36]. A elevada velocidade do som ao longo das fibras ( $c = (Y/\rho)^{1/2} \approx 4500$  m/s) favorece a rápida propagação das vibrações por todo o violino. Para o tampo inferior se emprega o bordo, árvore da família das aceráceas, de boa elasticidade (módulo de Young  $Y \sim 11$  GPa) e maior densidade e dureza ( $\rho \sim 0.6$ - $0.7$  g/cm<sup>3</sup>, *hardness*: 4226 N). O corte das madeiras e o controle da espessura dos tampos seguem procedimentos específicos [22,28,38,39]. Na montagem da caixa acústica, as madeiras dos tampos são arqueadas para o exterior dando essa típica forma arredondada. Esta forma resulta num aumento significativo nas frequências dos modos normais de vibração dos tampos (seção 3.1 e 3.3) [14].

No tampo superior da caixa acústica há dois orifícios na forma de “f” estilizados, localizados simetricamente em ambos os lados do cavalete. A forma destes “f” pode ter sido influenciada pela tipologia cursiva (ou itálico, como é mais conhecida hoje) inventada pelo tipógrafo italiano Aldo Manuzio (1450-1515) [40]. Estes orifícios comunicam para o exterior as vibrações do ar dentro do violino e têm uma grande influência no timbre do violino. É importante salientar que a área destes orifícios é bastante significativa, 13 cm<sup>2</sup>, ou seja 2.5% da área do tampo superior. As cordas assentam no cavalete sobre o qual exercem uma força considerável (seção 2.3). O cavalete, fabricado de bordo, é uma peça de importância crucial para o violino pois é através dele que se faz o acoplamento entre a corda e o corpo do instrumento. Gerações de *luthiers* descobriram que a forma e a geometria do cavalete influencia a resposta acústica do violino [13,22]. Ele atua como um transdutor mecânico, acoplando os modos de vibração transversais das cordas em modos vibracionais da caixa de ressonância. Ele atua também como filtro acústico, suprimindo certas frequências indesejáveis (seção 3.4).

O violino tem quatro cordas, confeccionadas em aço e recobertas de prata ou alumínio. A tensão das cordas pode ser ajustada por meio das cravelhas e dos microafinadores (Fig. 1) até que a frequência de vibração atinja o valor desejado. As cordas do violino estão afinadas em quintas (uma quinta é o intervalo entre duas notas cujas frequências estão numa razão 3:2). As notas e as frequências correspondentes às quatro cordas do violino são: Sol<sub>3</sub> (196 Hz), Re<sub>4</sub> (293.66 Hz), Lá<sub>4</sub> (440 Hz) e Mi<sub>5</sub> (659.26 Hz). O sub-índice da nota indica a oitava correspondente na escala temperada (Fig. 2).

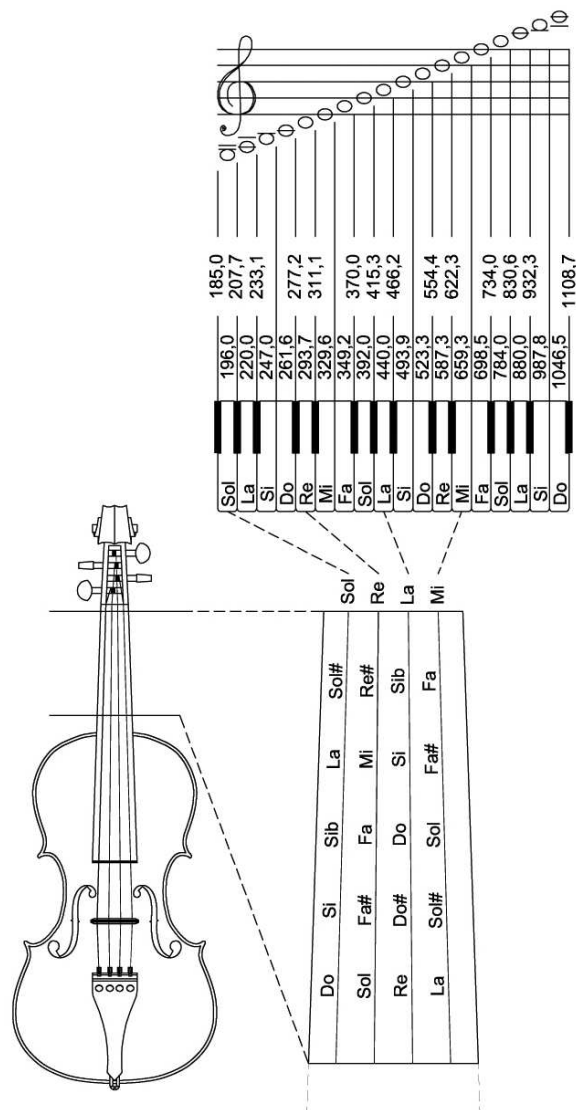


Figura 2 - Notas e frequências das quatro cordas do violino: Sol<sub>3</sub> (196 Hz), Re<sub>4</sub> (293.66 Hz), Lá<sub>4</sub> (440 Hz) e Mi<sub>5</sub> (659.26 Hz). A figura indica também as notas das oitavas centrais do teclado de um piano assim como a correspondente notação musical no pentagrama (desde a nota Sol<sub>3</sub> até a Do<sub>5</sub><sup>#</sup>). A figura mostra também a posição do dedilhado das notas-na chamada “primeira posição”- no espelho do instrumento. A região do espelho destacada na figura tem aproximadamente 10 cm de comprimento. A separação entre duas notas-nesta primeira posição-é de aproximadamente 1.4 cm (a separação entre dois dedos da mão esquerda).

Assim, o Lá<sub>4</sub> indica a nota Lá da quarta oitava, com frequência de 440 Hz, chamada de Lá -concertino, pois é a nota utilizada para a afinação dos instrumentos de uma orquestra. A corda Mi - que é a mais fina de todas - é uma corda simples enquanto que as cordas Lá, Ré e Sol são compostas, com uma corda central e um bordão em forma de fita enrolado por cima. A natureza composta das cordas Re e Lá aparecem claramente nas imagens mostradas nas Figs. 3(a) e 3(b), obtidas com um microscópio eletrônico.



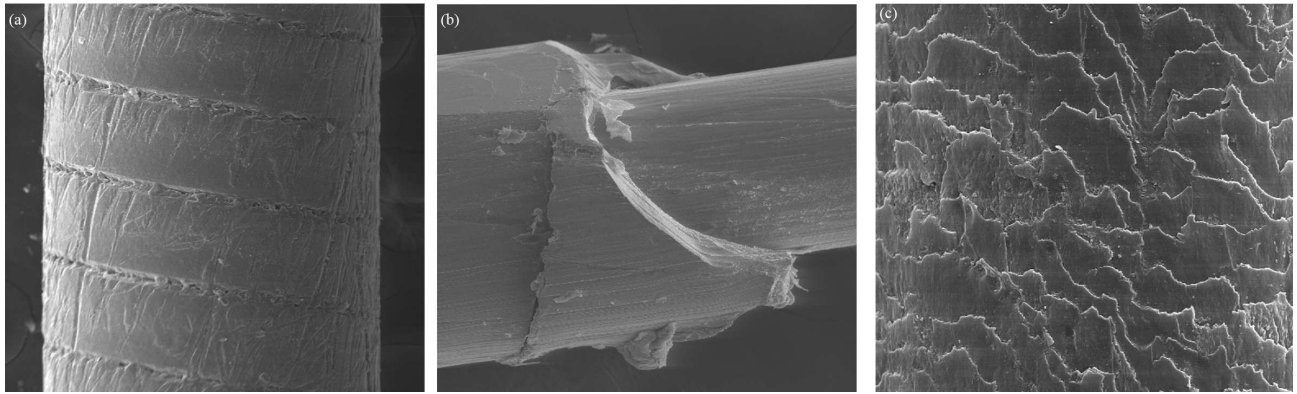


Figura 3 - Imagem de microscopia eletrônica de (a) uma corda Ré de  $780 \pm 10 \mu\text{m}$  de diâmetro (ampliação  $90\times$ ); (b) uma corda Lá-quebrada-de  $645 \pm 10 \mu\text{m}$  de diâmetro (ampliação  $200\times$ ) e (c) de um fio da crina de um arco, de  $160 \pm 10 \mu\text{m}$  de diâmetro (ampliação  $1000\times$ ). Podemos observar a natureza composta das cordas Lá e Ré do violino, com uma corda central e um bordão em forma de fita enrolado por cima. Este artifício é utilizado para aumentar a densidade linear de massa, sem no entanto perder flexibilidade, nas cordas destinadas a produzir sons graves. As imagens foram obtidas num equipamento Zeiss do Laboratório de Microscopia Eletrônica, IFSC, USP.

## 2.2. Outros instrumentos de cordas

A família dos instrumentos de cordas (friccionadas por um arco) é formada por quatro instrumentos, o violino, a viola, o violoncelo e o contrabaixo. A viola é um instrumento em que cada uma das cordas está afinada uma quinta abaixo das respectivas cordas do violino, ou seja:  $\text{Do}_3$ : 130.8 Hz;  $\text{Sol}_3$ : 196 Hz;  $\text{Re}_4$ : 293.7 Hz e  $\text{Lá}_4$ : 440 Hz. Como num intervalo de quinta as frequências das notas estão numa razão 3:2, poderíamos pensar que, para fabricar uma viola bastaria então aumentar as dimensões de um violino num fator 1.5. Como o violino tem 60 cm de comprimento, a viola “ideal” teria então cerca de 90 cm. Porém esta viola seria um instrumento demasiado grande para ser apoiado sobre o ombro. O tamanho de uma viola moderna é de 71 cm, ou seja cerca de 17% maior que um violino, mas suas ressonâncias principais são de 20% a 40% mais baixas que as do violino (Tabela 1). É importante salientar que este aumento na dimensão da viola cobre apenas uma parte da diminuição da frequência da cavidade, sendo o restante conseguida utilizando-se cordas mais grossas.

Com o violoncelo ocorre a mesma coisa. A afinação de suas cordas ( $\text{Do}_2$ : 65.4 Hz;  $\text{Sol}_2$ : 97.99 Hz;  $\text{Re}_3$ : 148.8 Hz e  $\text{Lá}_3$ : 220 Hz) é exatamente uma oitava mais grave que as da viola. Um violoncelo “ideal”, ou seja um instrumento com o mesmo timbre do violino, deveria ter o dobro do tamanho da viola “ideal”, ou seja 180 cm. Na prática o tamanho do violoncelo é de cerca de 124 cm. Assim, apesar de pertencer a mesma família de instrumentos, a viola e o violoncelo não podem ser considerados apenas “violinos grandes”, senão que eles

são realmente instrumentos com características sonoras próprias [13,38]. O contrabaixo (*double bass*), embora possua forma semelhante a do violino, não pertence a esta família, pois é originário da família das violas da gamba. As cordas deste instrumento são afinadas em intervalos de quartas, ou seja as frequências das notas ( $\text{Mi}_1$ : 41.2 Hz;  $\text{La}_1$ : 55 Hz;  $\text{Re}_2$ : 73.4 Hz e  $\text{Sol}_2$ : 97.99 Hz) estão em uma razão de 4:3.

Em 1957, o compositor Henry Brant sugeriu à fabricante e pesquisadora de violinos Carleen Hutchins construir uma família de oito instrumentos de corda com tamanhos em escala, de forma que a afinação entre um instrumento e o seguinte fosse exatamente meia oitava. Hutchins aceitou o desafio e, com ajuda de J. Schelleng e do físico F. Saunders, construíram uma família de oito novos instrumentos, desde um contrabaixo de quase dois metros de altura até um pequeno violino de 48 cm de comprimento afinado uma oitava acima do violino normal. A empreitada demorou cerca de 10 anos em ser completada. A idéia da família de instrumentos não era nova. Michael Praetorius descreve em sua obra de 1619 *Syntagma Musicum*, uma família de sete violinos com aproximadamente as mesmas afinações que Hutchins e seus colegas estavam construindo. O primeiro concerto público do octeto de cordas foi realizado em 1962 na cidade de New York. Por este trabalho Carleen Hutchins recebeu um doutorado honorário e um prêmio da Acoustical Society of America. O trabalho descrevendo a construção do octeto foi publicado na revista *Journal of Acoustical Society of America* [2,3] e na revista *Physics Today* [41]. Uma amostra do som deste curioso conjunto de cordas pode ser encontrada na página web do Hutchins Consort [42].

Tabela 1 - Afinação das quatro cordas dos instrumentos da família do violino e do contrabaixo; comprimento típico dos instrumentos e o fator de escala entre eles considerando o violino como dimensão unitária; e frequência de ressonância da cavidade do instrumento (modo  $A_0$ ).

	Afinação	Comprimento (cm)	Fator de escala	Frequência de ressonância
Violino	Sol <sub>3</sub> , Re <sub>4</sub> , Lá <sub>4</sub> , Mi <sub>5</sub>	59-60	1.00	270-280 Hz
Viola	Do <sub>3</sub> , Sol <sub>3</sub> , Re <sub>4</sub> , Lá <sub>4</sub>	70-71	1.17	~ 220 Hz
Violoncelo	Do <sub>2</sub> , Sol <sub>2</sub> , Re <sub>3</sub> , Lá <sub>3</sub>	124	2.13	~ 100 Hz
Contrabaixo	Mi <sub>1</sub> , Lá <sub>1</sub> , Re <sub>2</sub> , Sol <sub>2</sub>	178-198	3.1-3.4	~ 60 Hz

### 2.3. Forças estáticas e tensão das cordas

As cordas se estendem desde as cravelhas até a extremidade do violino (Fig. 1). É importante salientar que o único ponto de contato entre as cordas e o tampo superior do instrumento é o cavalete. Esta disposição das cordas no violino resulta numa força considerável sobre a superfície do tampo superior (Fig. 4). Podemos estimar o valor desta componente vertical utilizando a expressão da frequência de vibração de uma corda tensionada descoberta por Mersenne em 1636 [43-45]

$$f = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{T}{\mu}}, \quad (1)$$

onde  $f$  é a frequência,  $T$  é a tensão,  $L$  é o comprimento e  $\mu$  é a densidade linear da corda.

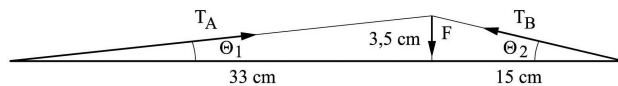


Figura 4 - Diagrama de forças utilizado para calcular a resultante vertical sobre o tampo superior do violino. A figura indica as distâncias desde o cavalete até as extremidades do instrumento (seguindo o comprimento das cordas) e a altura do cavalete.

Como a frequência da nota Lá é 440 Hz, o comprimento da corda do violino é 32.5 cm e sua massa por unidade de comprimento é  $\sim 10^{-2}$  g/m, a tensão dessa corda é  $T \approx 80$  N. Supondo que a tensão das outras cordas é da mesma ordem de grandeza - o qual é verdade apenas para as duas cordas centrais [10] - a tensão total resultante das quatro cordas no instrumento será cerca de 250-300 N. Para calcular a força vertical sobre o tampo superior do violino devido a tensão das cordas resolvemos o diagrama de forças mostrado na Fig. 4

$$\begin{aligned} T_A \cos \theta_1 - T_B \cos \theta_2 &= 0, \\ T_A \sin \theta_1 - T_B \sin \theta_2 + F &= 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Os valores dos ângulos  $\theta_1$  e  $\theta_2$  dependem da altura do cavalete. No violino do autor (JPD), por exemplo,  $\theta_1 \sim 6^\circ$  e  $\theta_2 \sim 13^\circ$  [46]. Supondo  $T_A = T_B \approx 260$  N, obtemos a força vertical,  $F \approx 90$  N. Este valor equivale a uma carga de 9 kg sobre o delicado tampo superior [5,22,36]. Para distribuir esta carga, de forma que o tampo não ceda com o passar do tempo, ele recebe uma

forma arqueada. O instrumento possui também uma ripa de madeira, a *barra harmônica* (*bass bar*) colada por baixo do tampo superior logo abaixo da perna direita do cavalete (no lado correspondente as cordas mais graves) e orientada no sentido das cordas (Fig. 1). Esta barra harmônica tem uma função acústica, transmitir as vibrações a todo o corpo do violino, fazendo com que uma grande área do tampo oscile em fase, o que é especialmente importante para os sons graves que possuem comprimentos de onda grandes. A barra harmônica tem também uma função estrutural fornecendo suporte mecânico à estrutura do instrumento.

A alma do violino (*sound post*), um palito cilíndrico como um lápis é colocado entre os dois tampos logo abaixo da perna esquerda do cavalete (Fig. 1). As pesquisas desenvolvidas por Savart no séc. XIX mostraram que a função da alma não se limita a transmitir as vibrações do tampo superior para o inferior. Ela também altera os modos vibracionais de ambos os tampos ao impor um ponto nodal praticamente estacionário nos pontos de contato entre eles [2]. A alma também ajuda a suportar a força exercida pelas cordas sobre o tampo superior, distribuindo parte do esforço ao tampo inferior. É importante salientar que a alma não está colada nos tampos, ela apenas se mantém em sua posição devido à força exercida pelas cordas sobre o cavalete e o tampo superior.

Simétrico em aparência externa, o violino tem suas propriedades acústicas fortemente influenciadas por estes dois elementos ocultos no seu interior, a alma e a barra acústica. De fato, a alma tem uma importância primordial no instrumento sendo que pequenas mudanças em sua posição, na sua forma ou na qualidade da madeira podem alterar significativamente o timbre e a sonoridade do instrumento [Fig. 7.10 na Ref. 22]. O seu posicionamento é uma das tarefas mais delicadas do trabalho de um *luthier*. É importante salientar que se a alma for removida da caixa acústica, o timbre do violino fica semelhante ao de um violão.

### 2.4. Elasticidade das cordas

Finalizamos esta seção fazendo algumas considerações sobre a elasticidade, ou melhor, a pouca elasticidade das cordas de violino, já que estas são confeccionadas de aço. É surpreendente para nós, violinistas, a facilidade com que se rompem as cordas quando afinamos o instru-

mento apertando as cravelhas. Como mencionado anteriormente, as cordas são afinadas ajustando-se a tensão delas com as cravelhas até o valor da frequência desejada (Eq. (1)). As cordas do violino são confeccionadas em aço. O coeficiente de elasticidade do aço (módulo de Young) vale  $Y = 200$  GPa (contra  $Y \approx 3$  GPa do *nylon*!). A tensão de ruptura ou resistência de tração do aço é  $(F/A) = 520$  MPa. Considerando-se, por exemplo, a corda *Mí* do violino, cujo diâmetro é aproximadamente 0.2 mm (área da seção transversal:  $\pi r^2 \sim 3 \times 10^{-8}$  m<sup>2</sup>), e supondo-se uma tração aplicada de  $F \approx 63$  N, à deformação tolerada pela corda pode ser estimada através da expressão [44,45]

$$\frac{\Delta L}{L} = \frac{F/A}{Y}. \quad (3)$$

Substituindo estes parâmetros na Eq. 3, obtemos  $(\Delta L/L) \sim 1\%$ . Isto significa que a corda *Mí* vai estourar se a deformação relativa for maior que 1%. Como o comprimento da corda do violino, desde a cravelha até o microafinador, é de cerca de 34 cm, basta uma volta na cravelha para atingir esse 1% de tolerância. De fato, como o diâmetro do eixo da cravelha é de 0.5 cm, uma volta na cravelha encurta a corda em aproximadamente 3 mm, chegando-se assim próximo à tensão de ruptura do aço. Ao apertar-se um pouco mais a cravelha, a corda rompe-se (Fig. 3). Por isso que os violinistas não costumam afinar seus instrumentos girando as cravelhas, preferindo fazê-lo através dos micro-afinadores colocados nas extremidades das cordas (seção 5.1).

### 3. Resposta acústica do violino

#### 3.1. Modos de vibração dos tampos

Os tampos dos violinos não são meras peças de madeira. Elas precisam se comportar como verdadeiras *tábuas harmônicas*, com modos normais de vibração cujas frequências formam uma seqüência harmônica (ou seja, que as frequências dos sobretons sejam múltiplos inteiros de uma frequência fundamental). Nos cursos de graduação descreve-se o movimento da corda em termos de ondas estacionárias, que correspondem aos modos normais de vibração [43]. Da mesma forma se podem descrever as ondas estacionárias bidimensionais estabelecidas numa placa vibrante. Cada uma destas ondas estacionárias corresponde a um modo normal de vibração (ou ressonância), sendo que a menor frequência é chamada de fundamental e as demais são sobretons ou harmônicos. Estes modos normais de vibração podem ser colocados em evidência pelo método de Chladni mencionado anteriormente. Foi este o método utilizado por Savart em 1830 para determinar a diferença tonal na frequência fundamental das placas superior e inferior dos violinos [7].

A Fig. 5 mostra os diagramas de Chladni para os três modos mais importantes da afinação tonal dos tam-

pos dos violinos, os chamados modos 1, 2 e 5. Por causa da forma das linhas nodais, os *luthiers* chamam o modo 2 de modo-*X* e o modo 5 de modo-*O* (*ring mode*). Estes modos resultam da combinação dos modos (2,0) e (0,2) de uma placa rectangular [13]. As frequências destes modos 1, 2 e 5, medidas no tampo superior de um violino são  $89 \pm 10$ ,  $165 \pm 24$  e  $304 \pm 34$  Hz, respectivamente [10]. Estes valores correspondem aproximadamente a relação 1:2:4, uma seqüência harmônica muito apreciada em música. De fato, quando a razão entre as frequências corresponde à razão entre dois números inteiros pequenos, os sons produzidos são agradáveis [43, 44 47]. As frequências correspondentes aos modos 1, 2 e 5 no tampo inferior são  $112 \pm 12$ ,  $171 \pm 20$  e  $369 \pm 36$  Hz, respectivamente. Neste caso, observa-se que a razão 171:369 corresponde aproximadamente a uma razão 1:2 (uma oitava). A experiência tem mostrado que, nos violinos de boa qualidade, os modos 2 e 5 de ambos os tampos se encontram separados por uma oitava (ou seja, um fator dois na frequência). Os *luthier* utilizam plainas para trabalhar as madeiras dos tampos, e testam estes três modos retorcendo os referidos tampos com as mãos e dando batidinhas com os dedos em lugares determinados [7,14,38]. Uma descrição das técnicas modernas utilizadas para testar os tampos pode ser encontrada na obra *Acoustics for Violin and Guitar Makers* [10]. Estes modos vibracionais também têm sido estudados pelo método matemático de análise de elementos finitos [48].

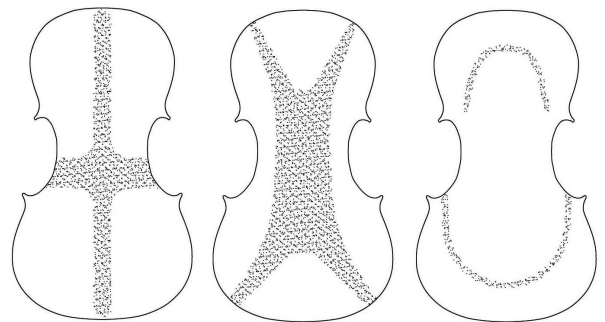


Figura 5 - Configuração das linhas nodais para os modos de vibração 1, 2 e 5 do tampo inferior de um violino obtidas pelo método de Chladni. As figuras características para cada frequência correspondente a um modos normal aparecem ao colocar-se em vibração um tampo no qual foi espalhada areia fina na sua superfície. Esta areia se acumula formando montículos sobre as linhas nodais, onde a amplitude de vibração é nula, permitindo a visualização das linhas nodais e a identificação dos modos normais de vibração [14,43]. Figura adaptada das Refs. [7] e [38].

Uma vez prontos os tampos, procede-se a montagem da caixa acústica. As placas são coladas às ilhargas, colocam-se a alma e a barra acústica, e se perfuram os dois orifícios - os "*f*" - no tampo superior. Tudo isto altera significativamente os modos normais de vibração dos tampos além de aparecerem novas ressonâncias devido ao acoplamento entre os tampos através das ilhar-

gas e da alma, assim como pelo acoplamento entre a madeira da caixa e os modos de vibração do ar dentro dela. Um exemplo documentado [27] mostra que o tempo é primeiramente afinado em uma frequência ao redor de 377 Hz, depois de serem feitos os “*f*” esse valor cai para cerca de 311 Hz, porém depois de colocada a barra harmônica e devidamente ajustada, a frequência do tempo muda para 376 Hz. A caixa ressoará em maior ou menor grau dependendo da semelhança entre as frequências transmitidas pelo cavalete e as frequência naturais de vibração da própria caixa. Uma das primeiras descobertas de F. Saunders foi que nos bons instrumentos existem duas ressonâncias cujas frequências correspondem as notas das duas cordas centrais (*Ré* e *Lá*) do violino. A primeira ressonância corresponde a um modo de vibração do tampo superior (chamado modo  $T_1$ ; seção 3.3) coincide com a frequência da nota *Lá* (440 Hz). A segunda ressonância correspondente a frequência natural de vibração do ar encerrado na caixa acústica (chamado modo  $A_0$ ) coincide com a nota *Ré* (294 Hz). Uma das características dos bons instrumentos então, é que estas duas ressonâncias estejam separadas por um intervalo de quinta [5,14,41].

### 3.2. Ressonância de Helmholtz

Os dois orifícios em forma de “*f*” permitem - em primeira aproximação - considerar a caixa do violino como um ressoador de Helmholtz. Este ressoador consiste de uma cavidade de volume  $V$  cheia de ar e conectada ao exterior por um tubinho de comprimento  $l$  e área da seção reta  $A$  (Fig. 6). Quando este ressoador oscila, as colunas de ar se movimentam através das aberturas produzindo oscilações na pressão interna da cavidade. Helmholtz, e mais tarde Lord Rayleigh, investigaram as frequências de ressonância desta cavidade. Quando o comprimento de onda da oscilação  $\lambda \gg l$ , o ar no tubo se comporta como a massa num sistema massa-mola enquanto a pressão acústica dentro da cavidade atua como o elemento elástico do oscilador [50-52]. A massa do ar dentro do tubo (Fig. 6) é  $m = \rho Al$ , onde  $\rho$  é a densidade do ar ( $\rho = 1.3 \text{ kg/m}^3$ ). A variação de pressão provocada pelo deslocamento da massa de ar no tubo é dada pela expressão [44,45]

$$\Delta p = -B \frac{\Delta V}{V}, \quad (4)$$

onde  $\Delta V$  é a variação de volume resultante do deslocamento  $x$  da massa de ar no tubo,  $B = \rho c^2$  é o módulo de elasticidade volumar do ar ( $B = 1.5 \times 10^5 \text{ N/m}^2$ ), e  $c$  é a velocidade do som no ar. Como  $\Delta V = -Ax$ , a força restauradora que atua sobre a massa  $m$  é  $F = -B(A^2/V)x$ , e a constante elástica do oscilador é  $k = \rho c^2(A/V)$ . Assim, fazendo-se a analogia com oscilador massa-mola obtemos a frequência de ressonância

$$\omega_o = \sqrt{\frac{BA}{V\rho l}} = c\sqrt{\frac{A}{lV}}. \quad (5)$$

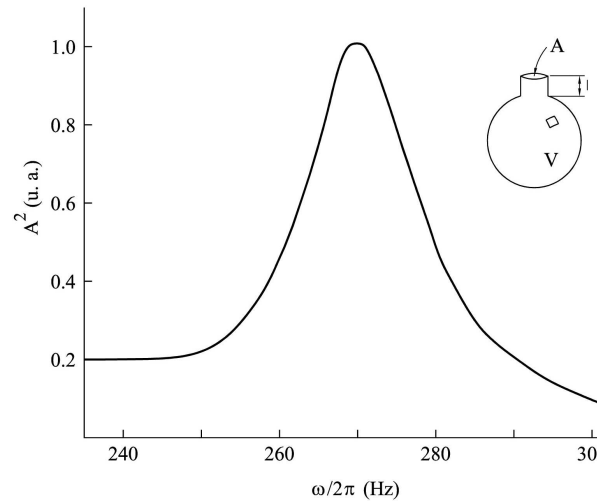


Figura 6 - O ressoador de Helmholtz e a curva de ressonância do ar dentro da caixa acústica do violino. A medida foi realizada com as duas *f* abertas no violino do autor [46] seguindo o procedimento experimental descrito no Quadro 1. O gráfico mostra o quadrado da amplitude do sinal captado pelo microfone em função da frequência de excitação do gerador.

Cremer e Vardergrift aplicaram esta expressão para o caso do violino [27,53]. Neste caso, as “*f*” representam a boca da cavidade,  $l$  a espessura do tampo superior e  $V$  é o volume do ar encerrado no corpo do instrumento ( $V \approx 2400 \text{ cm}^3$ ). A forma das “*f*” pode ser aproximada por elipses de área  $A = \pi ab/4$ , com  $a = 8.5 \text{ cm}$  e  $b = 0.5 \text{ cm}$ . Considerando o fato de que, nos violinos, o comprimento efetivo  $l$  é tipicamente da ordem de  $1.8b$  [53], a Eq. (5) fornece  $\omega_o \approx 229 \text{ Hz}$ . Este valor está de acordo com a frequência de ressonância medida por Vandegrift, que posicionou um altofalante num dos orifícios e um microfone no outro orifício. A frequência de ressonância medida com as duas *f* abertas no violino do autor (JPD) é de  $270 \pm 3 \text{ Hz}$  (Fig. 6). Esta ressonância de Helmholtz é chamada também de *f-hole resonance*, *cavity resonance*, *breathing mode* ou *main air resonance*. Na nomenclatura acústica, ela é rotulada  $A_o$  (*first air mode*) de frequência 270-280 Hz [13,54,55]. Este modo vibracional foi estudado também pelo método matemático de análise de elementos finitos [48,56]. Com relação à aproximação, de considerar-se a caixa do violino como um ressoador de Helmholtz, Bissinger discutiu recentemente a correção na frequência deste modo por causa da compliância das paredes (análogo acústico da capacitância no oscilador elétrico, e do inverso da constante da mola num oscilador mecânico). Esta compliância é provocada pela pressão que atua contra as paredes (não mais consideradas rígidas) reduzindo o amortecimento do sistema compreendido pela cavidade e as paredes da cavidade



[22,50,57].

A Tabela 2 ilustra a analogia que existe entre um oscilador mecânico, um oscilador elétrico e um sistema acústico. No caso de um oscilador massa-mola forçado e amortecido, o módulo da impedância é

$$|Z| = \sqrt{b^2 + (m\omega - k/\omega)^2}, \quad (6)$$

onde  $m$  é a massa,  $k$  a constante de força e  $b$  a constante de amortecimento do oscilador. Como a reatância mecânica é nula na frequência de ressonância,  $(m\omega - k/\omega) = 0$ , e  $|Z_o| = b$ . Desta condição se obtém a frequência de ressonância do oscilador (Tabela 2). No caso do oscilador elétrico - um circuito  $RLC$  em série, por exemplo - o módulo da impedância é

$$|Z| = \sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}. \quad (7)$$

Na frequência de ressonância, a reatância elétrica é nula,  $(\omega L - 1/\omega C) = 0$ , e a impedância será puramente resistiva,  $|Z_o| = R$ . Desta condição obtemos a frequência de ressonância deste circuito,  $\omega_o^2 = 1/LC$ . O fator de qualidade ou fator  $Q$ , que é uma medida da seletividade da ressonância vale  $Q = \omega_o L/R$ . Um valor de  $Q$  alto indica uma curva de ressonância mais aguda. Além disso, o fator de qualidade  $Q$  caracteriza também o quanto a tensão nos componentes reativos (capacitor ou indutor) é maior que a tensão no elemento dissipativo (resistor), e por isso é também chamado de “coeficiente de sobretensão”. No caso do sistema acústico, especificamente uma cavidade ressonante, o módulo da impedância é

$$|Z| = \sqrt{R_A^2 + \left(\omega \frac{\rho l}{A} - \frac{B}{V\omega}\right)^2}. \quad (8)$$

Da mesma forma como nos sistemas mecânico e elétrico, a reatância acústica é nula,  $(\omega \rho l/A - B/\omega V)$

$= 0$ , na ressonância, e a impedância será igual a resistência acústica,  $|Z_o| = R_A$ . Desta condição obtemos a frequência de ressonância desta cavidade (Eq. (5)). A expressão do fator de qualidade, ou fator  $Q$  no caso acústico é

$$Q = \frac{\omega_o \rho l}{AR_A} \approx \frac{2\omega_o \rho}{aR_A}, \quad (9)$$

onde, como mencionado anteriormente para o caso do violino,  $A = \pi ab/4$  e  $l \approx .8b$ . Da mesma forma que no caso elétrico, o fator  $Q$  acústico mede também a razão entre a energia acústica dos modos ressonantes e a energia dissipada por ciclo nos elementos dissipativos mecânicos, caracterizados por  $R_A$ . Este número é quem vai determinar quanto efetivamente de energia acústica gerada pelo movimento do arco vai ser transformada em som audível, caracterizando assim a eficiência do instrumento e conseqüentemente o conforto na sua execução. O valor de  $Q$  da ressonância da Fig. 6, determinado a partir da largura de linha a meia altura,  $\Delta\omega$ , é  $Q = \omega_o/\Delta\omega \approx 14 \pm 1$ . Valores de  $Q$  entre 11 e 20 tem sido medidos para o modo  $A_o$  em violinos [53,58]. Substituindo este valor de  $Q = 14$  na Eq. (9), calculamos o valor da resistência acústica, obtendo  $R_A \approx 10^3$  kg/m<sup>3</sup>s. Como o volume do ar encerrado na caixa acústica do violino é  $V \approx 2.4 \times 10^{-3}$  m<sup>3</sup>, o valor da impedância acústica na ressonância é  $|Z_o| \sim 3$  kg/s. Este valor esta de acordo com o obtido por Jansson que, num estudo de 25 violinos de alta qualidade, achou um valor médio da impedância para o modo  $A_o$ , de  $Z_o \approx 2.4$  kg/s [59]. É importante salientar que a abordagem utilizada nesta análise da ressonância acústica da caixa do violino permitiu obter todos os parâmetros da expressão da impedância acústica na Tabela 2.

Tabela 2 - Equação dinâmica, módulo da impedância e frequência de ressonância de um oscilador mecânico (sistema massa-mola), um oscilador elétrico (circuito  $RLC$ ) e um sistema acústico (cavidade ressonante). Parâmetros:  $m$  indica a massa,  $k$  a constante de força e  $b$  a constante de amortecimento do oscilador mecânico;  $L$  a indutância,  $R$  a resistência,  $C$  a capacitância e  $q$  a carga elétrica no sistema elétrico;  $\rho$  indica a densidade do ar,  $l$  o comprimento do tubo,  $A$  a área do orifício,  $R_A$  a resistência acústica ( $R' \equiv R_A/A$ ),  $B$  o módulo volumar (*bulk modulus*) do ar,  $V$  o volume da cavidade de Helmholtz e  $x$  o deslocamento do ar.

Oscilador	Equação dinâmica	Impedância	Frequência de ressonância
Mecânico	$m \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = F(t)$	$ Z  = \sqrt{b^2 + (m\omega - k/\omega)^2}$	$\omega^2 = \frac{k}{m}$
Circuito elétrico	$L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = \varepsilon(t)$	$ Z  = \sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}$	$\omega^2 = \frac{1}{LC}$
Sistema acústico	$\rho l \frac{d^2x}{dt^2} + R' \frac{dx}{dt} + \frac{BA}{V} x = P(t)$	$ Z  = \sqrt{R_A^2 + \left(\omega \frac{\rho l}{A} - \frac{B}{V\omega}\right)^2}$	$\omega^2 = \frac{BA}{V\rho l}$

### 3.3. Modos de vibração do corpo

As pesquisas sobre os modos de vibração dos violinos ganharam força a partir da década dos 70, quando apa-

receram as técnicas ópticas de interferometria e de holografia [13,14,60]. Estes modos foram rotulados pelo Prof. Erik Jansson de Estocolmo, de acordo com o principal elemento vibrante. Assim, os *modos do ar* são

identificados como  $A_0$  e  $A_1$ . Estes modos foram visualizados através de técnicas holográficas [13,54] e foram identificados também em experiências específicas, nas quais se introduz hélio, dióxido de carbono e outros gases no corpo do violino. Devido a diferença na velocidade do som destes gases em relação ao ar (259 m/s no  $\text{CO}_2$  e 965 m/s no He, contra 331 m/s no ar a  $0^\circ\text{C}$ ) observou-se que a introdução destes gases na cavidade deslocava a frequência do modo  $A_0$ , de 270 Hz (no ar) para 218 Hz no  $\text{CO}_2$  e 820 Hz no Hélio [55,61].

Os modos do corpo são rotulados  $C_1$ ,  $C_2$ , etc. No modo mais baixo ( $C_1$ ) o violino vibra num modo semelhante ao da flexão de uma barra livre (*bending mode*) com uma linha nodal perto do cavalete. Nos modos rotulados  $C_3$  e  $C_4$ , os tampos se movimentam em fase e são muito semelhantes - na sua forma - aos tres modos de vibração dos tampos livres, os modos 2 e 5 (modos  $X$  e  $O$ ) mencionados anteriormente (seção 3.1). Por último, os modos dos tampos são rotulados  $T_1$ ,  $T_2$ , etc. O modo  $T_1$  é um modo de vibração do tampo superior e envolve também o movimento do ar pelas “ $f$ ”. Este modo, assim como o  $C_3$ , é considerado muito eficiente para a radiação de som [54]. A vibração é assimétrica por causa da alma do violino, que está localizada numa linha nodal de  $T_1$  e num nó de  $A_1$  (Fig. 7).

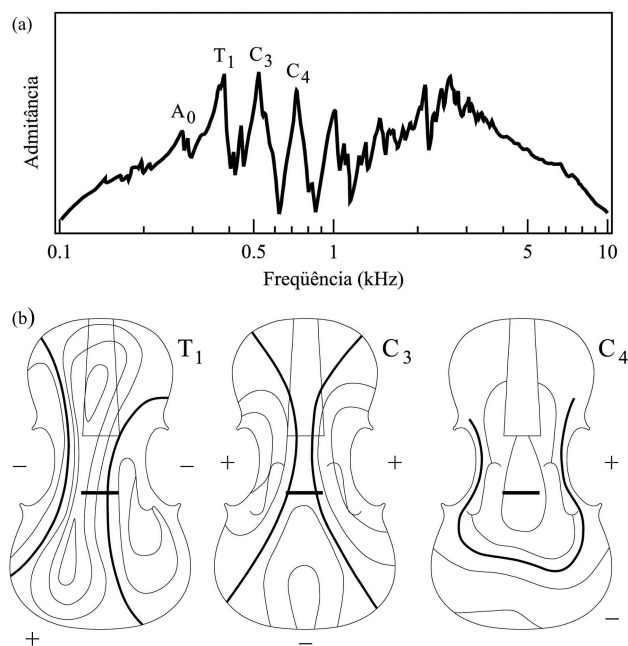


Figura 7 - (a) Admitância acústica em função da frequência de um violino *Guarneri del Gesù*, mostrando as posições das ressonâncias do ar ( $A_0$ ), do corpo ( $C_3$  e  $C_4$ ) e do tampo superior ( $T_1$ ). (b) Desenho dos modos de vibração  $C_3$ ,  $C_4$  e  $T_1$  visualizados por técnicas holográficas. As linhas mais grossas no desenho indicam linhas nodais enquanto os símbolos +/- indicam a direção dos movimentos de oscilação. Adaptado das Refs. [10] e [13].

### 3.4. O cavalete

Como mencionado anteriormente, a principal função do cavalete é transformar o movimento da vibração das cordas - paralela ao tampo superior - em forças aplicadas a cada um dos dois pés, as quais atuam perpendiculares ao tampo superior do instrumento. Em outras palavras, sua função é “girar” a força transversal da corda vibrante em forças normais aplicadas ao corpo do instrumento. Observações feitas por Minnaert & Vlam em 1937 mostraram que o cavalete tem seus próprios modos de vibração, e que estes não estão apenas limitados a seu plano, senão que compreendem vibrações longitudinais e de torção [13,23]. Nos anos 70, a técnica de interferometria holográfica permitiu visualizar seus modos normais de vibração (Fig. 8) [27]. As duas ressonância principais foram observadas em  $\sim 3000$  Hz e  $\sim 4500$  Hz (alguns autores a situam em 6000 Hz) [13,27]. Estas ressonâncias estão dentro da região de frequências de interesse para a sonoridade musical do violino [62,63]. A ressonância em 3000 Hz, que coincide com a região de maior sensibilidade do ouvido, vai-se refletir na resposta acústica do instrumento que apresenta um pico nessa região (seção 3.5).

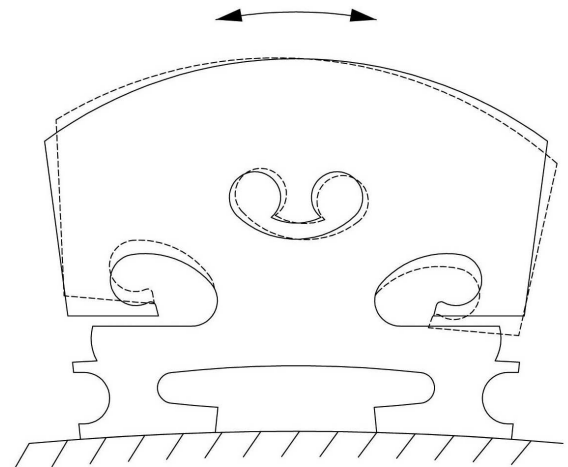


Figura 8 - Modos normais de vibração do cavalete visualizados por técnica de interferometria holográfica. A primeira ressonância, observada em 3000 Hz, é devida a oscilações no plano do cavalete semelhantes a um balanço sobre as pernas. A segunda ressonância, observada em 4.5 kHz, se deve a movimentos simétricos verticais. Nesta oscilação a parte superior do cavalete se move verticalmente enquanto a parte inferior se flexiona para cima e para baixo. Estes movimentos não seriam possíveis sem os orifícios laterais (os *ouvidos*) do cavalete. Adaptado das Refs. [13] e [27].

Um dos primeiros esforços por descrever fisicamente o comportamento vibracional do cavalete foi realizado por Hacklinger, que propôs um modelo simples de oscilador mecânico massa-mola simples, caracterizado por uma frequência de ressonância de 2850 Hz, uma massa efetiva de 0.5 g e uma constante de força  $k = 1.66 \times$

$10^5$  N/m [64]. Cremer descreveu o cavalete por meio de modelos mecânicos que combinam osciladores massa-mola e osciladores de torção [27]. Boutillon caracterizou a dinâmica do cavalete nas três dimensões do espaço em termos da admitância mecânica tridimensional. Esta admitância mecânica corresponde à razão entre velocidade e força de excitação (seção 3.5) [31]. Num interessante trabalho publicado em 2002, o físico japonês Matsutani visualizou por métodos fotoelásticos as tensões geradas pelas cordas e pela arcada num cavalete de violino. As experiências foram realizadas em cavaletes de plástico, moldados com e sem os orifícios (o *coração* e os *ouvidos*). O autor conclui que os *ouvidos* do cavalete reforçam as frequências correspondentes ao 3º harmônico da nota  $Mi_5$  assim como o 2º e 6º harmônico da nota  $Lá_4$ , enquanto o *coração* reforça o 3º e 6º harmônicos desta última nota [65].

Uma outra importante função do cavalete é de atuar como filtro acústico, suprimindo certas frequências indesejáveis. Enquanto as ressonâncias em 3000 Hz e 4500 Hz reforçam o som do instrumento nessas frequências, a depressão entre as duas ressonâncias reduz o tom nasal indesejável na região entre elas [8]. Uma outra manifestação da função de filtro acústico do cavalete ocorre na região entre 1300 e 1800 Hz. Em 1978, Hacklinger observou que até os 1200 Hz, o som do violino é cheio e muito valorizado; acima dos  $\sim 2000$  Hz o som é claro e brilhante, mais entre 1300 e 1800 Hz aparecem sons nasais, indesejáveis, que precisam ser suprimidos [64]. A Fig. 9 mostra que efetivamente a amplitude do som tem uma redução na região de 1300 a 1800 Hz num violino. Modificando o cavalete, o autor verificou que esta peça atua como um verdadeiro filtro acústico *passa baixas* nessa região, bloqueando as altas frequências. Podemos parametrizar o comportamento deste filtro fazendo uma analogia com o bem conhecido filtro elétrico *passa baixas* estudado nos cursos de Física Básica. Neste filtro elétrico - uma combinação de um resistor (resistência  $R$ ) e um indutor (indutância  $L$ ) - verifica-se que a tensão no resistor ( $V_R$ ) é atenuada para frequências acima da chamada frequência de corte,  $f_c = R/L$  [34,36]. Adotamos o modelo mecânico massa-mola da Fig. 9 para o cavalete, consistindo de uma massa efetiva ( $m$ ) suportada em duas molas de constante de força  $k$ . Considerando as frequências de ressonância do cavalete, em 3060 Hz e 4500 Hz, obtemos  $k \approx 3 \times 10^5$  N/m e  $m \approx 1.65$  g para o oscilador. A expressão para a frequência de corte do filtro mecânico  $f_c$ , é obtida da analogia entre os osciladores mecânico e elétrico (Tabela 2)

$$f_c = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{3b}{m} \right). \quad (10)$$

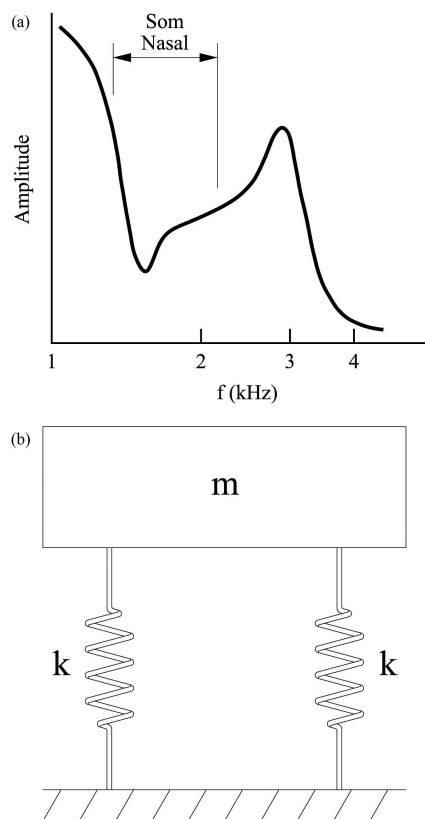


Figura 9 - (a) Amplitude do som de um violino no intervalo de 1 a 4 kHz, mostrando a região de som nasal indesejável (adaptado de ref. [64]). (b) Modelo mecânico massa-mola para o cavalete, consistente numa massa ( $m$ ) suportada por duas molas de constante de força  $k$ . Este sistema tem dois modos normais de vibração, de frequências  $\omega_1^2 = 2k/m$  e  $\omega_2^2 = 6k/m$ , respectivamente.

O parâmetro  $b$ , a constante de amortecimento do oscilador, pode ser obtido das medidas da admitância da ressonância que se estende dos 1.8 kHz até os 3.5 kHz-região chamada de *bridge hill*,  $Y = 0.22$  s/kg [57]. Como o módulo da impedância na ressonância é exatamente o valor de  $b$  (em terminologia elétrica, esta impedância é puramente resistiva) temos então,  $|Z_{BH}| = b \approx 4.5$  kg/s. A frequência de corte calculada com a Eq. (10) é,  $f_c \approx 1.3$  kHz, o que corresponde bem com a atenuação observada na amplitude do sinal do violino nessa frequência (Fig. 9). A função do cavalete como filtro acústico é bem mais complexa do que foi abordada nesta seção. Para mais detalhes sobre este tópico, recomendamos os trabalhos publicados por G. Bissinger [57] e J. Woodhouse [63].

### 3.5. A resposta acústica do violino

A impedância mecânica de um sistema físico sujeito a forças motrizes é definida como a razão da força motriz pela velocidade associada ao deslocamento. Sua unidade, no sistema internacional, é kg/s [66]. Ela lembra, no análogo elétrico, a relação entre a força eletromotriz  $\varepsilon$  e a corrente  $I$  por ela gerada em uma re-

sistência  $R$ . Uma das formas de representar a resposta em frequência (ou resposta espectral) de um oscilador mecânico é registrar a admitância mecânica em função da frequência. Esta admitância mecânica, o inverso da impedância, corresponde à razão entre velocidade e força de excitação. A parte real da admitância tem um valor máximo na ressonância, enquanto que a impedância fica igual ao termo dissipativo determinado pela constante de amortecimento,  $b$  [13].

A metodologia da medida de admitância (também chamada de *mobilidade*) como resposta acústica de violinos foi estabelecida nos anos 90. Nestas medidas, o cavalete é excitado por uma pequena batida no canto superior do cavalete, feita por um martelinho padrão disposto como um pêndulo. A vibração do cavalete é registrada através do sinal gerado por um pequeno imã colado no canto oposto do cavalete. Este sinal é detectado por um sensor magnético posicionado a poucos milímetros do imã. Um analisador registra o pulso da força de excitação e o sinal resultante da velocidade da vibração. A magnitude e a fase da admitância são então calculadas em função da frequência [10,54,59]. Este é um método pulsado, e tem como principal vantagem o tempo reduzido do experimento, fortemente influenciado pelo desenvolvimento de métodos de análise de problemas acústicos baseados no formalismo de Fourier. É conveniente notar que os problemas de acústica, propagação de sons e reconhecimento de pronúncia foram as molas propulsoras do desenvolvimento das técnicas de análise baseadas no formalismo de Fourier discreto, que culminou com a proposição da formulação rápida da transformada de Fourier discreta, na década de 1960, hoje conhecida como FFT (do inglês *Fast Fourier Transform*). Isso permitiu que essas análises pudessem ser feitas de forma numérica, utilizando-se computadores.

A Fig. 7 mostra a resposta acústica (admitância) de um violino *Guarneri del Gesu*, mostrando as ressonâncias do ar ( $A_o$ ), as do corpo ( $C_3$  e  $C_4$ ) e uma do tampo superior ( $T_1$ ) [13]. Como mencionado anteriormente, estes modos são considerados os mais importantes na região de baixas frequências de um violino. A ressonância do ar na cavidade, em 270-280 Hz, compensa a incapacidade de um tampo dessas dimensões emitir radiação sonora eficientemente nessa região.

A ressonância entre 1.8 kHz e 3.5 kHz - chamada de *bridge hill* - é atribuída a movimentos cooperativos entre o tampo superior do violino e o cavalete. Este *bridge hill* coincide com as ressonâncias próprias do cavalete, em 3 kHz e 4.5 kHz (seção 3.4). O pico apresentado pela admitância nesta região corresponde a um máximo na sonoridade radiada, e depende da transferência de energia do cavalete ao tampos do instrumento [14]. A natureza desta ressonância está sendo o foco de muitas pesquisas atualmente [57,62,63,67]. Uma outra evidência da importância destes modos todos foi fornecida por Jansson, que estudou a resposta

acústica de 25 violinos de alta qualidade fabricados entre 1730 e 1894 por *luthiers* de Itália, França, Holanda e Alemanha. Ele identificou as ressonâncias  $A_o$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  e  $T_1$  em quase todos os instrumentos e concluiu que a ressonância  $C_3$  e a presença de um *bridge hill* pronunciado seriam as maiores características na resposta acústica de um violino de alta qualidade [59].

## 4. Movimento ondulatório da corda friccionada pelo arco

### 4.1. O arco

O arco de violino é feito de fios de crina de cavalo presos a extremidades de uma peça de madeira longa e curva (Fig. 1). Observadas no microscópio se distinguem as pequenas escamas orientadas que determinam a fricção da crina com a corda (Fig. 3). Como a fricção gerada depende da orientação destas escamas, metade das crinas é orientada com as escamas numa direção e a outra metade orientada na outra direção, de forma a obter a mesma fricção nas arcadas para cima ou para baixo. As crinas são tensionadas com ajuda de um parafuso localizado no talão do arco. Costuma-se afrouxar a tensão quando o arco não está sendo usado para preservar a flexibilidade da madeira. Originalmente de curvatura côncava, o arco passou por uma silhueta quase retilínea até a incorporação da forma atual, convexa. Foi o fabricante de arcos francês François Tourte (1747-1835) que vergou a madeira do arco em sentido contrário, de forma que a tensão das crinas se mantivesse inalterada quando o executante pressionasse o arco contra as cordas. Dessa forma o executante consegue um som firme e homogêneo em qualquer lugar do arco em que esteja tocando. Foi Tourte também que fixou as dimensões ideais para o arco, que no violino variam entre 74 e 75 cm de comprimento, com o ponto de equilíbrio (fiel) a cerca de 19 cm do talão. Algumas inovações do arco são atribuídas igualmente ao inglês John Dodd (1752-1839) [28]

A madeira mais utilizada na fabricação de arcos para instrumentos de corda é o pau-brasil ou *Pernambuco* (*Caesalpinia echinata*). Foram os irmãos Tourte em Paris, que consagraram o pau-brasil como material ideal para a confecção de arcos, pois este reúne características ideais de densidade, rigidez, flexibilidade, capacidade de manter a curvatura e beleza. A coloração alaranjada do seu cerne decorre da presença de brasilina ( $C_{16}H_{14}O_5$ ) que oxida com a exposição ao ar, assumindo a coloração vermelha-coral. Atualmente existe uma preocupação com a extração desta madeira e os esforços estão direcionados à procura de outras espécies apropriadas para a fabricação de arcos. A pesquisadora Edenise Segala Alves do Instituto de Botânica de São Paulo, em colaboração com o arquiteiro Daniel R. Lombardi estudou as propriedades estruturais de amostras de pau-brasil e relacionou parâmetros que devem pos-



suir as madeiras consideradas como boas alternativas na confecção de arcos [68]. Uma das madeiras considerada promissora é a maçaranduba (*Manikara*). Ambas as madeiras, pau-brasil e maçaranduba, são madeiras pesadas (densidades  $\rho \sim 1 \text{ g/cm}^3$ ), duras, compactas, resistentes e duráveis. Elas são também comparáveis em relação a capacidade de curvatura [68,69].

#### 4.2. A arcada

Usa-se uma resina comumente designada de breu (não confundir com o breu de hulha extraído do carvão mineral) para aumentar a capacidade de fricção entre a crina do arco de instrumentos de cordas. Formalmente chamado de colofone, é uma forma sólida da resina obtida de pinheiros e de outras plantas coníferas. O produto final é um sólido quebradiço, semitransparente, de cor amarelo escuro. Podemos determinar o coeficiente de atrito estático ( $\mu_e$ ) entre a superfície formada pelas crinas e a superfície da corda metálica, medindo-se o ângulo de inclinação ( $\theta$ ) no qual um pequeno objeto posicionado sobre as crinas começa a deslizar. Neste caso se cumpre a relação

$$\mu_e = \operatorname{tg}\theta. \quad (11)$$

Os resultados da experiência foram  $\theta \approx 20^\circ$  para o arco sem breu e  $\theta \approx 30^\circ$  para o arco com breu, dando coeficiente de atrito de  $\mu_e \approx 0.36$  e  $\approx 0.6$  para o arco sem e com breu, respectivamente. Estes valores estão de acordo com os encontrados na literatura,  $\mu_e = 0.56$  nos arcos com breu, e  $0.21$  nos sem breu [70]. Estes resultados indicam que o coeficiente de atrito estático aumenta cerca de 60% com a aplicação do breu.

O coeficiente de atrito estático é importante para descrever a fase de aderência entre arco e corda. O coeficiente de atrito dinâmico ( $\mu_d$ ), que depende da velocidade, é utilizado para descrever e parametrizar as fases de escorregamento do arco na corda. Quando duas superfícies estão em movimento, o coeficiente de atrito dinâmico é sempre menor que o estático. Estudos do comportamento do coeficiente de atrito em função da velocidade de escorregamento do arco indicam que este coeficiente se estabiliza em  $\mu_d \approx 0.2$  quando a velocidade relativa arco-corda atinge  $0.5 \text{ m/s}$  [22,31].

Como durante a execução musical, tanto a corda como a crina ficam impregnadas com as micropartículas de breu (10-20  $\mu\text{m}$  de diâmetro), a fricção fica determinada pela afinidade das duas superfícies, a de “breu na corda” e a de “breu na crina”. Quando as duas superfícies estão em movimento uma relativa a outra, a resina sofre uma deformação termo-plástica e começa amolecer, e o atrito resultante é relativamente pequeno [31,36,70]. O tampo superior do violino também fica coberto de partículas de breu depois de tocar-se durante um certo tempo. Por isso que ao final de cada concerto ou ensaio, o executante limpa o instrumento com um pano seco. Se não o fizer, as partículas de breu podem

impregnar a madeira, afetando a resposta acústica do instrumento.

Com relação à posição em que se passa o arco no violino, lembremos que em 1788 Broadwood, um conhecido construtor de pianos, modificou o desenho dos instrumentos de forma que os martelos percutissem as cordas (de comprimento  $L$ ) a uma distância  $L/9$  de uma de suas extremidades. Esse ponto de contato não foi escolhido aleatoriamente. As notas correspondentes aos harmônicos das cordas vibrantes são consideradas, do ponto de vista musical, como agradáveis ou como desagradáveis à audição. Certos harmônicos, como o nono e o undécimo são desagradáveis ao ouvido. A pureza do timbre de uma corda exige que sejam suprimidos esses harmônicos, cujas frequências são dissonantes com a fundamental e que possuem, precisamente, um nó nesse lugar. A forma da onda,  $y = f(x, t)$  de uma corda fixa nas duas extremidades, que é excitada a uma distância  $a$  de uma delas é

$$y = \sum_n g_n(x) A_n \cos(2n\pi f, t), \quad (12)$$

onde

$$A_n \propto \frac{1}{n^2} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi a}{L}\right). \quad (13)$$

A excitação da corda num dado ponto  $a$  suprime os harmônicos  $n$  tais que

$$\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi a}{L}\right) = 0. \quad (14)$$

De acordo com esta condição, para evitar a audição do nono harmônico no violino, ou seja eliminar o nó correspondente, basta passar-se o arco no ponto  $L/9$ . Nesse lugar será produzido um ventre de vibração, anulando assim o harmônico dissonante. Na prática, o arco é passado entre 2 e 4 cm de distância do cavalete. Como o comprimento da corda  $L$  é da ordem de 32 a 33 cm, a posição da arcada corresponde bem com a distância ( $L/9$ ) desejada. Na realidade, o timbre do som emitido por um violino não é tão sensível ao lugar em que se aplica o arco como é no caso da corda pulsada ou percutida. O motivo disto é que as vibrações geradas na corda são transmitidas ao tampo superior através do cavalete, e ao tampo inferior através da alma, o que faz que o ar encerrado na caixa também seja colocado em vibração [38].

O som gerado ao passar um arco pelas cordas depende essencialmente de três variáveis: a velocidade do arco, a posição do arco (distância ao cavalete) e a força com que se pressiona o arco contra as cordas. A situação não é tão simples quanto parece porque existe uma correlação entre estas grandezas. Se desejamos, por exemplo, passar o arco lentamente (como ocorre no caso de notas longas e ligadas), a força perpendicular com que o músico pressiona as cordas deverá ter um valor mínimo, para que resulte um som firme de boa qualidade. Uma pressão muito leve provoca instabilidade

no deslocamento e na velocidade da arcada (o arco não consegue “capturar” a corda) e o resultado será um som inseguro. Pelo contrário, se a força for muito grande, a corda seguirá presa ao arco, destruindo o movimento periódico da corda, resultando um som arranhado [38].

Schelleng, em 1973, estudou a força perpendicular que tem que ser aplicada na arcada em função da velocidade do arco, da posição do arco e dos coeficientes de atrito estático e dinâmico entre o arco e as cordas. Ele estabeleceu que para cada posição do arco há uma força de arcada mínima e uma máxima, dentro das quais o executante pode conseguir um som estável bem controlado [6,13,71]. Este problema voltou a ser tratado por Schumacher em 1994, que expressou a força tangencial entre o arco e a corda em função da velocidade da corda, os coeficientes de atrito e as impedâncias translacional e rotacional da corda (o arco gera também oscilações de torção na corda) [72]. Mais recentemente, Piteroff e Woodhouse propuseram um modelo físico para determinar a força máxima na arcada levando em conta a largura do arco, a capacidade de flexão das cordas e a razão entre a impedância do movimento transversal (definida na superfície da corda) e impedância do movimento rotacional. De acordo com estes autores, a força máxima do arco que permite a geração da oscilação de Helmholtz nas cordas é da ordem de 1 N [73], valor que está de acordo com os relatados por outros autores, entre 0.5 e 1.5 N [13].

#### 4.3. Vibração da corda friccionada por um arco

Como foi mencionado na Introdução, o primeiro a estudar o problema da vibração produzida numa corda friccionada por um arco foi Helmholtz que, utilizando um arranjo experimental com a objetiva de um microscópio acoplada a um diapasão, observou o movimento de uma partícula colada na corda do violino e concluiu que esta vibração é muito diferente da vibração senoidal observada nas cordas estacionárias. A posição da partícula em função do tempo assemelha-se à um *zig-zag* com um período igual ao inverso da frequência de oscilação da corda [21]. Esta vibração particular de uma corda friccionada por um arco é conhecida como “movimento de Helmholtz” [22,23,74]. Tocar o violino consiste em obter e em manter os “movimentos de Helmholtz” a partir de condições transitórias muito diferentes. É isso que estabelece a essência da expressão musical [31].

A Fig. 10 mostra a evolução temporal do movimento de uma corda friccionada por um arco deslocando-se a velocidade constante [13]. Esta vibração envolve um mecanismo do tipo “prende-desliza” (*stick-slip*, na designação inglesa). Na primeira parte do movimento, o arco “captura” a corda e a leva consigo. O ponto de contato entre o arco e uma corda se movimenta, inicialmente, no mesmo sentido que o arco e com a mesma velocidade com que o executante o movimenta (quadros 3 a 8 da Fig. 10).

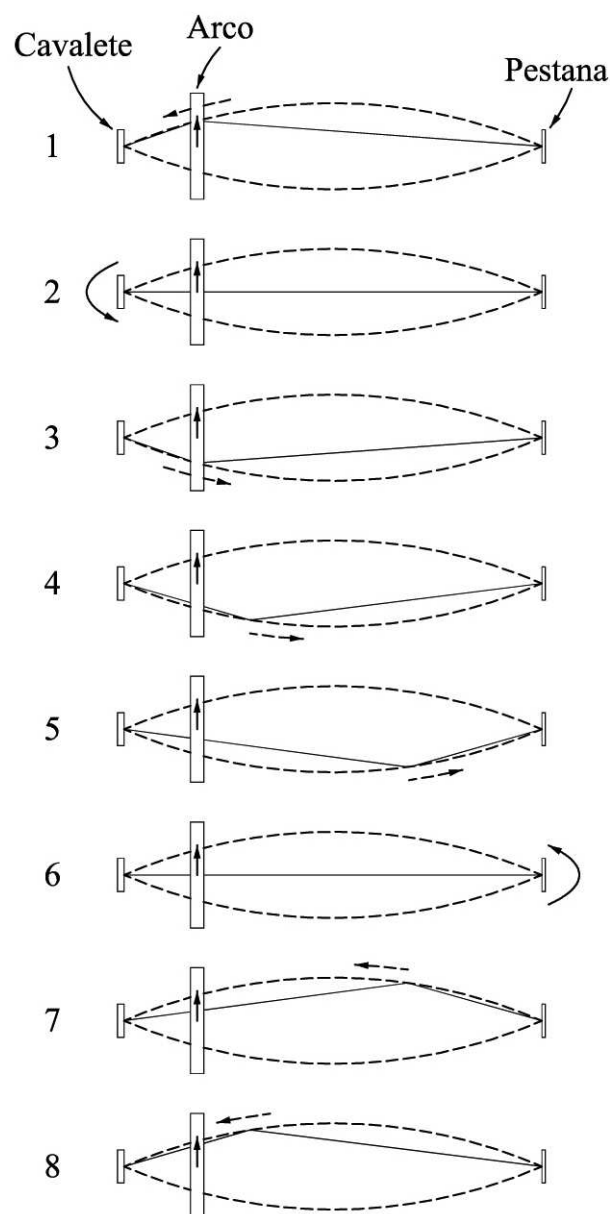


Figura 10 - Movimento de uma corda excitada por um arco. A sequência de quadros mostra as diferentes posições do movimento durante um ciclo de vibração. O movimento transversal da corda é formado por dois segmentos retos unidos num ponto de dobra, o qual percorre a corda, refletindo-se na sua extremidade (Adaptado das Refs. [13] e [22]).

Na sequência, a força restauradora aplicada na corda fica muito grande, e conseqüentemente ela estala, ou seja, deixa de estar aderida ao arco e desliza na direção contrária ao seu deslocamento, até ser “capturada” de novo pelo arco, recomeçando o ciclo (quadros 1 a 3 da Fig. 10). Quando a corda está deslizando na direção contrária ao deslocamento do arco, ela escorrega facilmente por debaixo das crinas do arco. A natureza do mecanismo de atrito (estático ou cinético) intervém de forma decisiva na estabilidade do movimento pois na fase de escorregamento o arco apresenta uma resistência dinâmica negativa a corda [74]. Quando o

ciclo recomeça, a corda se movimenta novamente acompanhando o arco [13,22,33]. O movimento transversal da corda, em todo instante, é formado por dois segmentos retos unidas num ponto, o qual se desloca na corda, refletindo-se na extremidade desta. Quando a inflexão volta ao ponto de contato com o arco, a tensão da corda atua de forma a desprendê-la do arco. Devido a velocidade com que o ponto de dobra percorre a corda, não é possível vê-la. Observa-se apenas a envolvente desse movimento, na forma de dois arcos parabólicos (linha pontilhada na Fig. 10). Animações mostrando o movimento da corda friccionada por um arco podem ser encontradas nas páginas web da University of New South of Wales [9] e do Prof. Woodhouse [75].

Vamos analisar o movimento da parte da corda próxima ao cavalete, porque é justamente essa vibração que o cavalete transfere para o corpo do violino. Consideremos o ponto da corda, localizado a uma curta distância  $D$  do cavalete. Podemos analisar o movimento deste ponto calculando os tempos de “subida” e de “descida” em cada ciclo. Se  $L$  é o comprimento da corda (tipicamente de 33-34 cm), o ponto  $P$  divide a corda em dois segmentos, de comprimentos  $D$  e  $(L - D)$ , respectivamente. Quando a arcada é realizada no sentido para “cima”, o tempo que o ponto  $P$  despense na descida ( $T_F$ ) é proporcional a  $D$ , e o despendido na subida ( $T_R$ ) é proporcional a  $(L - D)$

$$\frac{T_F}{T_R} = \frac{D}{L - D}. \quad (15)$$

O tempo total do ciclo é  $T = T_F + T_R$ . Como a posição da arcada no violino é a aproximadamente 3 cm do cavalete, a posição do ponto  $P$  corresponderá a  $D \approx 0.05L$ , e se verifica que:  $T_R = 0.95 T$ . Este resultado indica que em 95% de cada período a corda esta “subindo” (tempo de aderência), e nos outros 5% ela está “descendo” (tempo de escorregamento) [49]. A Fig. 11 mostra a posição de um ponto de contato entre a corda e o arco em função do tempo, acompanhando a seqüência dos quadros (1) a (8) da Fig. 10 [13,22]. O movimento deste ponto de contato é periódico, mas não é precisamente um movimento harmônico simples - indo e vindo regularmente - senão que reflete a alternância entre aderência e escorregamento do movimento da corda friccionada durante um ciclo de vibração e que acaba determinando a sonoridade do instrumento [13,27,49]. Esta onda é conhecida também como *Raman wave*, em reconhecimento ao trabalho teórico e experimental de C.V. Raman sobre a corda excitada por um arco [14,74]. É importante salientar porém que nesta descrição da corda friccionada não participa nenhum elemento dissipativo. O modelo é compatível com a presença do “movimento de Helmholtz” na corda mais é insuficiente no sentido que este movimento não será estável neste contexto [31].

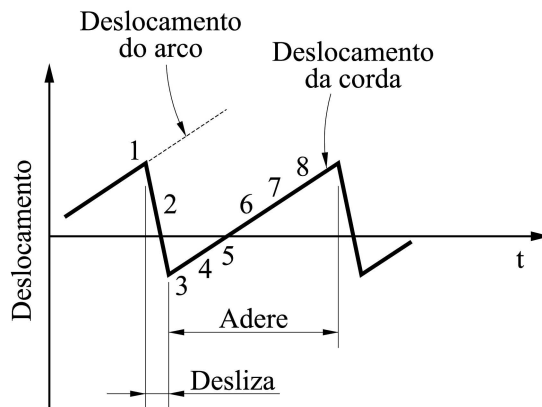


Figura 11 - Deslocamento do arco (linha pontilhada) e da corda no ponto de contato, em tempos sucessivos. A numeração segue a seqüência dos quadros da Fig. 10. De (3) a (8) a corda adere ao arco e desloca-se no mesmo sentido e com a mesma velocidade do arco. De (1) a (3), a corda desliza rapidamente - quase como se estivesse livre - no sentido contrário do arco. Em (3) a corda volta a ser prendida pelo arco extremidade (Adaptado das Refs. [13] e [22]).

O som musical emitido por uma corda vibrante é determinado pelo tom fundamental e seus parciais, ou harmônicos. A quantidade e a intensidade dos harmônicos presentes na vibração da corda dependem da forma como ela for excitada. A vibração da corda friccionada por um arco é diferente da vibração de uma corda tangida, ou seja, puxada e depois solta. Ao beliscar uma corda os parciais produzidos são ligeiramente inarmônicos, mas quando a corda é friccionada a oscilação é auto-sustentada e a relação entre o tom fundamental e seus parciais praticamente harmônica [27]. Por este motivo seus timbres também são diferentes. A forma da onda da corda excitada pelo arco (Fig. 11) pode ser descrita por uma onda “dente-de-serra” modificada. Esta forma de onda, muito encontrada em eletrônica, pode ser representada como uma série de Fourier de ondas senoidais e tem como característica um espectro de som rico em harmônicos [43,44,47]. Ambos os harmônicos pares e os ímpares estão presentes no espectro de som, e suas intensidades decaem bem mais lentamente que as intensidades dos harmônicos produzidos numa corda tangida. Para uma corda friccionada por um arco, a intensidade do  $n$ -ésimo harmônico é  $1/n$  da intensidade do tom fundamental. Para uma corda tangida, a intensidade dos harmônicos decai muito mais rapidamente, como  $1/n^2$  [49]. Como veremos na seção 4.4, o grande número de harmônicos da corda excitada pelo arco tem grande importância na produção do som do violino.

O arco permite ao violinista fornecer energia de forma contínua e manter a intensidade da nota. A vibração da corda se mantém tanto quanto o executante mantenha o movimento do arco. Cabe também salientar que os instrumentos de corda tem inúmeras possibilidades sonoras, que não se limitam apenas a melodias sustentadas tocadas pelo movimento lento do arco sobre

as cordas. Outros efeitos são conseguidos quando, por exemplo, tangimos a corda com os dedos (o chamado *pizzicato*), ou quando movimentamos rapidamente o arco sobre a corda (*tremolo*). Também podemos fazer um *glissando* deslizando um dedo da mão esquerda pela corda, ou podem-se criar uma sonoridade diferenciada percutindo as cordas com a madeira do arco, movimento este chamado de *col legno*. Cada uma dessas formas de ataque às cordas constitui uma condição de contorno diferente quando se busca a solução para a equação de evolução, e a conseqüente riqueza espectral do som produzido.

#### 4.4. O som do violino

Agora estamos em condições de discutir como é produzido o som do violino. Helmholtz mostrou que a forma da onda da vibração que o arco produz na corda não é senoidal senão uma função do tipo “dente de serra”, uma forma de onda que produz um espectro de som rico em harmônicos. A análise espectral do som do violino ao se tocar a corda Sol por exemplo, revela a presença de cerca de 15 harmônicos intensos [22, 38]. Sons com muitos harmônicos soam *cheios* e musicalmente mais ricos [76]. No violino, estes harmônicos são afetados pelas respostas acústicas do cavalete e do corpo do instrumento. Como mencionado anteriormente, o cavalete possui dois modos normais de vibração, ou ressonâncias, em 3000 Hz e 4500 Hz. Elas reforçam as componentes do som com frequências nessas regiões e, ao mesmo tempo, reduzem o tom (indesejável) na região da depressão entre elas. A seguir temos a influência das ressonâncias do ar dentro do instrumento, as ressonâncias do corpo e dos tampos. O som produzido pelas cordas é modulado por estas ressonâncias, que reforçaram as componentes (harmônicos) cujas frequências coincidam com as dos modos normais. O resultado é um espectro de som cujas componentes terão diferentes intensidades como resultado da influência de todas estas multirressonâncias. O som do violino então, resulta da forma de onda originada pela excitação das cordas pelo arco modulada pelas vibrações e ressonâncias do corpo do violino, seus tampos e o cavalete [8,14,77].

#### 4.5. Eficiência da conversão de energia

Quando um violinista puxa o arco sobre as cordas, o esforço que ele faz é da ordem de 0.5 N. Como a potência proporcionada por uma força é a taxa temporal com que a força efetua trabalho, então  $P = Fv_b \approx 0.25$  W, onde  $v_b \approx 0.5$  m/s é a velocidade da arcada. Esta energia é introduzida no cavalete e se transfere através de uma cadeia passando pelos pés do cavalete, o corpo do instrumento e a radiação sonora. Um ouvinte a 3 m do instrumento percebe um som com um nível de intensidade de  $\approx 76$  dB quando se toca *forte* na corda *Mi* do violino. O nível de intensidade correspondente é

$I \approx 4 \times 10^{-5}$  W/m<sup>2</sup>. Admitindo uma radiação sonora uniforme em todas as direções, calculamos a potência irradiada como o produto da intensidade pela área de uma esfera de raio  $r$ ,  $P \approx I(4\pi r^2) \approx 13$  mW. Assim, a eficiência da conversão da energia mecânica da arcada em energia da onda sonora no violino é da ordem de 5%. Este resultado está de acordo com o relatado pela Dra. C.M. Hutchins, de que apenas 2% da energia mecânica exercida pelo executante aparece efetivamente como som do instrumento [5]. Nosso resultado deve ser considerado apenas numa ordem de grandeza porque neste caso a hipótese da uniformidade da radiação não é muito boa, dado que o comprimento de onda para essa nota ( $\lambda \sim 0.52$  m) não é suficientemente grande diante das dimensões dos tampos do instrumento. Essa é uma condição de “fonte próxima”, na qual o padrão de irradiação da energia sonora ainda é influenciado pela natureza e forma da fonte, ou seja, o instrumento. De fato, a radiação sonora do violino é omnidireccional apenas entre 200 a 500 Hz. Entre 350 e 1000 Hz ela é parcialmente omnidireccional, e de 1000 a 5000 Hz ela é bastante direccional [13,22].

Este baixo índice de eficiência pode estar ligado também a difícil transferência de energia numa interface de dois materiais diferentes, como é o caso da corda metálica e o cavalete de madeira. O problema da transferência de energia quando uma onda passa de um meio para outro pode ser estudado através do conceito da impedância do meio físico. O estudo do comportamento da onda quando encontra uma interface entre dois meios cujas impedâncias são diferentes pode ser utilizado para calcular a energia transmitida e a energia refletida de uma onda que se propaga numa corda formada por duas seções de diferentes densidades [78]. Considerando que o meio no qual a onda se propaga apresenta uma impedância a essa onda, a resposta da onda frente a uma mudança de meio pode ser calculada a partir das impedâncias características dos meios envolvidos. A expressão da energia transmitida na interface entre um meio de impedância característica  $Z_1$  e um outro de impedância  $Z_2$  é

$$E_t = \frac{4Z_1Z_2}{(Z_1 + Z_2)^2}, \quad (16)$$

e a energia refletida

$$E_r = \left( \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \right)^2. \quad (17)$$

Quando uma onda incide sobre a interface de um outro meio, ela se transmite eficientemente se as impedâncias dos dois meios possuírem valores iguais ou muito próximos, ou seja, se  $Z_1 \approx Z_2$ . Neste caso não haverá energia refletida e dizemos que as impedâncias estão casadas (condição de *impedance matching*). Por outro lado, quando há uma grande diferença entre os valores destas duas impedâncias características, a onda



terá dificuldade para se transmitir entre os dois meios devido a falta de acoplamento das impedâncias (*mismatch*). No violino, assim como no piano, a energia deve ser transferida de uma corda vibrante para os tampos de madeira (uma tábua acústica, no caso do piano). Consideremos, no violino, a interface entre a corda (impedância característica  $Z_1$ ) e o cavalete ( $Z_2$ ). Se  $Z_1 \approx Z_2$  toda a energia será transferida da corda ao cavalete e praticamente nada será refletida pelo cavalete. Mas isso não é desejável neste caso, pois sem essas reflexões não se gera uma onda estacionária na corda. A impedância acústica característica de uma onda que se propaga num material de densidade  $\rho$  é  $Z = \rho c$ , onde  $c$  é a velocidade do som no meio [78]. Para os materiais da corda e do cavalete no violino, ou seja, aço e madeira, temos  $Z_1 \approx 4.7 \times 10^7$  kg/m<sup>2</sup>-s e  $Z_2 \approx 2.4 \times 10^6$  kg/m<sup>2</sup>-s, respectivamente. Nesta aproximação, a razão entre estas impedâncias características é,  $Z_1:Z_2 \approx 16:1$ , indicando que apenas 20% da energia da arcada será transmitida. A grande diferença entre as impedâncias características do aço e da madeira faz que apenas uma fração da energia ondulatória das cordas seja transmitida. Isto está de acordo com as estimativas de Cremer, de que o corpo do violino remove, em cada ciclo, 10% da energia armazenada da corda [27].

Como qualquer perda de energia é preocupante, o cavalete precisa ser leve e de tamanho adequado. É necessária uma considerável quantidade de energia para fazê-lo vibrar, com seus movimentos de balanço e de torção, em uma e em outra direção. Como a energia utilizada para se colocar o cavalete em vibração se obtém da energia da corda, quanto maior a massa do cavalete, maior a perda de energia. Para reduzir massa, o topo do cavalete é trabalhado para ser mais estreito que a base. Os orifícios (os *ouvidos* e o *coração*) também ajudam a reduzir sua massa [36]. A massa do cavalete do violino do autor [46], por exemplo, é de apenas 3.4 gramas.

## 5. Tocando o violino

### 5.1. Afinação e dedilhado

Quando um instrumento está bem afinado, seu som se mistura perfeitamente com o som dos outros instrumentos do naipe. Mas quando ele está desafinado, nós escutamos uma desagradável modulação no som, chamada de “batimento” [76]. A superposição de ondas indica que dois sons de frequências próximas - mas não coincidentes - dão origem a batimentos cuja frequência aumenta quando o intervalo entre as frequências correspondentes aumenta [43-45]. Se um violino de uma orquestra estiver desafinado, por exemplo, ele vai produzir um som ligeiramente mais alto ou mais baixo que a nota desejada. Ao tocar simultaneamente com os demais violinos, a superposição vai aparecer na forma de um batimento de alguns Hertz, característico de um

instrumento desafinado. O nosso ouvido é ruim para afinar notas puras e sua sensibilidade para distinguir entre dois sons de frequências diferentes também é limitada. Para sons entre 400 Hz e 4000 Hz, ele só consegue distinguir dois sons que diferem em 0.3% do valor da frequência. Na prática isso significa que ele só reconhece uma nota como desafinada se a frequência estiver errada em 3 ou 4 Hz. A resolução de um afinador eletrônico é de 1 Hz. Ele acusa uma desafinação então se a nota estiver errada em mais de 1 Hz. Para corrigir a desafinação, os violinistas ajustam a tensão das cordas utilizando os micro afinadores, que são parafusos micrométricos de 0.8 mm de diâmetro e que possuem um ganchinho para puxar (ou afrouxar) a corda (Fig. 1). Dessa forma, aumenta-se (ou diminui-se) a frequência de vibração da corda até alcançar o valor desejado. Uma volta do parafuso do micro afinador permite alterar a frequência em cerca de 7 Hz (tocando em primeira posição). Por isso que os violinistas corrigem uma nota levemente desafinada dando apenas meia volta no parafuso do micro afinador.

Muitas vezes se observa que o violinista afina primeiro a corda Lá utilizando um afinador eletrônico, e depois toca duas cordas vizinhas no violino prestando atenção aos batimentos. Como as cordas do violino estão afinadas em quintas, as frequências de suas notas estão numa razão 3:2. Quando o violinista então toca duas cordas vizinhas, o terceiro harmônico da primeira corda coincidirá com o segundo harmônico da segunda corda. Assim, se a corda Lá estiver desafinada, por exemplo, ao tocar-se simultaneamente as cordas Lá e Mi, ocorrerá batimento entre o terceiro harmônico do Lá ( $3 \times 440 = 1320$  Hz) e o segundo harmônico do Mi ( $2 \times 659.3 = 1318.6$  Hz). Desta forma, uma desafinação menor de 2 Hz entre as duas cordas será acusada. Este método de afinar tocando duas cordas vizinhas simultaneamente não é tão preciso como afinar cada corda separadamente com ajuda do afinador eletrônico, mas ele é empregado para checar rapidamente a afinação no intervalo de uma execução musical.

Em relação à digitação das notas numa corda do violino, a Eq. (1) indica que, para tocarem-se notas mais altas na mesma corda, o executante precisa dedilhar para diminuir o comprimento  $L$  da corda. Consideremos a terceira corda violino, afinada na nota Lá (440 Hz). A massa por unidade de comprimento dessa corda é  $\mu \approx 10$  mg/cm e a tensão é  $T = 82$  N. Para tocar, por exemplo, a nota Si<sub>4</sub> (493.8 Hz) nesta terceira corda, a Eq. (1) indica que o comprimento da corda deve ser reduzido de 32.5 cm para  $L \approx 29$  cm. Para tocar essa nota então, o executante deverá dedilhar a uma distância de  $(32.5-29.0) \approx 3.5$  cm da extremidade do espelho. Da mesma forma se pode calcular a posição do dedilhado para tocar todas as notas da corda Lá. O procedimento então se repete para as outras cordas. A Fig. 2 mostra o dedilhado - na chamada “primeira posição” - das notas no violino. Na verdade,

o dedilhado requer certa prática porque o espelho do instrumento não tem trastes como no violão, ou seja não há marcações de referência para as notas.

## 5.2. Intensidade relativa

A intensidade do som de um violino é relativamente fraca frente a intensidade dos instrumentos de metal. Cabe então perguntar-se: Quantos violinos são necessários para “balancear” o som dos instrumentos de metal numa orquestra? Como a sensação sonora está relacionada de uma forma aproximadamente logarítmica ao fluxo de energia incidente no ouvido, o nível de intensidade de um som,  $\alpha$ , é definido como

$$\alpha = 10 \log \left( \frac{I}{I_o} \right), \quad (18)$$

onde  $I$  é a intensidade do som e  $I_o$  é o limiar de audibilidade (a intensidade de som mais fraco que pode ser ouvido) [43, 45]. Seja  $\alpha_2$  o nível de intensidade de um trompete e  $\alpha_1$  o de um violino. Queremos saber quantos violinos são necessários para “balancear” o som de um trompete. Se  $I_1$  é a intensidade do som de um violino, a intensidade de  $n$  violinos será  $nI_1$ . Então

$$\alpha_2 - \alpha_1 = 10 \log \left( \frac{nI_1}{I_1} \right) = 10 \log (n). \quad (19)$$

O nível de som de um trompete na altura da nota  $\text{Do}_5$  é aproximadamente  $\alpha_2 \approx 70$  dB. O de um violino nessa mesma nota é de cerca de  $\alpha_1 \approx 55$  dB [79]. Substituindo estes valores na Eq. (19), obtemos  $n \approx 32$ . Este resultado indica que precisamos de cerca de 32 violinos para “balancear” os metais de uma orquestra. Este é, efetivamente, o número de violinos numa orquestra sinfônica convencional.

## 5.3. O ângulo entre o arco e a corda

Para a obtenção de um som de boa qualidade, é necessário que o arco siga o seu curso mantendo uma linha que deve ser estritamente perpendicular à corda em que se está tocando [80,81]. Quando toca, o violinista faz com que o arco exerça uma força normal sobre a corda. O movimento do arco sobre a corda é governado pelas forças de atrito estático e cinético as quais são dadas pelos respectivos coeficiente de atrito entre a crina e a corda multiplicado pelo módulo da força normal. A energia transferida para a corda será igual ao trabalho realizado por esta força menos as dissipações térmicas. Esta parcela da energia que realmente põe a corda em movimento divide-se de maneira desigual na excitação de três tipos de oscilações da corda, a transversal, a longitudinal e as oscilações de torção. A maior parte da energia corresponde a oscilação transversal, a qual é a geradora do som musical. As oscilações longitudinais e as de torção da corda são responsáveis de uma pequena fração da energia.

Estando o arco a um ângulo  $\theta$  com a corda, ocorre que também a força de atrito que transfere energia para a corda vai estar orientada de mesmo ângulo com relação a ela.

Podemos decompor esta força em termos dos versores paralelo e perpendicular à corda, escrevendo-a como

$$\mathbf{F} = |\mathbf{F}| \cos \theta \hat{e}_{||} + |\mathbf{F}| \sin \theta \hat{e}_{\perp}. \quad (20)$$

Sendo a componente em  $\hat{e}_{\perp}$  responsável pelo deslocamento transversal da corda gerando o movimento que já estudamos. Assim, para que seja transmitida a maior quantidade de energia para a vibração transversal da corda, devemos maximizar esta componente da força. Isso é conseguido fazendo  $\theta = 90^\circ$ , o que mecanicamente corresponde ao fato de manter o arco perpendicular à corda (ou paralelo ao cavalete, como preferem dizer os violinistas) durante todo o movimento. Desta forma além de maximizar a energia que excita as oscilações transversais, minimizam-se as oscilações longitudinais. Se o ângulo  $\theta$  não for exatamente  $90^\circ$ , apareceram oscilações longitudinais, as quais são indesejadas pelos músicos, pois suas frequências não são harmonicamente relacionadas com as frequências transversais da corda (ou seja, as frequências das ondas transversais não podem ser expressas como múltiplos inteiros de frequências das ondas transversais que correspondem às notas tocadas). Como resultado disto aparece um som indesejado emitido junto com o som que realmente se deseja tocar, o qual, além de diminuir a intensidade deste, ainda faz com que ocorram batimentos, resultando em um som final de baixa qualidade tonal. Este último fato é ainda agravado devido às frequências dos modos longitudinais se encontrarem numa região onde o ouvido humano é bastante sensível, 1-5 kHz. Lee e Raftery [82] mediram as frequências dos primeiros modos das cordas sol e ré de um violino, encontrando respectivamente os valores de 1350 Hz e 2700 Hz, estes valores variam para cada tipo de corda.

A existência de ondas de torção nas cordas é uma consequência direta do fato delas possuírem um raio finito, o que faz com que o arco sendo friccionado sobre a sua superfície e não em seu centro, produza um torque que gera uma rotação até o limite da força de atrito. Depois a corda gira escorregando em sentido contrário e o processo tem início novamente, sendo este semelhante ao deslocamento transversal da corda. Estes tipos de onda ainda foram pouco estudados [72, 83], mas já existe um consenso de que elas não são responsáveis por muita irradiação de som através do corpo do instrumento, pois estas somente podem exercer um pequeno torque sobre o cavalete, determinado pelo diâmetro da corda. As frequências dos modos torção de vibração não possuem nenhuma relação harmônica com as frequências das ondas transversais, que são as notas realmente tocadas.

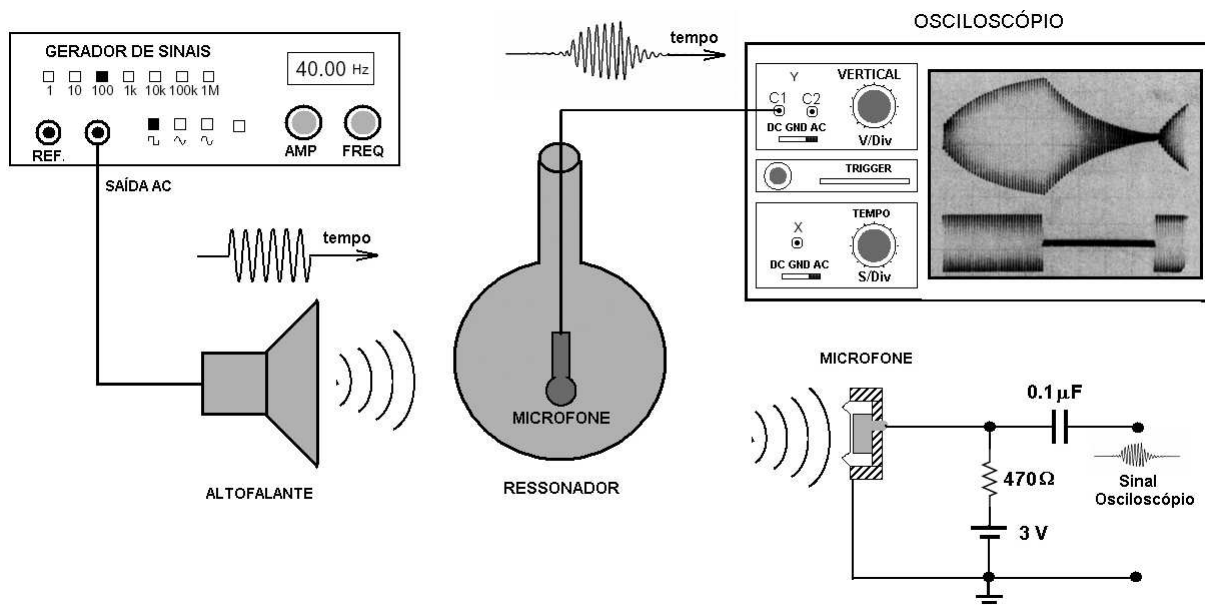
## 6. Conclusões

As idéias abordadas neste trabalho mostram uma aplicação prática de conceitos dados em cursos introdutórios de física básica e em cursos de oscilações e ondas. Nesse sentido, acreditamos que a discussão apresentada em nosso trabalho venha a dar uma contribuição no sentido de melhorar a motivação dos alunos para estudar conceitos físicos e relacioná-los com aplicações práticas. Há, naturalmente, muitas outras questões à serem aprofundadas sobre o assunto, questões estas que o reduzido espaço deste artigo não nos permite abordar. Falta considerar, por exemplo, toda uma gama de efeitos relacionados à difração sonora produzida pelo corpo do instrumento no momento da produção do som. Os efeitos de difração e outras

formas de interferência nos ramos da acústica foram introduzidos nos modelos teóricos apenas recentemente, o que deu lugar a interessantes desenvolvimentos nos dispositivos destinados à reprodução de sons gravados, popularmente conhecidos como “caixas acústicas”. O elo entre a física e a música constitui um importante fator motivador para o aprendizado, pois estimula os estudantes a encararem a física através de uma visão mais ampla e interdisciplinar. Acreditamos também que o ensino da física dos instrumentos musicais em cursos de formação de professores de Ensino Médio contribuirá para abordagem didáticas mais ricas e abrangentes. A aproximação entre ciência e arte presente neste artigo oferece uma experiência desafiadora e possibilitam uma discussão estimulante para estudantes e professores.

## 7. Apêndice 1

Procedimento experimental para a medida da ressonância de Helmholtz



A figura mostra a montagem experimental utilizada para medir a curva de ressonância da cavidade do violino. O instrumento é excitado por uma caixa de som (*Premier*, SP 690) ligada a um oscilador de áudio (*Function Generator BK Precision*, modelo 3026). A resposta acústica é coletada por um microfone de eletreto posicionado dentro da caixa acústica do instrumento. Este microfone deve ser suficientemente pequeno de forma a passar pelo espaço dos “*f*” do violino ( $\sim 7$  mm de diâmetro). O circuito utilizado na ligação do microfone é mostrado também na figura. O sinal captado pelo microfone foi analisado num osciloscópio digital (*Tektronix*, 60 MHz, mod. TDS 210), equipado com um kit de FFT. As medidas foram realizadas numa sala de  $330 \text{ m}^2$  do Laboratório de Ensino do IFSC-USP. É importante salientar de que a sala não dispõe de tratamento acústico específico. A curva de ressonância foi levantada de duas maneiras. No primeiro procedimento variou-se a frequência de excitação no gerador de 200 Hz até 320 Hz, registrando a intensidade de som captada pelo microfone. A ressonância do violino foi observada em  $270 \pm 3$  Hz e o fator de qualidade, determinado a partir da largura de linha a meia altura da curva de ressonância, foi  $Q = 14 \pm 1$  (Fig. 6). Este procedimento foi aplicado também para um violoncelo, observando-se a ressonância  $A_0$  em  $96 \pm 3$  Hz com um fator  $Q = 27 \pm 2$ . No segundo procedimento, aplicou-se um pulso curto, de duração definida na frequência de ressonância e registrou-se o decaimento do sinal captado pelo microfone. A curva de ressonância é obtida da transformada de Fourier do sinal captado. Os fatores de qualidade neste caso foram de  $Q = 17$  para o violino e  $Q = 21$  para o violoncelo.

## Agradecimentos

Os autores gostariam de expressar o seu agradecimento aos Profs. Claudio J. Magon, Renê Ayres Carvalho e Eduardo Castellano pelo incentivo; ao Prof. Xavier Boutillon (Paris) pelo material, a Nelson G.H. Gallo pelas imagens de microscopia eletrônica; a Samuel Alvarez pelos desenhos e Verônica Donoso pela ajuda; a Cláudio B. Bretas e Antenor Fabbri Petrilli pelo auxílio nas demonstrações no Laboratório de Ensino. Um dos autores (J.P.D.) agradece também o apoio de Ilza Zenker Leme Jolly (regente da Orquestra Experimental da UFSCar). Um outro autor (T.C.F) agradece o incentivo dos Profs. Vicente Dumke, Evaldo Ribeiro e Max Scheffler (professor de violino).

## Referências

- [1] P. White, *The Physics Teacher* **43**, 286 (2005).
- [2] C.M. Hutchins, *Journal Acoustical Society of America* **73**, 1421 (1983).
- [3] C.M. Hutchins, *J. Acous. Soc. Amer.* **92**, 639 (1992).
- [4] C.M. Hutchins and V. Benade (eds) *Research Papers in Violin Acoustics 1975-1993, with an Introductory Essay 350 Years of Violin Research* (Acoustical Society of America, Nova Iorque, 1996).
- [5] C.M. Hutchins, *Scientific American* **207**, 78 (1962).
- [6] J.C. Schelleng, *Scientific American* **230**, 87 (1974).
- [7] C.M. Hutchins, *Scientific American* **245**, 126 (1981).
- [8] C. Gough, *Physics World* **13**, 27 (2000)
- [9] *University of New South of Wales*, Australia, <http://www.phys.unsw.edu.au/music/violin>.
- [10] E. Jansson, *Acoustics for Violin and Guitar Makers* (KTH Institute, Suecia, 2002), 4<sup>th</sup> ed. Disponível em <http://www.speech.kth.se/publications>.
- [11] R.T. Beyer, *Sounds of Our Times* (AIP Press and Springer Verlag, Nova Iorque, 1999).
- [12] C.M. Hutchins (ed.), *Musical Acoustics* (Dowden, Hutchinson & Ross, Nova Iorque, 1976).
- [13] N.H. Fletcher e T.D. Rossing *The Physics of Musical Instruments* (Springer, Nova Iorque, 2005), 2<sup>nd</sup> ed.
- [14] C. Gough, *The European Physical Journal; Special Topics* **145**, 77 (2007).
- [15] A.C. Crombie, *Scientific American* **198**, 94 (1958).
- [16] J.F. Mulligan, *Am. J. Phys.* **57**, 68 (1989).
- [17] P. Bailhache, *Revue Histoire des Sciences* **39**, 301 (1986).
- [18] J.M. Bassalo, *Crônicas da Física* (Editora UFPA, Belém 1987 e 1992), tomos 1 e 3.
- [19] L. Koenigsberger, *Hermann Von Helmholtz* (Dover, Nova Iorque, 1965).
- [20] R.T. Beyer, *Sounds of Our Times* (AIP & Springer, Nova Iorque, 1999).
- [21] H. Helmholtz, *On the Sensations of Tone* (Dover, Nova Iorque, 1954).
- [22] L.L. Henrique. *Acústica Musical* (Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa, 2002).
- [23] R.A. Smith and D.M.A. Mercer, *Report Progress Physics* **42**, 1085 (1979).
- [24] H. Davies, *J. Acous. Soc. Amer.* **26**, 874 (1954).
- [25] P.R. Laird, *Ars Musica Denver* **6** (1993), disponível em <http://www.catgutacoustical.org>.
- [26] D.R. Raichel, *The Science and Applications of Acoustics* (Springer-Verlag, Nova Iorque, 2006), 2nd ed.
- [27] L. Cremer, *The Physics of the violin* (MIT Press, Massachusetts, 1984).
- [28] S.M. Nelson, *The Violin and Viola* (Dover Publications, Nova Iorque, 2003).
- [29] L.L. Henrique, *Instrumentos Musicais* (Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa, 1988).
- [30] Yves Guilloux, *Le Monde de la Musique* **197**, 50 (1996).
- [31] X. Boutillon, *Actes de Acoustics* **93**, 143 (1993); *Mécanique Industrie* **1**, 609 (2000).
- [32] C.B. Boyer, *História da Matemática* (Editora Edgard Blucher, São Paulo, 1974).
- [33] I. Johnston, *Measured Tones* (The Institute of Physics IOP, Nova Iorque, 1989), p. 124.
- [34] L. Wright, *Scientific American* **290**, 22 (2004); L.Burckle and H.D. Grissino-Mayer, *Dendrochronologia* **21**, 41 (2003).
- [35] J. Nagyvary, J.A. DiVerdi, N.L. Owen and H.D. Tolley, *Nature* **444**, 565 (2006).
- [36] J. Beament, *The Violin Explained* (Oxford University Press, Nova Iorque, 2000).
- [37] J.P. Echard, C. Benoit, J.P. Vicente, V. Malecki, J.V.J. Adelantado and S. Vaiedelich, *Analytica Chimica Acta* **584**, 172 (2007).
- [38] H. Massmann and R. Ferrer *Instrumentos Musicales: Artesania y Ciencia* (Dolmen, Chile, 1993).
- [39] Th.D. Rossing, *The Science of Sound* (Addison Wesley, Massachusetts, 1990), 2<sup>nd</sup> ed.
- [40] N. Marcolin, *Revista Pesquisa Fapesp* **116**, 10 (2005).
- [41] C.M. Hutchins, *Physics Today* **20**, 23 (1967).
- [42] Hutchins Consort, <http://www.hutchinsconsort.org> e <http://www.newviolinfamily.org>.
- [43] H. Moysés Nussenzveig, *Curso de Física Básica* (Editora E. Blücher, São Paulo, 2006), 6<sup>a</sup> ed., v. 2 e 3.
- [44] R. Resnick, D. Halliday and K.S. Krane, *Física* (LTC, Rio de Janeiro, 2003), 5<sup>a</sup> ed., v. 2.
- [45] P.A. Tipler e G. Mosca, *Física* (LTC, Rio de Janeiro, 2006), v. 1.
- [46] Violino 4/4, modelo *Estudante*, Atelier Musikantiga, São Paulo, SP (2002).
- [47] R.M. Eisberg e L.S. Lerner, *Física*, (McGraw Hill do Brasil, Rio de Janeiro, 1983), v. 2.
- [48] J. Bretos, C. Santamaria and, J. Alonso Moral, *J. Acoust. Soc. Amer.* **105**, 1942 (1999); *Acustica* **85**, 584 (1999).



- [49] J.S. Rigden, *Physics and the Sound of Music* (Wiley, Nova Iorque, 1985), 2<sup>nd</sup> ed.
- [50] L.E. Kinsler and A.R. Frey, *Fundamentals of Acoustics* (Wiley, Nova Iorque, 1962), 2<sup>nd</sup> ed., seção 8.4.
- [51] M.J. Moloney, *Am. J. Phys.* **72**, 1035 (2004).
- [52] A. Guiguet and R. Welti, *Revista Brasileira Ensino de Física* **25**, 287 (2003), Anexo 1.
- [53] G. Vandergrift, *Am. J. Phys.* **61**, 415 (1993).
- [54] H.O. Saldner, N.E. Molin and E.V. Jansson, *J. Acoust. Soc. Amer.* **100**, 1168 (1996); **95**, 1100 (1994).
- [55] J.M. McLennan, *Acta Acustica* **89**, 176 (2003).
- [56] A. Isaksson, H.O. Saldner and N.E. Molin, *J. Sound and Vibrations* **187**, 451 (1995).
- [57] G. Bissinger, *J. Acoust. Soc. Amer.* **120**, 482 (2006).
- [58] J.A. Moral, E.V. Jansson, *Acustica* **50**, 329 (1982).
- [59] E. Jansson, *Acustica* **83**, 337 (1997).
- [60] A. Runnemalm, N.E. Molin and E. Jansson, *J. Acoust. Soc. Amer.* **107**, 3452 (2000).
- [61] E.B. Dale, *American Journal of Physics* **44**, 1077 (1976).
- [62] E.V. Jansson, *Applied Acoustics* **65**, 1197 (2004).
- [63] J. Woodhouse, *Acustica* **91**, 155 (2005).
- [64] M. Hacklinger, *Acustica* **39**, 323 (1978).
- [65] A. Matsutani, *Japan J. Applied Physica* **41**, 6291 (2002).
- [66] A.P. French, *Vibrações e Ondas* (Editora UNB, Brasília, 2001).
- [67] F. Durup and E. Jansson, *Acta Acustica & Acustica* **91**, 206 (2005).
- [68] V. Angyalossy, E. Amano e E. Segala Alves, *Acta Botanica Bras.* **19**, 819 (2005).
- [69] M. Matsunaga and K. Minato, *J. Wood Science* **44**, 142 (1998).
- [70] A. Matsutani, *Japan Journal Applied Physics* **41**, 1618 (2002).
- [71] J.C. Schelleng *J. Acoust. Soc. Amer.* **53**, 26 (1973).
- [72] R.T. Schumacher, *J. Acoust. Soc. Amer.* **96**, 1985 (1994).
- [73] R. Piteroff and J. Woodhouse, *Acustica* **84**, 543, 744, e 929 (1998).
- [74] J. Woodhouse and P.M. Galluzzo, *Acta Acustica & Acustica* **90**, 579 (2004).
- [75] Prof. J. Woodhouse, [www2.eng.cam.ac.uk/~jw12](http://www2.eng.cam.ac.uk/~jw12). Animação da oscilação da corda fricionada: <http://plus.maths.org>.
- [76] Flo Menezes, *A Acústica Musical em Palavras e Sons* (Atelié Editorial, São Paulo, 2003).
- [77] R.T. Schumacher, *Physics Today* **59**, 10 (2006).
- [78] H.J. Pain, *The Physics of Vibrations and Waves* (Wiley, Nova Iorque, 2000), 5<sup>th</sup> ed.
- [79] B. Patterson, *Scientific American* **231**, 78 (1974).
- [80] L. Capet, *La Technique Supérieure de l'Archet* (Ed. M. Senart, Paris, 1916), 1<sup>a</sup> ed.
- [81] M. Crickboom, *The Violin: Theory and Practice* (Schott Freres, Brussels, 1950).
- [82] A.R. Lee and M.P. Raftery, *J. Acoust. Soc. Am.* **73**, 1361 (1983).
- [83] J. Woodhouse and A.R. Loach, *Acta Acustica & Acustica* **85**, 734 (1999).